



This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

- + *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.
- + *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.
- + *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.
- + *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at <http://books.google.com/>



Это цифровая копия книги, хранящейся для потомков на библиотечных полках, прежде чем ее отсканировали сотрудники компании Google в рамках проекта, цель которого - сделать книги со всего мира доступными через Интернет.

Прошло достаточно много времени для того, чтобы срок действия авторских прав на эту книгу истек, и она перешла в свободный доступ. Книга переходит в свободный доступ, если на нее не были поданы авторские права или срок действия авторских прав истек. Переход книги в свободный доступ в разных странах осуществляется по-разному. Книги, перешедшие в свободный доступ, это наш ключ к прошлому, к богатствам истории и культуры, а также к знаниям, которые часто трудно найти.

В этом файле сохранятся все примечания, комментарии и другие записи, существующие в оригинальном издании, как напоминание о том долгом пути, который книга прошла от издателя до библиотеки и в конечном итоге до Вас.

Правила использования

Компания Google гордится тем, что сотрудничает с библиотеками, чтобы перевести книги, перешедшие в свободный доступ, в цифровой формат и сделать их широкодоступными. Книги, перешедшие в свободный доступ, принадлежат обществу, а мы лишь хранители этого достояния. Тем не менее, эти книги достаточно дорого стоят, поэтому, чтобы и в дальнейшем предоставлять этот ресурс, мы предприняли некоторые действия, предотвращающие коммерческое использование книг, в том числе установив технические ограничения на автоматические запросы.

Мы также просим Вас о следующем.

- Не используйте файлы в коммерческих целях.
Мы разработали программу Поиск книг Google для всех пользователей, поэтому используйте эти файлы только в личных, некоммерческих целях.
- Не отправляйте автоматические запросы.
Не отправляйте в систему Google автоматические запросы любого вида. Если Вы занимаетесь изучением систем машинного перевода, оптического распознавания символов или других областей, где доступ к большому количеству текста может оказаться полезным, свяжитесь с нами. Для этих целей мы рекомендуем использовать материалы, перешедшие в свободный доступ.
- Не удаляйте атрибуты Google.
В каждом файле есть "водяной знак" Google. Он позволяет пользователям узнать об этом проекте и помогает им найти дополнительные материалы при помощи программы Поиск книг Google. Не удаляйте его.
- Делайте это законно.
Независимо от того, что Вы используете, не забудьте проверить законность своих действий, за которые Вы несете полную ответственность. Не думайте, что если книга перешла в свободный доступ в США, то ее на этом основании могут использовать читатели из других стран. Условия для перехода книги в свободный доступ в разных странах различны, поэтому нет единых правил, позволяющих определить, можно ли в определенном случае использовать определенную книгу. Не думайте, что если книга появилась в Поиске книг Google, то ее можно использовать как угодно и где угодно. Наказание за нарушение авторских прав может быть очень серьезным.

О программе Поиск книг Google

Миссия Google состоит в том, чтобы организовать мировую информацию и сделать ее всесторонне доступной и полезной. Программа Поиск книг Google помогает пользователям найти книги со всего мира, а авторам и издателям - новых читателей. Полнотекстовый поиск по этой книге можно выполнить на странице <http://books.google.com/>



Gift of

Joseph J. Smortchevsky



STANFORD UNIVERSITY LIBRARIES

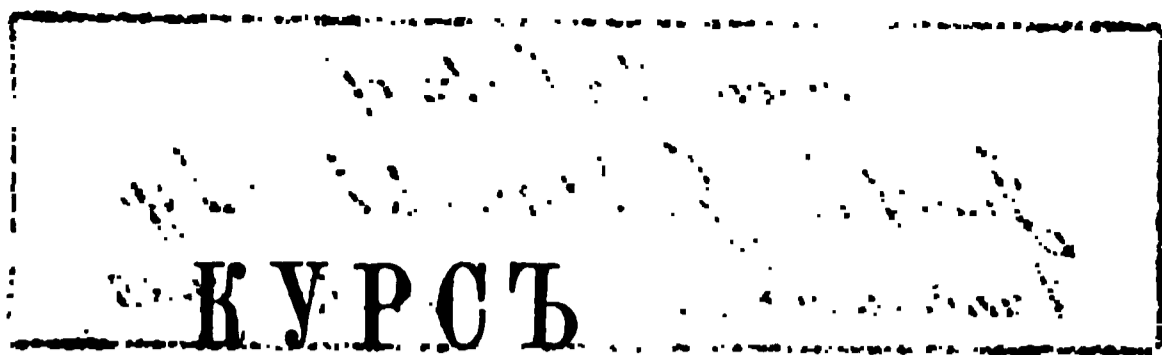
D.Bobylev

ANALYTIC MECHANICS
Vol.II

1888

Russian

Keep-SAL
1/9/96 CEC/HEE



АНАЛИТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ.

Бобылевъ, Д.

СОСТАВИЛЪ

Д. БОБЫЛЕВЪ

Профессоръ С.-Петербургскаго Университета.

II

ЧАСТЬ КИНЕТИЧЕСКАЯ.

ВЫПУСКЪ ПЕРВЫЙ:

МЕХАНИКА МАТЕРЬЯЛЬНОЙ ТОЧКИ.

(СЪ ОДНИМЪ ЛИСТОМЪ ЧЕРТЕЖЕЙ).

2 - Е ИЗ Д А Н І Е.

С.-ПЕТЕРБУРГЪ

Типографія М. М. Стасюлевича, Вас. Остр., 2 лин., 7.

1888.

From the books of
Joseph J. Smortchevsky
Vancouver, B.C., Canada, 1986

ACP 3583

v. 2



1468

ОГЛАВЛЕНІЕ

ПЕРВАГО ВЫПУСКА

Части кинетической.

§§	Стр.
ГЛАВА I. Основные принципы механики и опредѣленія, относя- щіяся къ свободному матеріальному тѣлу, движуще- муся поступательно и къ которому силы приложены однородно.	
1. Начало матеріи. Силы	5
2. Мѣсто приложенія силы. Силы, однородно-приложенныя къ тѣлу; ихъ величины и направленія	7
3. Начало параллелограмма силъ, однородно-приложенныхъ къ тѣлу. Силы составляющія и равнодѣйствующая. Равновѣсіе силъ	13
4. Силы взаимодѣйствія. Начало равенства однородныхъ и противо- положныхъ силъ взаимодѣйствія. Отношеніе между величинами однородныхъ силъ, приложенныхъ къ различнымъ тѣламъ	17
5. Равныя однородныя силы и силы, сообщающія равныя ускоренія различнымъ тѣламъ	20
6. Величина силы, однородно-приложенной къ тѣлу, равна суммѣ вели- чинъ однородныхъ силъ, приложенныхъ ко всѣмъ частямъ тѣла . .	21
7. Масса тѣла	23
8. Единица массы. Единица величины силы	25
9. Средняя плотность тѣла. Плотность вещества въ какой либо точкѣ тѣла	28
10. Количество движенія тѣла, движущагося поступательно	30
11. Основные принципы въ томъ видѣ, въ какомъ они приведены Нью- тономъ	30
12.	33

ГЛАВА II. Основные начала механики свободныхъ материаль- ныхъ точекъ.

13. Матерьяльная точка	33
14. Основные начала въ примѣненіи къ свободной матерьяльной точкѣ	33
15. Цѣль введенія понятія о матерьяльной точкѣ въ механику	35

ГЛАВА III. Механика свободной матерьяльной точки.

16. Равнодѣйствующая нѣсколькихъ силъ, одновременно приложенныхъ къ матерьяльной точкѣ. Силы, взаимно уравновѣшивающіяся	36
17. Дифференціальныя уравненія движенія свободной матерьяльной точки. Примѣры 1-й и 2-й	41
18. Интегралы дифференціальныхъ уравненій движенія свободной матерьяльной точки; число постоянныхъ произвольныхъ; начальное положеніе и начальная скорость матерьяльной точки. Примѣры 3-й, 4-й, 5-й	46
19. Случай прямолинейныхъ движеній матерьяльной точки. Примѣры: 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17.	59
20. Вопросы объ опредѣленіи криволинейнаго движенія свободной матерьяльной точки, въ которыхъ каждое изъ дифференціальныхъ уравненій второго порядка интегрируется отдѣльно. Примѣръ 18-й	80
21. Два приема преобразованія дифференціальныхъ уравненій движенія свободной матерьяльной точки	85
22. Значеніе вторыхъ частей дифференціальныхъ уравненій (110) предыдущаго параграфа. Моментъ силы, приложенной къ матерьяльной точкѣ, вокругъ даннаго центра и вокругъ данной оси	87
23. Моментъ количества движенія матерьяльной точки вокругъ центра и вокругъ данной оси. Секторьяльныя скорости проэкцій точки на плоскости координатъ	96
24. Значеніе дифференціальныхъ уравненій (110) параграфа 21-го. Интегралы, выражающіе законъ площадей	101
25. Работа силы. Живая сила. Значеніе дифференціального уравненія (112) параграфа 21-го	107
26. Законъ живой силы или сохраненія энергіи для одной матерьяльной точки. Потенціальная функція. Поверхности уровня	110
27. Примѣръ рѣшенія задачи о криволинейномъ движеніи свободной матерьяльной точки подъ вліяніемъ центральной силы, имѣющей потенціалъ. Примѣръ 19-й	118
28. Нѣкоторые другія формы интеграловъ дифференціальныхъ уравненій движенія свободной матерьяльной точки	125
29. Задачи 1—18	129
30. Задачи, въ которыхъ требуется опредѣлить относительное движеніе матерьяльной точки по отношенію къ неподвижной средѣ, имѣющей данное движеніе; даны силы, приложенныя къ матерьяльной точкѣ. Примѣры 20, 21	149
31. Положенія равновѣсія свободной матерьяльной точки. Условія устойчивости. Примѣры 22, 23, 24	167

ГЛАВА IV. Механика несвободной материальной точки.

32.	173
33. Ограниченіе свободы движенія точки поверхностью, удерживающею ее на себѣ.	174
34. Ограниченіе свободы движенія точки поверхностью, не удерживающею ее съ одной стороны	176
35. Условіе, которому должно удовлетворять ускореніе точки, движущейся по данной удерживающей поверхности	180
36. О кривизнѣ линій, проведенныхъ по поверхности и о кривизнѣ поверхностей	186
37. Условіе, которому должно удовлетворять ускореніе точки, движущейся по данной не удерживающей поверхности	191
38.	192
39. Реакція поверхности	193
40. Дифференціальныя уравненія движенія материальной точки по данной удерживающей поверхности при дѣйствіи заданныхъ силъ	196
41. Законъ живой силы для точки, движущейся по поверхности.	197
42. Геодезическая линія. Примѣръ 25.	197
43. Геодезическая кривизна кривой линіи, проведенной по поверхности.	202
44. Примѣры рѣшенія вопросовъ о движеніи по данной удерживающей поверхности материальной точки, подверженной заданнымъ силамъ. Примѣры 26, 27.	204
45. Реакція не удерживающей поверхности. Мѣсто схода движущейся точки съ такой поверхности	216
46. Трѣвіе материальной точки о поверхности. Примѣръ 28-й.	
47. Дифференціальныя уравненія, получающіяся чрезъ проактирование силъ и ускоренія на направленіе скорости, на нормаль къ поверхности и на бинормаль нормального сѣченія. Примѣръ 29.	222
48.	224
49. Дѣйствіе материальной точки на преграду. Давленіе точки на поверхность	225
50. Дифференціальныя уравненія движенія материальной точки, свобода движенія которой ограничена двумя пересѣкающимися поверхностями.	226
51. Законъ живой силы для материальной точки, движущейся по кривой линіи	229
52. Реакція кривой линіи удерживающей материальную точку на себѣ. Давленіе точки на кривую.	229
53. Примѣры рѣшенія вопросовъ о движеніи материальной точки по данной кривой линіи. Примѣры 30, 31, 32, 33, 34, 35.	232
54. Вопросы и задачи о движеніи несвободной материальной точки, которыя могутъ быть приведены къ опредѣленію относительнаго движенія точки по отношенію къ нѣкоторой движущейся средѣ. Примѣры: 36, 37, 38, 39, 40, 41.	244

VI

§§

Стр.

55. Положенія равновѣсія несвободной матерьяльной точки. Примѣры	
42, 43, 44, 45, 46, 47, 48	260
56. Импульсъ силы	282
57. Мгновенныя силы	285
58. Ударъ матерьяльной точки о преграждающую поверхность. Примѣры	
49, 50, 51, 52	288

304



II

ЧАСТЬ КИНЕТИЧЕСКАЯ.

МЕХАНИКА МАТЕРЬЯЛЬНЫХЪ ТОЧЕКЪ И СИСТЕМЪ,
ИЗЪ НИХЪ СОСТАВЛЕННЫХЪ.

Кинетика *) имѣетъ цѣлью изученіе зависимости между кинематическимъ состояніемъ матеріи, обладающей предполагаемыми свойствами, и причинами, обуславливающими это состояніе.

Подъ словами: «кинематическое состояніе матеріи» мы здѣсь подразумѣваемъ видъ движенія матеріи движущейся, или положеніе и строеніе матеріи покоящейся.

Предположенія о свойствахъ, которыя мы представляемъ себѣ присущими матеріи, рождаются въ насъ путемъ наведенія, изъ знанія явленій природы, почерпаемыхъ изъ наблюденій и опытовъ.

Тѣмъ же путемъ и изъ тѣхъ же источниковъ мы составляемъ себѣ представленіе о свойствахъ причинъ такихъ кинематическихъ состояній матеріи, которыя не объясняются единственно только допущенными уже свойствами ея; такія причины мы называемъ дѣятелями или силами.

Составленные предположенія о свойствахъ матеріи и дѣателей называются гипотезами; основываясь на нихъ, кинетика, путемъ математической дедукціи, показываетъ, въ какомъ кинематическомъ состояніи будутъ находиться данныя матерьяльныя тѣла при дѣйствіи на нихъ данныхъ дѣателей, или обратно, опредѣляетъ, при дѣйствіи какихъ дѣателей данныя тѣла могутъ находиться въ данномъ кинематическомъ состояніи.

*) Терминъ „кинетика“ происходитъ отъ слова *κίνησις*, означающаго произведеніе движенія, между тѣмъ какъ терминъ „кинематика“ происходитъ отъ слова *κίνημα*, означающаго состояніе движенія.

Цѣль этихъ выводовъ кинетики есть объясненіе наблюденныхъ фактовъ на основаніи сдѣланныхъ гипотезъ, и предсказаніе фактовъ незамѣченныхъ или не наблюдавшихся.

Каждая удача въ объясненіи или въ предсказаніи фактовъ увеличиваетъ вѣроятность одной или нѣсколькихъ изъ сдѣланныхъ гипотезъ.

Тѣ изъ гипотезъ кинетики, которыя относятся ко всякой матеріи или ко всякимъ дѣятелямъ и въ несомнѣнности которыхъ мы убѣждаемся по мѣрѣ бѣльшаго ознакомленія съ явленіями, принимаются за основныя истины природы, которымъ подчинены всѣ явленія физическаго міра; эти гипотезы называются основными началами или основными принципами механики.

Изложеніе сущности тѣхъ основныхъ началъ и опредѣленій, на которыхъ основывается механика свободнаго тѣла, движущагося поступательно, составляетъ содержаніе первой главы.

ГЛАВА I.

Основные принципы механики и опредѣленія, относящіяся къ свободному матерьяльному тѣлу, движущемуся поступательно и къ которому силы приложены однородно.

§ 1. Начало инерціи матеріи. Силы.

Инерція есть свойство матеріи, всегда и неотъемлемо присущее ей.

Существованіе этого свойства въ матеріи мы принимаемъ, какъ одинъ изъ основныхъ принциповъ механики, который мы формулируемъ слѣдующимъ образомъ:

Основное начало А: Всякая точка матерьяльнаго тѣла имѣетъ стремленіе сохранить безъ измѣненія величину и направленіе своей скорости абсолютнаго движенія.

Всякое состояніе матерьяльнаго тѣла, при которомъ ни одна изъ точекъ его не измѣняетъ своей скорости ни по величинѣ, ни по направленію, возможно по свойству инерціи матеріи и объясняется этимъ свойствомъ; слѣдовательно:

по свойству инерціи тѣло можетъ находиться въ абсолютномъ покоѣ;

по свойству инерціи оно можетъ совершать абсолютное поступательное движеніе, при которомъ всѣ точки его движутся равномерно и прямолинейно;

кроме того, мыслимо еще безчисленное множество других движений матерьяльнаго тѣла, при которыхъ ни одна точка тѣла не измѣняетъ ни величины, ни направленія абсолютной скорости (то есть не имѣетъ ускоренія), скорости же различныхъ точекъ различны и различно направлены; всѣ такія движенія матерьяльнаго тѣла, хотя и возможны по свойству инерціи матеріи, но необходимо сопровождаются деформаціями его; мы же, въ настоящей главѣ, будемъ говорить только о такихъ состояніяхъ матерьяльнаго тѣла, при которыхъ оно не деформируется, а потому въ разсмотрѣніе движеній, сопровождающихся деформаціями, не войдемъ.

Всякое такое движеніе матерьяльнаго тѣла, при которомъ хотя одна точка тѣла имѣетъ ускореніе, или измѣняетъ свою скорость, не можетъ быть объяснено свойствомъ инерціи матеріи; измѣненіе скорости или появленіе ускоренія мы приписываемъ особымъ причинамъ, которыя мы называемъ *силами*.

Что такое силы, въ чемъ заключается сущность ихъ — мы не знаемъ; мы можемъ знать только дѣйствія, ими производимыя и состоящія въ томъ, что онѣ сообщаютъ абсолютныя ускоренія точкамъ матеріи и измѣняютъ величины и направленія ихъ скоростей; если мы замѣчаемъ, что какая-либо точка матеріи получаетъ абсолютное ускореніе, или измѣняетъ свою абсолютную скорость, то заключаемъ, что на эту точку дѣйствуютъ нѣкоторыя силы.

Ни одна точка матерьяльнаго тѣла не можетъ получить абсолютнаго ускоренія и не можетъ измѣнить своей скорости, пока на нее не станетъ дѣйствовать какая-либо сила.

Стремленіе точекъ матеріи сохранить имѣющіяся скорости называется и во время дѣйствія на нихъ силой; каждая точка матеріи измѣняетъ свою скорость не вдругъ, но постепенно, даже при такихъ силахъ, которыя производятъ наиболѣе быстрое измѣненіе скоростей.

По прекращеніи дѣйствія силы, точка матеріи сохраняетъ ту скорость, которую она имѣла въ моментъ прекращенія дѣйствія силы.

Изъ сказаннаго въ настоящемъ параграфѣ слѣдуетъ, что матерьяльное тѣло, ни на одну точку котораго не дѣйствуютъ никакія силы, если не деформируется, то пребываетъ по инер-

ции либо въ абсолютномъ покое, либо въ абсолютномъ поступательномъ движеніи, при которомъ всѣ точки его движутся равномерно и прямолинейно.

Мы будемъ называть материальное тѣло *свободнымъ*, если оно можетъ двигаться поступательно по инерціи по всевозможнымъ направленіямъ и съ какими бы то ни было скоростями.

Материальное тѣло можетъ быть свободно во всемъ неограниченномъ пространствѣ, или внутри нѣкоторой части его, на предѣлахъ которой оно встрѣчаетъ другія материальныя тѣла или вообще какія-либо препятствія, мѣшающія его поступательному движенію по инерціи въ нѣкоторыхъ направленіяхъ.

§ 2. Мѣсто приложенія силы. Силы, однородно-приложенныя къ тѣлу; ихъ величины и направленія.

Всякая сила, дѣйствующая на какое-либо материальное тѣло, имѣетъ въ немъ нѣкоторое *мѣсто приложенія*: подъ этимъ именемъ мы подразумеваемъ тѣ части объема тѣла, всѣ точки которыхъ получаютъ ускоренія непосредственно отъ той силы, о которой идетъ рѣчь.

Ускоренія, получаемыя разными точками мѣста приложенія силы, могутъ быть неодинаковы; это можетъ зависѣть, какъ отъ свойствъ силы, такъ и отъ тѣхъ обстоятельствъ, въ которыхъ находится материальное тѣло.

Въ настоящей главѣ мы будемъ говорить только о такихъ силахъ, каждая изъ которыхъ прилагается сразу ко всѣмъ точкамъ свободнаго материальнаго тѣла и притомъ *сообщаетъ имъ всемъ одинаковыя и параллельныя ускоренія*; всякую такую силу мы будемъ называть *однородно-приложенною къ тѣлу* или просто *однородною силою*.

Примѣромъ однородныхъ силъ можетъ служить сила тяжести всякаго тѣла, сообщающая, какъ извѣстно, всѣмъ точкамъ тѣла равныя и параллельныя между собою ускоренія.

Такую однородную силу, которая сообщаетъ всѣмъ точкамъ свободнаго тѣла ускоренія всегда одной и той же величины и всегда параллельно неизмѣнному направленію въ пространствѣ, мы будемъ называть *постоянною однородною силою*; различныя по-

стоянныя однородныя силы, прилагаемыя къ одному и тому же матерьяльному тѣлу, могутъ различаться величинами и направле- ниями сообщаемыхъ ими ускореній.

Непостоянными или переменными однородными силами мы будемъ называть тѣя, которыя, хотя и сообщаютъ всѣмъ точкамъ свободнаго тѣла взаимно-равныя и параллельныя ускоренія, но величины этихъ ускореній и направленія ихъ измѣняются съ теченіемъ времени.

Всякая постоянная или непостоянная однородная сила, будучи приложена къ свободному матерьяльному тѣлу, находившемуся въ абсолютномъ покоѣ, или въ абсолютномъ поступательномъ движе- нии по инерціи, необходимо сообщить этому тѣлу нѣкоторое Посту- пательное Движеніе *).

*) Весьма легко доказать, что, при сказанныхъ условіяхъ, линія, соеди- няющая каждыя двѣ точки тѣла, сохранить свою длину и направленіе во все время движенія тѣла.

Пусть x_1, y_1, z_1 и x_2, y_2, z_2 суть координаты двухъ какихъ-либо точекъ тѣла въ моментъ t , a_1, b_1, c_1 и a_2, b_2, c_2 — координаты ихъ въ моментъ t_0 , въ который начала дѣйствовать на тѣло однородная сила.

Такъ какъ, въ каждый моментъ дѣйствія однородной силы, ускоренія всѣхъ точекъ тѣла равны и параллельны, то:

$$\frac{d^2x_2}{dt^2} = \frac{d^2x_1}{dt^2}, \quad \frac{d^2y_2}{dt^2} = \frac{d^2y_1}{dt^2}, \quad \frac{d^2z_2}{dt^2} = \frac{d^2z_1}{dt^2}.$$

Помноживъ эти равенства на dt и интегрируя ихъ въ предѣлахъ отъ t_0 до t , мы получимъ:

$x'_2 = x'_1, (x'_2)_0 = (x'_1)_0, y'_2 = y'_1, (y'_2)_0 = (y'_1)_0, z'_2 = z'_1, (z'_2)_0 = (z'_1)_0;$
гдѣ $(x'_2)_0, (y'_2)_0, (z'_2)_0, (x'_1)_0, (y'_1)_0, (z'_1)_0$ означаютъ проэкции на оси координатъ скоростей обѣихъ точекъ въ моментъ t_0 ; такъ какъ въ этотъ моментъ всѣ точки тѣла, по предположенію, имѣютъ скорости равныя и параллельныя, то:

$$x'_2 = x'_1; y'_2 = y'_1; z'_2 = z'_1.$$

Помноживъ эти равенства на dt и интегрируя ихъ въ предѣлахъ отъ t_0 до t , мы получимъ:

$$x_2 = x_1 = a_2 - a_1; y_2 = y_1 = b_2 - b_1; z_2 = z_1 = c_2 - c_1.$$

Эти равенства и выражаютъ, что линія, соединяющая обѣ точки, сохра- няетъ свою длину и направленіе; а это можетъ быть только при поступи- тельномъ движеніи тѣла.

Въ настоящей главѣ мы будемъ говорить только о тѣхъ случаяхъ, въ которыхъ матерьяльныя тѣла, подверженныя дѣйствию однородныхъ силъ, находятся въ покоѣ или въ поступательномъ движеніи; говоря здѣсь объ ускореніи или о скорости одной изъ точекъ тѣла, мы можемъ подразумѣвать произвольную точку его, такъ какъ всѣ точки тѣла, движущагося поступательно, имѣютъ въ одинъ и тотъ же моментъ времени одинаковыя ускоренія и одинаковыя скорости; въ виду этого, для сокращенія рѣчи, вмѣсто того, чтобы говорить: «скорость и ускореніе нѣкоторой точки тѣла, движущагося поступательно», мы будемъ выражаться короче: «скорость и ускореніе тѣла».

Положимъ, что въ нашемъ распоряженіи имѣется нѣсколько однородныхъ силъ:

№ 1-й, № 2-й, № 3-й,

которыя, по нашей волѣ, могутъ быть приложены къ одному и тому же свободному матерьяльному тѣлу *A*, находящемуся, до приложенія къ нему силъ, въ покоѣ, или въ поступательномъ движеніи по инерціи. Предполагается, что можемъ приложить каждую изъ этихъ силъ порознь, отдѣльно отъ прочихъ, и что можемъ также, если понадобится, приложить нѣсколько изъ этихъ силъ одновременно къ тому же тѣлу *A*.

Прилагая къ тѣлу *A* каждую изъ этихъ силъ отдѣльно отъ прочихъ и наблюдая поступательное движеніе, совершаемое этимъ тѣломъ, мы можемъ, по виду движенія которой-либо изъ точекъ его, опредѣлить во всякій моментъ движенія величину и направленіе ускоренія, сообщаемого этою однородною силою всѣмъ точкамъ тѣла.

Изъ такихъ наблюденій, положимъ, окажется, что силы № 1-й, № 2-й, № 3-й, . . . сообщаютъ тѣлу *A* ускоренія неодинаковой величины и неодинаковаго направленія; притомъ въ числѣ этихъ силъ могутъ оказаться какъ постоянныя, такъ и переменныя однородныя силы.

Видя такое различіе въ количественномъ отношеніи между дѣйствіями этихъ силъ на одно и то же тѣло, мы вправѣ заключить, что существуетъ нѣкоторое количественное различіе и въ самихъ силахъ.

Такъ какъ мы не знаемъ существа силъ, а только ихъ дѣйствія, то намъ приходится составлять себѣ количественное представленіе о силахъ по производимымъ ими дѣйствіямъ, то есть по тѣмъ ускореніямъ, которыя онѣ сообщаютъ свободному матерьяльному тѣлу.

Мы представляемъ себѣ, что однородно-приложенныя ко всякому тѣлу силы имѣютъ, подобно ускореніямъ, *величины и направленія*.

Значенія этихъ понатій мы выразимъ слѣдующими опредѣленіями.

Опредѣленіе а: Подъ направленіемъ силы, однородно-приложенной къ какому-либо тѣлу, мы подразумѣваемъ то направленіе, по которому она сообщаетъ ускоренія всѣмъ точкамъ этого тѣла, когда оно свободно. Постоянная сила имѣетъ неизмѣнное направленіе въ пространствѣ.

Опредѣленіе б: Силамъ, однородно-приложеннымъ къ одному и тому же тѣлу, мы приписываемъ величины, пропорціональныя величинамъ тѣхъ ускореній, которыя онѣ порождая сообщаютъ этому тѣлу, когда оно свободно. Постоянной силѣ, однородно-приложенной къ тѣлу, мы приписываемъ постоянную величину.

По 2-му опредѣленію *б* численное отношеніе между величинами двухъ постоянныхъ или непостоянныхъ силъ, однородно-прилагаемыхъ къ одному и тому же тѣлу, равняется численному отношенію между величинами ускореній, сообщаемыхъ ими этому тѣлу, когда оно свободно.

Пусть силы № 1-й и № 2-й суть силы постоянныя; первая сообщаетъ тѣлу *А* ускореніе \dot{v}_1 по опредѣленному направленію, вторая — ускореніе \dot{v}_2 по иному направленію; на основаніи выше-сказаннаго мы заключимъ, что:

$$\begin{aligned} (\text{Величина силы № 2}) &= \dot{v}_2 \\ (\text{Величина силы № 1}) &= \dot{v}_1 \end{aligned} \quad \dots \dots \dots (1)$$

или

$$(\text{Величина силы № 2}) = \frac{\dot{v}_2}{\dot{v}_1} (\text{Велич. силы № 1}) \dots (2)$$

Относительно непостоянныхъ однородныхъ силъ намъ придется

заклѣчить, что онѣ имѣютъ величины и направленія, измѣняющіяся съ теченіемъ времени; но, въ каждый опредѣленный моментъ времени, всякая однородно-прилагаемая къ тѣлу A сила имѣетъ опредѣленное направленіе, совпадающее съ направленіемъ ускореній, сообщаемыхъ ею въ этотъ моментъ всѣмъ точкамъ этого свободнаго тѣла, и опредѣленную величину, численное отношеніе которой къ величинѣ силы № 1 равно:

$$\frac{\dot{v}}{\dot{v}_1}$$

гдѣ \dot{v} есть величина ускоренія, сообщаемого сказанною силою тѣлу A въ разсматриваемый моментъ времени.

Такимъ образомъ мы составляемъ себѣ представленіе объ относительной величинѣ различныхъ силъ, однородно-прилагаемыхъ къ одному и тому же тѣлу; мы можемъ сказать, что измѣряемъ величины этихъ силъ величиною одной изъ нихъ, подобно тому, какъ мы измѣряемъ длины — единицею длины, скорости — единицею скорости и ускоренія — единицею ускоренія.

Величина каждой однородной силы, прилагаемой къ тѣлу A , выразится у насъ именованнымъ числомъ въ величинѣ той изъ нихъ, которую мы примемъ за единицу этихъ силъ; такъ, напримѣръ, именованныя числа:

$$\frac{\dot{v}_2}{\dot{v}_1} \text{ (Велич. силы № 1-й); } \frac{\dot{v}_3}{\dot{v}_1} \text{ (Велич. силы № 1-й)}$$

выражаютъ величины силъ № 2-й и № 3-й въ величинѣ силы № 1-й; знакъ: — (Велич. силы № 1-й) есть символъ, означающій величину силы однородно-приложенной къ тѣлу A и сообщающей ему ускореніе \dot{v}_1 , отношенія же:

$$\frac{\dot{v}_2}{\dot{v}_1}, \frac{\dot{v}_3}{\dot{v}_1}$$

суть отвлеченныя числа.

Для болѣе краткаго обозначенія величинъ и направленій различныхъ силъ мы примемъ буквенныя обозначенія; а именно, величины силъ однородно-прилагаемыхъ къ тѣлу A мы обозначимъ слѣдующимъ образомъ:

$F1_A$ будет означать величину силы № 1-й сообщ. тѣлу A уск. \dot{v}_1 ,
 $F2_A$ " " " " № 2-й " " A " \dot{v}_2 ,
 $F3_A$ " " " " № 3-й " " A " \dot{v}_3 ,

Надо имѣть въ виду, что эти символы означаютъ именован-
 ные числа, единицею наименованія которыхъ служить величина,
 изображаемая однимъ изъ этихъ же символовъ, численныя же отно-
 шенія между величинами, изображаемыми этими символами, суть
 отвлеченныя числа или дроби:

$$\frac{F2_A}{F1_A} = \frac{\dot{v}_2}{\dot{v}_1}, \quad \frac{F3_A}{F1_A} = \frac{\dot{v}_3}{\dot{v}_1}; \dots\dots\dots (3)$$

Направленія силъ условимся обозначать тѣми же самыми зна-
 ками, какъ и величины силъ, подобно тому, какъ мы обозначаемъ
 одною и тою же буквою величину и направленіе ускоренія; поэтому:

$$\cos (F1_A, X), \cos (F1_A, Y), \cos (F1_A, Z)$$

будутъ означать косинусы угловъ, составляемыхъ съ осями коорди-
 нать направленіемъ силы № 1, однородно-примененной къ тѣлу A .

Величины однородныхъ силъ: №№ $n, (n+1), (n+2), \dots$,
 прилагающихся къ другому тѣлу B и сообщающихъ ему ускоренія
 $\dot{v}_n, \dot{v}_{(n+1)}, \dot{v}_{(n+2)}, \dots$ выражаются, на основаніи опредѣленія b ,
 въ величинѣ одной изъ этихъ же силъ. Означимъ величины и нап्रा-
 вленія ихъ символами: $Fn_B, F(n+1)_B, F(n+2)_B, \dots$; каждый
 изъ этихъ символовъ, когда онъ есть знакъ величины силы, предста-
 вляетъ нѣкоторое именованное число, единицею наименованія кото-
 раго служить величина, изображаемая однимъ изъ этихъ же сим-
 боловъ (напримѣръ, Fn_B = велич. силы № n); численныя же от-
 ношенія между величинами этихъ силъ суть отвлеченныя дроби:

$$\frac{F(n+1)_B}{Fn_B} = \frac{\dot{v}_{(n+1)}}{\dot{v}_n}; \quad \frac{F(n+2)_B}{Fn_B} = \frac{\dot{v}_{(n+2)}}{\dot{v}_n}; \dots\dots\dots (3 \text{ bis})$$

§ 3. Начало параллелограмма силъ, однородно-приложенныхъ къ тѣлу. Силы составляющія и равнодѣйствующая. Равновѣсіе силъ.

Въ предъидущемъ параграфѣ, говоря о дѣйствіи на свободное тѣло силъ однородно-приложенныхъ къ нему, мы предполагали, что каждая изъ нихъ можетъ быть приложена къ тѣлу или отнята отъ него по нашему желанію; при такомъ условіи мы можемъ подвергать тѣло дѣйствію каждой изъ однородныхъ силъ въ отдѣльности. Однако встрѣчаются такіе однородныя силы какъ напримѣръ силы тяжести, которыя постоянно приложены къ тѣлу и отъ вліянія которыхъ мы не въ состояніи освободить тѣло; въ такихъ случаяхъ придется нерѣдко разсматривать движеніе тѣла при дѣйствіи двухъ или нѣсколькихъ однородныхъ силъ, одновременно-приложенныхъ къ тѣлу.

Одновременное дѣйствіе нѣсколькихъ одновременно-приложенныхъ къ тѣлу силъ опредѣляется слѣдующимъ основнымъ принципомъ механики:

Основное начало В: Ускореніе, сообщаемое каждой точкѣ свободного тѣла нѣсколькими одновременно-приложенными къ нему однородными силами, есть геометрическая сумма *), составленная изъ тѣхъ самыхъ ускореній, которыя сообщаютъ эти силы, приложенныя въ тѣлу порознь.

Иначе говоря, это начало утверждаетъ, что каждая изъ одновременно-приложенныхъ однородныхъ силъ сообщаетъ тѣлу ускореніе той же величины и того же направленія, какъ бы она дѣйствовала отдѣльно, и что всѣ такіе ускоренія, сообщаемыя одновременно одному тѣлу, складываются геометрически въ одно уско-

*) Въ § 32 кинематической части этой книги объяснено было значеніе геометрическаго сложенія; кромѣ того въ той части намъ случалось неоднократно говорить объ этомъ дѣйствіи, какъ въ примѣненіи къ скоростямъ, такъ и въ примѣненіи къ ускореніямъ; поэтому мы здѣсь предполагаемъ, что смыслъ этого термина совершенно понятенъ читателю.

реніе, дѣйствительно принимаемое свободнымъ тѣломъ; конечно, всѣ точки тѣла получаютъ равныя и параллельныя геометрически-сложныя ускоренія, такъ какъ всѣ приложенныя къ тѣлу силы предполагаются однородными.

Ускореніе, сообщаемое свободному тѣлу нѣсколькими однородными силами, приложенными къ нему одновременно, можетъ быть сообщено ему одною однородною силою, которая называется *равнодѣйствующею* этихъ силъ; эти же силы, по отношенію къ ихъ равнодѣйствующей, называются *составляющими силами*.

Основываясь на началѣ *B*, мы можемъ выработать правило для опредѣленія величины и направленія равнодѣйствующей по величинамъ и направленіямъ составляющихъ силъ.

Предположимъ, что къ тѣлу *A* одновременно приложены однородныя силы:

№ 2, № 3, № *k*,

о величинахъ и направленіяхъ которыхъ мы говорили въ предъидущемъ параграфѣ; если тѣло *A* свободно, то, по началу *B*, оно получитъ такое ускореніе \dot{v} , проэкціи котораго на оси координатъ будутъ равны проэкціямъ на нихъ ускореній $\dot{v}_2, \dot{v}_3, \dots \dot{v}_k$; то есть:

$$\left. \begin{aligned} \dot{v} \cos(\dot{v}X) &= \dot{v}_2 \cos(\dot{v}_2X) + \dot{v}_3 \cos(\dot{v}_3X) + \dots + \dot{v}_k \cos(\dot{v}_kX) \\ \dot{v} \cos(\dot{v}Y) &= \dot{v}_2 \cos(\dot{v}_2Y) + \dot{v}_3 \cos(\dot{v}_3Y) + \dots + \dot{v}_k \cos(\dot{v}_kY) \\ \dot{v} \cos(\dot{v}Z) &= \dot{v}_2 \cos(\dot{v}_2Z) + \dot{v}_3 \cos(\dot{v}_3Z) + \dots + \dot{v}_k \cos(\dot{v}_kZ) \end{aligned} \right\} \dots (4)$$

Ускоренія $\dot{v}_2, \dot{v}_3, \dots \dot{v}_k$ суть тѣ самыя, которыя сообщаются свободному тѣлу *A* силами № 2, № 3, № *k* въ отдѣльности; поэтому:

$$\dot{v}_2 = \frac{F2_A}{F1_A} \dot{v}_1, \quad \dot{v}_3 = \frac{F3_A}{F1_A} \dot{v}_1, \quad \dots \quad \dot{v}_k = \frac{Fk_A}{F1_A} \dot{v}_1, \quad \dots (5)$$

направленія ихъ совпадаютъ съ направленіями этихъ силъ.

$$\left. \begin{aligned} \cos(\dot{v}_2X) &= \cos(F2_A, X), \quad \cos(\dot{v}_3X) = \cos(F3_A, X), \\ \cos(\dot{v}_2Y) &= \cos(F2_A, Y), \quad \cos(\dot{v}_3Y) = \cos(F3_A, Y), \\ \cos(\dot{v}_2Z) &= \cos(F2_A, Z), \quad \cos(\dot{v}_3Z) = \cos(F3_A, Z), \end{aligned} \right\} ; \dots (6)$$

следовательно, можно представить равенства (4) следующими образомъ:

$$\left. \begin{aligned} \dot{v} \cos(\dot{v}X) &= \frac{\dot{v}_1}{F1_A} (F2_A \cos(F2_A, X) + \dots + Fk_A \cos(Fk_A, X)) \\ \dot{v} \cos(\dot{v}Y) &= \frac{\dot{v}_1}{F1_A} (F2_A \cos(F2_A, Y) + \dots + Fk_A \cos(Fk_A, Y)) \\ \dot{v} \cos(\dot{v}Z) &= \frac{\dot{v}_1}{F1_A} (F2_A \cos(F2_A, Z) + \dots + Fk_A \cos(Fk_A, Z)) \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Ускореніе \dot{v} можетъ быть сообщено свободному тѣлу A одною однородно-приложенною къ нему силою, направленіе которой совпадаетъ съ направленіемъ \dot{v} и величина которой равна:

$$F_A = \frac{\dot{v}}{\dot{v}_1} F1_A; \dots \dots \dots (8)$$

эта сила F_A и есть равнодѣйствующая составляющихъ однородныхъ силъ: $F2_A, F3_A, \dots Fk_A$.

Такъ какъ, по нашему знакоположенію, знакъ F_A служить для обозначенія не только величины силы, но еще и ея направленія, то:

$$\left. \begin{aligned} \cos(\dot{v}X) &= \cos(F_A, X) \\ \cos(\dot{v}Y) &= \cos(F_A, Y) \\ \cos(\dot{v}Z) &= \cos(F_A, Z) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (9)$$

На основаніи (8) и (9), изъ равенствъ (7) слѣдуютъ равенства.

$$\left. \begin{aligned} F_A \cos(F_A, X) &= F2_A \cos(F2_A, X) + F3_A \cos(F3_A, X) + \dots \\ &\quad \dots + Fk_A \cos(Fk_A, X) \\ F_A \cos(F_A, Y) &= F2_A \cos(F2_A, Y) + F3_A \cos(F3_A, Y) + \dots \\ &\quad \dots + Fk_A \cos(Fk_A, Y) \\ F_A \cos(F_A, Z) &= F2_A \cos(F2_A, Z) + F3_A \cos(F3_A, Z) + \dots \\ &\quad \dots + Fk_A \cos(Fk_A, Z) \end{aligned} \right\} \dots (10)$$

выражающія величину и направленіе равнодѣйствующей въ величинахъ и направленіяхъ составляющихъ силъ.

Величины и направленія силъ, однородно-прилагаемыхъ къ тѣлу, можно изображать длинами, откладываемыми по направленіямъ силъ отъ какой-либо одной и той же точки тѣла; каждая длина должна быть во столько разъ болѣе единицы длины, во сколько разъ величина изображаемой ею силы болѣе величины той силы, которую мы приняли за единицу силъ, прилагаемыхъ къ этому тѣлу.

Изображая силы длинами, мы можемъ поступать съ ними какъ съ ускореніями, то есть проектировать ихъ на направленія или на плоскости и производить надъ ними геометрическія сложенія и вычитанія.

Проекцію силы F_A на ось X мы называемъ силу, имѣющую величину $F_A \cos (F_A X)$, и направленную параллельно положительной или отрицательной оси X , смотря потому, имѣетъ ли \cos положительную или отрицательную величину.

Проекція силы F_A на ось X изображается проекцію на ту же ось длины, представляющей эту силу.

Каждое изъ равенствъ (10) выражаетъ, что проекція на одну изъ осей координатъ равнодѣйствующей F_A равна суммѣ проекцій составляющихъ силъ: $F_2A, F_3A, \dots F_kA$.

Изъ этого слѣдуетъ, что длины, изображающія силы $F_A, F_2A, F_3A, \dots F_kA$ имѣютъ такія величины и направленія, что изъ лнвій, равныхъ и параллельныхъ имъ, можно составить замкнутый многоугольникъ.

Слѣдовательно, длина, изображающая равнодѣйствующую F_A , есть геометрическая сумма длинъ, изображающихъ составляющія силы: $F_2A, F_3A, \dots F_kA$.

Если къ тѣлу одновременно приложены только двѣ однородныя силы, то равнодѣйствующая ихъ изобразится діагональю параллелограмма, стороны котораго изображаютъ величины и направленія приложенныхъ къ тѣлу силъ.

Построеніе длины, изображающей равнодѣйствующую нѣсколькихъ силъ, можно сдѣлать послѣдовательнымъ образомъ: сначала построить, по правилу параллелограмма, равнодѣйствующую двухъ изъ приложенныхъ къ тѣлу силъ, затѣмъ, на полученной длинѣ и на длинѣ, изображающей третью силу, построить новый параллелограммъ, діагональ котораго изобразитъ равнодѣйствующую трехъ силъ, и т. д.; такимъ образомъ опредѣленіе величины и направленія равнодѣйствующей нѣсколькихъ однородно-приложенныхъ къ тѣлу силъ сводится на послѣдовательное примѣненіе правила параллелограмма; вслѣдствіе этого основное начало B называютъ *началомъ параллелограмма силъ*.

Если равнодѣйствующая однородныхъ силъ, одновременно приложенныхъ къ одному и тому же тѣлу, равна нулю, то тогда тѣло не получаетъ отъ совокупнаго дѣйствія ихъ никакого ускоренія; въ такихъ случаяхъ говорятъ, что *силы взаимно-уравновѣшиваются или накладываются въ равновѣсїи*.

Свободное матерьяльное тѣло, къ которому одновременно приложено нѣсколько однородныхъ взаимно-уравновѣшивающихся силъ, если не деформируется, то пребываетъ по инерціи либо въ абсолютномъ покое, либо въ абсолютномъ поступательномъ движеніи, при которомъ всѣ точки его движутся равномерно и прямолинейно.

Равновѣсїе однородныхъ силъ: $F^1_A, F^2_A, \dots, F^p_A$, одновременно приложенныхъ къ тѣлу A , выражается аналитически равенствами.

$$\left. \begin{aligned} F^1_A \cos(F^1_A, X) + F^2_A \cos(F^2_A, X) + \dots + F^p_A \cos(F^p_A, X) &= 0 \\ F^1_A \cos(F^1_A, Y) + F^2_A \cos(F^2_A, Y) + \dots + F^p_A \cos(F^p_A, Y) &= 0 \\ F^1_A \cos(F^1_A, Z) + F^2_A \cos(F^2_A, Z) + \dots + F^p_A \cos(F^p_A, Z) &= 0 \end{aligned} \right\} (11)$$

которыя могутъ быть замѣнены символическимъ равенствомъ:

$$\bar{F}^1_A + \bar{F}^2_A + \bar{F}^3_A + \dots + \bar{F}^p_A = 0, \dots \dots (12)$$

выражающимъ, что геометрическая сумма длинъ, изображающихъ уравновѣшивающіяся силы, равна нулю.

Точно также равновѣсїе однородныхъ силъ № n , № r , № s , . . . № q , одновременно приложенныхъ къ свободному тѣлу B , выражается слѣдующимъ символическимъ равенствомъ:

$$F^n_B + F^r_B + F^s_B + \dots + F^q_B = 0. \dots \dots (13)$$

§ 4. Силы взаимодѣйствія. Начало равенства однородныхъ и противоположныхъ силъ взаимодѣйствія. Отношеніе между величинами однородныхъ силъ, приложенныхъ къ различнымъ тѣламъ.

На основаніи началъ и опредѣленій, приведенныхъ въ предыдущихъ параграфахъ, мы измѣряемъ численныя отношенія между величинами однородныхъ силъ, прилагаемыхъ къ одному и тому же тѣлу.

Теперь мы приведемъ начало, на основаніи котораго мы извѣщаемъ отношенія между величинами однородныхъ силъ, приложенныхъ къ разнымъ тѣламъ; это начало относится къ силамъ взаимнодѣйствія между тѣлами и опредѣляетъ понятіе о равныхъ однородныхъ силахъ, приложенныхъ къ двумъ разнымъ тѣламъ.

Изученіе свойствъ тѣхъ силъ, дѣйствіемъ которыхъ объясняются явленія природы, показало, что величина и направленіе всякой силы, приложенной къ какому-либо матерьяльному тѣлу *A*, находятся въ опредѣленной зависимости отъ положенія, занимаемаго по отношенію къ тѣлу *A* нѣкоторымъ тѣломъ *B*, въ которомъ какъ будто бы заключается источникъ силы, приложенной къ *A*; одновременно съ силою, приложенною къ *A* и имѣющею своимъ источникомъ тѣло *B*, наблюдается сила, приложенная къ *B* и имѣющая своимъ источникомъ тѣло *A*.

Эти одновременныя силы, дѣйствующія между тѣлами, называются *силами взаимнодѣйствія* между ними.

Всѣ силы природы суть силы взаимнодѣйствія между тѣлами.

Между тѣлами конечныхъ размѣровъ, находящимися въ конечныхъ разстояніяхъ одно отъ другого, силы взаимнодѣйствія бываютъ по большей части силами неоднородно-приложенными къ тѣламъ; чѣмъ меньше размѣры тѣлъ и чѣмъ больше разстоянія между ними, тѣмъ ближе подходятъ эти силы къ однородности.

Представимъ себѣ, что имѣемъ такіа тѣла, между которыми взаимнодѣйствія суть силы однородныя, такъ что къ тѣлу *A* приложена однородная сила, величина и направленіе которой зависятъ отъ относительнаго положенія тѣла *B* по отношенію къ тѣлу *A*, и въ то же время къ тѣлу *B* приложена однородная сила, величина и направленіе которой зависятъ отъ положенія тѣла *A* по отношенію къ тѣлу *B*.

Такія силы взаимнодѣйствія между двумя тѣлами мы предполагаемъ равными между собою, если направленія ихъ противоположны; это предположеніе составляетъ сущность одного изъ началъ механики, которое мы выразимъ такъ:

Основное начало *C*. Если взаимодействия между двумя тѣлами суть силы однородно-приложенныя къ нимъ и прямо-противоположныя одна другой, то эти силы равны по величинѣ.

Принявъ это начало, мы можемъ опредѣлить численныя отношенія между величинами какихъ-либо однородныхъ силъ, приложенныхъ къ тѣламъ *A* и *B*, если взаимодействия между этими тѣлами суть силы однородныя и прямопротивоположныя хотя бы при нѣкоторомъ одномъ только опредѣленномъ относительномъ положеніи ихъ.

Положимъ, что эти силы взаимодействия сообщаютъ: тѣлу *A* ускореніе \ddot{v}_A и тѣлу *B* ускореніе \ddot{v}_B .

Пусть $F1_A, F2_A, \dots$ означаютъ, по прежнему, величины однородныхъ силъ, прилагаемыхъ къ тѣлу *A* и сообщающихъ ему ускоренія $\dot{v}_1, \dot{v}_2, \dots$; величины этихъ силъ могутъ быть сравнены, на основаніи опредѣленія *b*, съ величиною силы, сообщаемой тѣлу *A* ускореніе \ddot{v}_A ; означимъ черезъ fB_A величину этой силы; будемъ имѣть равенства:

$$\frac{fB_A}{F1_A} = \frac{\ddot{v}_B}{\dot{v}_1}, \quad \frac{fB_A}{F2_A} = \frac{\ddot{v}_B}{\dot{v}_2}, \quad \dots \quad (14)$$

Пусть, далѣе, $Fn_B, F(n+1)_B, \dots$ означаютъ величины силъ однородно-прилагаемыхъ къ тѣлу *B* и сообщающихъ ему ускоренія $\dot{v}_n, \dot{v}_{n+1}, \dots$; означимъ черезъ fA_B величину силы, сообщаемой тому же тѣлу ускореніе \ddot{v}_B ; подобно тому, какъ и для тѣла *A*, будемъ имѣть равенства:

$$\frac{fA_B}{Fn_B} = \frac{\ddot{v}_B}{\dot{v}_n}, \quad \frac{fA_B}{F(n+1)_B} = \frac{\ddot{v}_B}{\dot{v}_{n+1}}, \quad \dots \quad (15)$$

Изъ рядовъ равенствъ (14) и (15), принявъ во вниманіе, что, на основаніи начала *C*:

$$fB_A = fA_B,$$

мы получимъ слѣдующія выраженія численныхъ отношеній между величинами однородныхъ силъ, приложенныхъ къ тѣламъ *B* и *A*:

$$\left. \begin{aligned} \frac{F_{nB}}{F_{1A}} &= \frac{\ddot{v}_n(\dot{v}_{BA})}{\ddot{v}_1(\dot{v}_{AB})}; \quad \frac{F_{nB}}{F_{2A}} = \frac{\ddot{v}_n(\dot{v}_{BA})}{\ddot{v}_2(\dot{v}_{AB})}; \dots\dots\dots \\ \frac{F_{(n+1)B}}{F_{1A}} &= \frac{\ddot{v}_{(n+1)}(\dot{v}_{BA})}{\ddot{v}_1(\dot{v}_{AB})}; \quad \frac{F_{(n+1)B}}{F_{2A}} = \frac{\ddot{v}_{(n+1)}(\dot{v}_{BA})}{\ddot{v}_2(\dot{v}_{AB})}; \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots \end{aligned} \right\} \dots (16)$$

Отсюда видно, что численное отношеніе между величинами двухъ однородныхъ силъ, одна изъ которыхъ приложена къ тѣлу *B*, а другая къ тѣлу *A*, получается чрезъ умноженіе численнаго отношенія между величинами ускореній, сообщаемыхъ этими силами, на постоянную для этой пары тѣлъ дробь:

$$\frac{\dot{v}_{BA}}{\dot{v}_{AB}}, \dots\dots\dots (17)$$

которая представляетъ отношеніе между ускореніями, сообщаемыми тѣламъ *A* и *B* силами взаимодѣйствія между ними, однородными и противоположными, а потому и равными между собою.

§ 5. Равныя однородныя силы и силы, сообщающія равныя ускоренія различнымъ тѣламъ.

Двѣ однородныя силы, приложенныя къ одному и тому же тѣлу, имѣютъ равныя величины, если равны ускоренія, сообщаемыя ими этому тѣлу.

Двѣ же однородныя силы, приложенныя къ разнымъ тѣламъ и сообщающія имъ одинаковыя ускоренія, вообще говоря, не равны между собою; изъ равенствъ (16) видно, что отношеніе между величинами *G_B* и *G_A* силъ, сообщающихъ тѣламъ *B* и *A* ускореніе \dot{v} , равно дроби (17).

$$\frac{G_B}{G_A} = \frac{\dot{v}_{BA}}{\dot{v}_{AB}}. \dots\dots\dots (18)$$

Для того, чтобы величина Φ_B однородной силы, приложенной къ тѣлу *B* и сообщающей ему ускореніе \dot{V}_B , равнялась величинѣ Φ_A однородной силы, приложенной къ тѣлу *A* и сообщающей ему уско-

реліе \dot{V}_A , необходимо, чтобы величина Φ_B была во столько разъ болѣе величины \dot{f}_{AB} , во сколько разъ Φ_A болѣе \dot{f}_{BA} ; для этого ускоренія \dot{V}_A и \dot{V}_B должны удовлетворять слѣдующему равенству:

$$\frac{\dot{V}_B}{\dot{f}_{AB}} = \frac{\dot{V}_A}{\dot{f}_{BA}},$$

которое можно представить такъ:

$$\frac{\dot{V}_A}{\dot{V}_B} = \frac{\dot{f}_{BA}}{\dot{f}_{AB}} \dots \dots \dots (19)$$

Слѣдовательно: *два силы, одна изъ которыхъ однородно-приложена къ тѣлу A, а другая къ тѣлу B, имѣютъ равныя величины, если отношеніе между ускореніями, сообщаемыми ими тѣламъ A и B, равняется дроби (17).*

Кромѣ того замѣтимъ, что дробь (17), которую мы означимъ черезъ $\mu(BA)$, можетъ быть представлена: 1) какъ отношеніе между ускореніями, сообщаемыми тѣламъ A и B какими-либо равными между собою однородными силами, приложенными къ этимъ тѣламъ, 2) какъ отношеніе между величинами однородныхъ силъ, приложенныхъ къ тѣламъ B и A и сообщающихъ имъ равныя ускоренія.

$$\mu(BA)^* = \frac{\dot{f}_{BA}}{\dot{f}_{AB}} = \frac{\dot{V}_A}{\dot{V}_B} = \frac{G_B}{G_A} \dots \dots \dots (20)$$

§ 6. Величина силы однородно-приложенной къ тѣлу, равна суммѣ величинъ однородныхъ силъ, приложенныхъ ко всѣмъ частямъ тѣла.

Пусть имѣемъ нѣкоторое тѣло K.

Положимъ, что для сообщенія ему ускоренія \dot{v} надо приложить къ нему однородную силу, имѣющую величину G_K .

*) Порядокъ размѣщенія буквъ B и A въ символъ $\mu(BA)$ слѣдующій: сначала поставленъ знакъ того тѣла, ускореніе котораго находится въ знаменателѣ; здѣсь это — тѣло B, ускореніе котораго: \dot{f}_{AB} или \dot{V}_B .

Если отдѣлимъ отъ тѣла нѣкоторую часть a , то, для сообщенія этой части ускоренія той же величины \dot{v} , надо будетъ однородно приложить къ ней силу, имѣющую величину G_a , меньшую G_K .

Раздѣлимъ тѣло K на части: a, b, c, \dots, h и опредѣлимъ величины $G_a, G_b, G_c, \dots, G_h$ однородныхъ силъ, сообщающихъ этимъ частямъ ускореніе той же величины \dot{v} .

Естественно допустить, что когда всѣ части a, b, c, \dots, h собраны вмѣстѣ, образуя тѣло K , которое подвержено силѣ G_K , сообщаемой ему ускореніе \dot{v} , то тогда къ части a однородно приложена по тому же направленію сила G_a , къ части b —сила G_b , къ части c —сила G_c, \dots къ части h —сила G_h и что величина силы G_K равняется суммѣ величинъ силъ, приложенныхъ къ частямъ a, b, c, \dots, h .

Какъ ни естественно это допущеніе, но оно не вытекаетъ изъ приведенныхъ выше началъ и опредѣленій; а потому мы должны поставить себѣ на видъ, что, дѣлая его, мы вводимъ слѣдующее начало:

Основное начало D. Величина однородной силы, сообщаемой тѣлу какое-либо ускореніе, равняется суммѣ величинъ однородныхъ силъ того же направленія, сообщающихъ то же самое ускореніе частямъ тѣла, взятымъ въ отдѣльности.

На основаніи этого начала:

$$G_K = G_a + G_b + G_c + \dots + G_h, \dots \quad (21)$$

гдѣ $G_K, G_a, G_b, G_c, \dots, G_h$ суть величины однородныхъ силъ одного и того же направленія, сообщающихъ тѣлу K и частямъ его: a, b, c, \dots, h , взятымъ въ отдѣльности, ускореніе \dot{v} .

Изъ этого слѣдуетъ, что:

$$\mu(KA) = \mu(aA) + \mu(bA) + \mu(cA) + \dots + \mu(hA), \dots \quad (22)$$

потому что

$$\mu(KA) = \frac{G_K}{G_A}; \quad \mu(aA) = \frac{G_a}{G_A}; \quad \dots; \quad \mu(hA) = \frac{G_h}{G_A},$$

гдѣ G_A есть величина однородной силы, сообщаемой тѣлу A ускореніе \dot{v} .

§ 7 Масса тѣла.

Если для двухъ какихъ-либо тѣлъ A и B отношеніе $\mu(BA)$ не равно единицѣ, то это означаетъ, что способность этихъ тѣлъ къ воспринятію дѣйствія однородныхъ силъ неодинакова; равныя силы сообщаютъ имъ не равныя ускоренія и для сообщенія имъ равныхъ ускореній должно приложить къ нимъ неодинаковыя силы.

Съ другой стороны мы знаемъ, что матерьяльное тѣло, находящееся въ поступательномъ движеніи, имѣетъ, по свойству инерціи, *стремленіе* сохранять величину и направленіе своей скорости абсолютнаго движенія; такое стремленіе мы будемъ называть *инертностью* тѣла.

Инертность тѣла есть свойство противоположное способности его воспринимать дѣйствіе однородныхъ силъ: чѣмъ больше инертность тѣла, тѣмъ меньше вышеупомянутая способность, и обратно.

Слѣдовательно, инертность двухъ тѣлъ A и B неодинакова, если $\mu(BA)$ не равно единицѣ; большею инертностью обладаетъ то изъ этихъ двухъ тѣлъ, которое получаетъ меньшее ускореніе при той же величинѣ приложенной силы и которое требуетъ большей силы для сообщенія ему ускоренія, одинаковаго съ другимъ тѣломъ.

Поэтому, отношеніе между величинами инертностей тѣлъ B и A полагаютъ равнымъ дроби $\mu(BA)$, то есть равнымъ отношенію величинъ G_B и G_A однородныхъ силъ, сообщаемыхъ равныя ускоренія этимъ тѣламъ, или отношенію величинъ \dot{V}_A и \dot{V}_B ускореній, сообщаемыхъ тѣламъ A и B однородными силами, равными между собою.

Чѣмъ больше инертность тѣла, тѣмъ больше въ немъ того, что обладаетъ свойствомъ инерціи, то есть матеріи; поэтому, по величинѣ инертности тѣла судятъ о количествѣ заключающейся въ немъ матеріи, полагая, что $\mu(BA)$ есть отношеніе количества матеріи тѣла B къ количеству матеріи тѣла A .

Количество матеріи тѣла называется *массою* его.

ОПРЕДѢЛЕНІЕ С. ОТНОШЕНІЕ МАССЪ ДВУХЪ ТѢЛЪ ОБРАТНО ПРОПОРЦІОНАЛЬНО ОТНОШЕНІЮ УСКОРЕНІЙ, СООБЩАЕМЫХЪ ЭТИМЪ ТѢЛАМЪ ОДНОРОДНЫМИ И ПРЯМОПРОТИВОПОЛОЖНЫМИ СИЛАМИ ВЗАИМОДѢЙСТВІЯ МЕЖДУ НИМИ, ИЛИ ВОООЩЕ КАКИМИ БЫ ТО НИ БЫЛО РАВНЫМИ МЕЖДУ СОБОЮ СИЛАМИ, ОДНОРОДНО-ПРИЛОЖЕННЫМИ КЪ ЭТИМЪ ТѢЛАМЪ.

Вмѣстѣ съ тѣмъ отношеніе массъ двухъ тѣлъ равно отношенію величинъ однородныхъ силъ, сообщающихъ равныя ускоренія этимъ тѢЛАМЪ.

$$\frac{m_B}{m_A} = \mu(BA) = \frac{\dot{V}_A}{\dot{V}_B} = \frac{G_B}{G_A}, \dots \dots \dots (23)$$

гдѣ m_B и m_A означаютъ массы тѣлъ B и A .

Означимъ черезъ $m_K, m_a, m_b, m_c, \dots m_h$ массы тѣла K и частей его: $a, b, c, \dots h$; на основаніи послѣдняго опредѣленія, равенство (22) можетъ быть представлено подъ слѣдующимъ видомъ:

$$\frac{m_K}{m_A} = \frac{m_a}{m_A} + \frac{m_b}{m_A} + \frac{m_c}{m_A} + \dots + \frac{m_h}{m_A}$$

и отсюда слѣдуетъ:

$$m_K = m_a + m_b + m_c + \dots + m_h, \dots \dots \dots (24)$$

то есть: масса тѣла равна суммѣ массъ всѣхъ частей его; это даетъ намъ право говорить, что масса тѣла, понятіе о которой составляется, на основаніи опредѣленія с, по величинѣ инертности тѣла, есть количество матеріи, заключающейся въ тѣлѣ.

Послѣ сказаннаго въ послѣднихъ параграфахъ, численное отношеніе между величинами F_B и F_A однородныхъ силъ, приложенныхъ къ тѢЛАМЪ B и A и сообщающихъ имъ ускоренія \dot{v}_B и \dot{v}_A , выразится такъ:

$$\frac{F_B}{F_A} = \frac{m_B \dot{v}_B}{m_A \dot{v}_A}, \dots \dots \dots (25)$$

то есть: численное отношеніе между величинами двухъ однородныхъ силъ, одна изъ которыхъ приложена къ тѣлу B , а

другая къ тѣлу A , получается чрезъ умноженіе численнаго отношенія между величинами ускореній, сообщаемыхъ этими силами, на численное отношеніе массы тѣла.

§ 8. Единица массы. Единица величины силы.

Изъ формулы (25) видно, что для измѣренія величины силъ надо измѣрять ускоренія и массы.

Измѣреніе массы какого либо тѣла имѣетъ цѣлью опредѣлить, въ какомъ численномъ отношеніи находится масса тѣла къ единицѣ массы.

Въ научныхъ изслѣдованіяхъ чаще всего употребляются французскія единицы массы: килограммъ, граммъ, миллиграммъ. Килограммъ есть масса, равная массѣ платинового цилиндра, хранящагося въ государственномъ архивѣ Франціи и извѣстнаго подъ именемъ: *le kilogramme prototype en platine des Archives*; при изготовленіи его имѣлось въ виду сдѣлать массу его равною массѣ кубическаго дециметра чистой воды, имѣющей температуру 4° Цельсія и находящейся подъ нормальнымъ *) атмосфернымъ давленіемъ; но, по наблюденіямъ Куифера и изслѣдованіямъ W. H. Miller'a, масса кубическаго дециметра воды при вышесказанныхъ температурѣ и давленіи равна 1000013 миллиграммовъ, то есть на 13 миллиграммовъ болѣе массы килограмма.

Русскій фунтъ есть масса 25,01893 кубическихъ дюймовъ воды, имѣющей температуру $13,5^{\circ}$ Реомюра; русскій фунтъ = 409,497 граммовъ и килограммъ = 2,442022 фунта.

Англійскій new **) standard pound, заключающій 7000 грановъ = 453,59265 граммовъ и килограммъ = 2,2046212 n. st. pound = 15432,34874 грановъ.

Измѣреніе массъ дѣлается при помощи приборовъ, назначеніе которыхъ состоитъ въ томъ, чтобы убѣдиться въ равенствѣ массъ

*) Подъ нормальнымъ атмосфернымъ давленіемъ подразумѣвается здѣсь давленіе, производимое атмосферою на широтѣ Парижа и на уровнѣ моря, когда барометръ стоитъ на 760 миллиметрахъ ртутнаго столба, приведеннаго въ 0° Цельсія.

**) Съ 1855 года.

двухъ тѣлъ по равенству величинъ силъ тяжести, приложенныхъ къ этимъ тѣламъ; употребительнѣйшій и точнѣйшій приборъ этого рода — рычажные равноплечные вѣсы.

Слѣдуетъ замѣтить, что теорія всѣхъ такихъ приборовъ основывается, между прочимъ, на началѣ равенства и противоположности силъ взаимодѣйствія между малѣйшими частицами тѣлъ.

Кромѣ вѣсовъ надо имѣть еще и разновѣсы, изъ гирь котораго можно составить массу какой угодно величины, заключающейся въ предѣлахъ прочности и чувствительности вѣсовъ.

Самое измѣреніе данной массы заключается въ опредѣленіи суммы массъ гирь, уравнивающихъ эту массу на вѣсахъ.

Такимъ образомъ мы опредѣляемъ численное отношеніе между данною массою m и единицею массы; поэтому m выражается именовавшимся числомъ, наприимѣръ:

масса кубическ. сантиметра ртути, имѣющей температуру 0° по Цельзію =

$$13,59618.(\text{грамм.})=0,01359618 \text{ (килогр.)};$$

$$\text{масса земли}=6,14.10^{27}.(\text{грамм.})=6,14.10^{24}.(\text{килогр.})$$

За единицу величинъ силъ принимается величина силы, однородно-приложенной къ тѣлу, масса котораго равна единицѣ массы, и сообщаемой ему ускореніе, равное единицѣ ускореній.

Положивъ въ равенствѣ (25): $m_A = (\text{ед. масс.})$, $\dot{v}_A = (\text{ед. ускор.})$, мы получимъ:

$$\frac{F_B}{(\text{ед. силъ})} = \frac{m_B}{(\text{ед. массъ})} \frac{\dot{v}_B}{(\text{ед. ускорен.})}, \dots\dots\dots (26)$$

то есть: отвлеченное число, показывающее, во сколько разъ величина силы, однородно-приложенной къ тѣлу B и сообщаемой ему ускореніе \dot{v}_B , болѣе единицы силы, равняется произведенію двухъ другихъ отвлеченныхъ чиселъ, одно изъ которыхъ выражаетъ отношеніе между массою тѣла и единицею массы, а другое есть отношеніе ускоренія \dot{v}_B къ единицѣ ускоренія.

Если же мы примемъ, что единица силы равна произведенію изъ единицы массы на единицу ускоренія:

$$(\text{ед. силы}) = (\text{ед. массы}) \cdot (\text{ед. ускорен.}), \dots\dots\dots (27)$$

то тогда, вѣсто равенства (26), будемъ имѣть слѣдующее равенство:

$$F_B = m_B \dot{v}_B, \dots\dots\dots (28)$$

которое имѣетъ тотъ же самый смыслъ, что и равенство (26), но выражаетъ величину силы именованнымъ числомъ въ величинѣ единицы силы.

Единица силы, или, вѣрнѣе, единица величинъ силъ, есть единица сложная, величина которой опредѣляется величинами единицъ длины, времени и массы; символъ ея величины—слѣдующій:

$$(\text{ед. силы}) = \frac{(\text{ед. массы}) (\text{ед. длины})}{(\text{ед. времени})^2} \dots\dots\dots (29)$$

По предложенію образовавшейся при Британскомъ Обществѣ поощренія наукъ особой комиссіи для выбора и наименованія единицъ величинъ, встрѣчающихся въ математической физикѣ *), принята система сложныхъ единицъ, основанная на слѣдующихъ простыхъ единицахъ:

величина единицы длины: сантиметръ,
величина единицы времени: секунда средняго времени,
величина единицы массы: граммъ.

Единицу силы, основанную на этихъ единицахъ длины, времени и массы, предложено называть: динаму (отъ греческаго слова: δύναμις), или, сокращенно: дине; мы будемъ называть ее диною.

Дина есть величина силы, которая, будучи однородно приложена къ покоящемуся грамму, заставляетъ каждую точку его пройти 0,5 сантиметра въ первую секунду.

$$\text{Дина} = \frac{(\text{граммъ}) \cdot (\text{сантиметръ})}{(\text{секунда})^2} \dots\dots\dots (30)$$

*) Committee for the Selection and Nomenclature of Dynamical and Electrical Units; эта комиссія образовалась въ 1874 году изъ слѣдующихъ лицъ: W. Thomson, Profess. Foster, J. C. Maxwell, G. J. Stoney, Fleeming Jenkin, Dr. Siemens, Mr. F. Bramwell, Profess. Everett.

Въ житейской практикѣ выражаютъ величины силъ въ кило-
граммахъ, пудахъ, фунтахъ и проч., причемъ подъ этими име-
нами понимаютъ вѣса этихъ массъ; конечно, выражаясь такимъ
образомъ, не даютъ точнаго понятія о величинѣ силъ, такъ какъ
вѣсъ одной и той же массы различенъ въ разныхъ мѣстахъ земли;
такъ, вѣсъ одного килограмма подъ широтою λ и на высотѣ h
сантиметровъ надъ уровнемъ океана равенъ:

$$1000 \cdot (\text{граммъ}) \cdot g^* = \\ = (980,6056 - 2,5028 \cos 2\lambda - 0,000003h) \cdot 1000 \cdot (\text{динам.})$$

Дина есть сила довольно малой величины (такъ что, напр., вѣсъ
одного килограмма на экваторѣ равняется 980605 динамъ слишкомъ),
поэтому комиссія предложила употребленіе придаточныхъ словъ:

при $\lambda = 60^\circ$ (широта С.-Петербурга)
при $h = 0$
кг = 981,857 динам.

	deca	hecto	kilo	mega	
для обозначенія:	10	100	1000	1000000	единицъ;

напримѣръ, килодина и мегадина суть тысяча и миллионъ динъ;
вѣсъ килограмма на экваторѣ почти равенъ одной мегадинѣ.

Для выраженія долей единицы:

0,1	0,01	0,001	0,000001
-----	------	-------	----------

предложены термины:

deci	centi	milli	micro.
------	-------	-------	--------

Вѣсъ русскаго фунта въ С.-Петербургѣ (гдѣ $g = 981,85$):

$$4,02 \cdot 10^5 \text{ (дин.)}.$$

Вѣсъ англійскаго новаго фунта (полагая $g = 981 \frac{\text{сант.}}{(\text{сек.})^2}$):

$$4,45 \cdot 10^5 \text{ (дин.)}.$$

§ 9. Средняя плотность тѣла. Плотность вещества въ какой-либо точкѣ тѣла.

Величина отношенія между массою тѣла и величиною его объема
называется *среднею плотностью тѣла*.

*) Величина g приведена на стр. 236 кинематич. части, въ выноскѣ.

Величина единицы плотности выражается слѣдующимъ символомъ:

$$(\text{единица плотности}) = \frac{(\text{ед. массы})}{(\text{ед. длины})^3}.$$

Средняя плотность тѣла равна единицѣ плотности, если масса его во столько разъ болѣе единицы массы, во сколько разъ объемъ его болѣе единицы объема.

Если всякая, даже самая мельчайшая, часть тѣла имѣетъ ту же самую среднюю плотность, какъ и цѣлое тѣло, то такое тѣло называется *тѣломъ однородной плотности*; величину средней плотности такого тѣла называютъ *плотностью* его.

$$\text{Плотность воды при } 4^{\circ}\text{C} = 1,000013 \frac{(\text{граммъ.})}{(\text{сантиметр.})^3}.$$

Когда плотность σ однороднаго вещества извѣстна, то масса объема V этого вещества опредѣлится чрезъ умноженіе V на σ .

Для вещества неоднородной плотности, средняя плотность части тѣла будетъ имѣть различную величину, смотря по величинѣ взятой части.

Положимъ, что мы беремъ все болѣе и болѣе уменьшающіяся части тѣла, заключающія въ себѣ одну и ту же точку его: m ; пусть Δm есть масса, ΔO — объемъ нѣкоторой такой части.

По мѣрѣ уменьшенія Δm , средняя плотность:

$$\frac{\Delta m}{\Delta O}$$

приближается къ нѣкоторому предѣлу, который называется *плотностью вещества въ точкѣ m* .

Слѣдовательно, *плотность матеріи въ точкѣ m тѣла есть средняя плотность безконечно малаго объема dO , заключающаго точку m внутри себя или на своей поверхности*:

$$\sigma = \frac{dm}{dO}, \dots \dots \dots (31)$$

гдѣ dm есть масса объема dO , а σ плотность матеріи въ точкѣ m . Для тѣла неоднородной плотности σ есть функція координатъ точки m .

Масса всего тѣла выразится интеграломъ:

$$M = \int \int \int \sigma dO,$$

взятымъ по всему объему тѣла.

§ 10. Количество движенія тѣла, движущагося поступательно.

Произведеніе изъ скорости тѣла, движущагося поступательно, на его массу, называется *количествомъ движенія* (Quantitas motus. Quantité de mouvement. Bewegungsgrösse. The momentum) этого тѣла; оно измѣряется слѣдующею единицею:

$$(\text{единица колич. движ.}) = \frac{(\text{ед. массы}) (\text{ед. длины})}{(\text{ед. времени})}.$$

Подобно однородной силѣ, количество движенія можетъ быть изображено длиною, отложенною отъ какой-либо точки тѣла по направленію скорости; эта длина должна быть во столько разъ болѣе единицы длины, во сколько разъ количество движенія тѣла болѣе единицы количества движенія.

Подъ *измѣненіемъ количества движенія* тѣла въ теченіе промежутка времени отъ момента t до другого момента t_1 мы будемъ подразумѣвать геометрическую разность между количествами движенія mv_1 и mv тѣла въ моменты t_1 и t , то есть такое количество движенія, которое нужно геометрически сложить съ mv для того, чтобы получить mv_1 .

Тогда формулѣ (28) можно дать слѣдующее толкованіе:

Величина силы, однородно-приложенной къ тѣлу, движущемуся поступательно, измѣряется отношеніемъ измѣненія количества движенія тѣла въ теченіе безконечно-малаго промежутка времени къ величинѣ самаго промежутка.

§ 11. Основные принципы въ томъ видѣ, въ какомъ они приведены Ньютономъ.

Честь открытія начала инерціи и начала параллелограмма силъ въ примѣненіи къ движенію, производимому силами, приписываютъ Галилею

(1564—1642), который высказал эти начала и приложил их къ объясненію движенія брошенных тяжелыхъ тѣлъ въ своемъ сочиненіи *Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze*, изданномъ впервые въ Лейденѣ въ 1638 году.

Повидимому, можетъ показаться страннымъ, что начало инерціи было открыто сравнительно недавно, между тѣмъ, какъ дошедшія до насъ сочиненія Архимеда *), относящіяся къ ученію о равновѣсіи силъ, свидѣтельствуютъ о высокомъ состояніи статики еще у древнихъ; такая отсталость ученія о движущемъ дѣйствіи силъ объясняется долгимъ преобладаніемъ философіи Аристотеля, по ученію котораго самое совершенное и начальное движеніе есть круговое.

Изложеніе основаныхъ началъ механики въ томъ видѣ, въ какомъ они прижилиются и до сихъ поръ, было сдѣлано Исаакомъ Ньютономъ (1642—1727) въ его книгѣ: *Philosophiæ naturalis principia mathematica*, изданной въ первый разъ въ 1687 году, то есть 49 лѣтъ спустя послѣ перваго изданія *Discorsi*. Ньютонъ высказываетъ основныя начала въ видѣ трехъ „законовъ движенія“ (*Axiomata, sive Leges Motus*), но предпосылаетъ имъ нѣсколько опредѣленій (*Definitiones*) и кромѣ того присоединяетъ къ нимъ примѣчанія (*Corollaria*). Мы приведемъ здѣсь эти „законы движенія“ и нѣкоторыя изъ опредѣленій въ томъ видѣ, какъ они помѣщены въ *Principia*, но въ иномъ порядкѣ.

Въ первомъ опредѣленіи Ньютонъ даетъ понятіе о количествѣ матеріи тѣла, какъ о произведеніи плотности тѣла на его объемъ; второе опредѣленіе слѣдующее:

Definitio II. Quantitas motus est mensura ejusdem orta ex velocitate et quantitate materiae conjunctim.

(Количество движенія измѣряется совокупно скоростью и количествомъ матеріи).

Начало инерціи выражается первымъ изъ „законовъ движенія“ совокупно съ опредѣленіемъ III-мъ.

Lex. I. Corpus omne perseverare in statu suo quiescendi vel movendi

*) Архимедъ жилъ въ III вѣкѣ до Р. X. (родился вѣроятно около 287 г., умеръ въ 212 г. до Р. X.); изъ сочиненій его до насъ дошли слѣдующія.

1) Объ опредѣленіи центровъ инерціи тѣлъ разнаго вѣда: *Ἐκ πένων ἰσορροπῆς καὶ τῆς κέντρος βαρύν ἐν πένων*.

2) Теорія рычага. *de Aequiponderantibus*.

3) Гиростатика: *de iis quae vehuntur in aqua*, восстановленное *Commentum* въ 1565 г.

uniformiter in directum, nisi quatenus illud a viribus impressis cogitur statum suum mutare.

акт
материи

(Каждое тѣло пребываетъ въ своемъ состояніи покоя или равномернаго прямолинейнаго движенія, если дѣйствующія на него силы не принуждаютъ его измѣнить такое состояніе).

Въ опредѣленіи III-мъ говорится, что тѣло, предоставленное себѣ, имѣетъ стремленіе къ сохраненію своего состоянія покоя или равномернаго прямолинейнаго движенія вслѣдствіе свойства присущаго матеріи и называемаго: *inertia materiae*.

Силѣ дается слѣдующее опредѣленіе:

Definitio IV. *Vis impressa est actio in corpus exercita, ad mutandum ejus statum vel quiescendi vel movendi uniformiter in directum.*

(Приложенная сила есть производимое на тѣло принужденіе къ измѣненію его состоянія покоя или равномернаго прямолинейнаго движенія).

Второй „законъ движенія“ говоритъ о величинѣ дѣйствія, производимаго силою, причемъ предполагается, что представленія о величинѣ силы и о направленіи ея понятны сами по себѣ; „законъ“ этотъ выраженъ въ очень сжатой формѣ:

Lex. II. *Mutationem motus proportionalem esse vi motrici impressae, et fieri secundum lineam rectam qua vis illa imprimitur.*

(Измѣненіе движенія пропорціонально приложенной движущей силѣ и происходитъ по той прямой линіи, по которой дѣйствуетъ сила).

Эту фразу слѣдуетъ понимать такъ:

Измѣненіе количества движенія (см. § 10) пропорціонально величинѣ приложенной движущей силы и направлено вдоль по ней.

Начало параллелограмма силъ высказано въ слѣдующемъ примѣчаніи:

акт

материи

2.

Corollarium I. *Corpus viribus conjunctis diagonalem parallelogrammi eodem tempore describere, quo latera separatis.*

(При совокупномъ дѣйствіи двухъ силъ тѣло описываетъ діагональ параллелограмма въ теченіе того же времени, какъ и стороны параллелограмма при дѣйствіи силъ порознь).

Третій „законъ“—слѣдующій:

акт

материи

2.

Lex. III. *Actioni contrariam semper et aequalem esse reactionem: sive corporum duorum actiones in se mutuo semper esse aequales et in partes contrarias dirigi.*

(Всякому дѣйствію соотвѣтствуетъ противодѣйствіе, равное и противоположное; то есть дѣйствія двухъ тѣлъ одно на другое всегда равны и направлены противоположно).

§ 12. Говоря о материальномъ тѣлѣ, подверженномъ дѣйствию однородно-приложенныхъ къ нему силъ и находящемся, либо въ абсолютномъ поступательномъ движеніи, либо въ абсолютномъ покоѣ, мы не имѣли надобности упоминать ни о формѣ тѣла, ни объ его размѣрахъ, ни о плотности вещества его; въ разсужденіяхъ, приведенныхъ въ §§ 1—9, говорилось только о движеніи и ускореніи которой-либо изъ точекъ тѣла и объ его массѣ.

Распредѣленіе массы вокругъ той точки поступательно-движущагося тѣла, на движеніе которой мы обращаемъ вниманіе, можетъ быть какое угодно; мы можемъ даже вообразить себѣ, что вся масса тѣла сосредоточена въ этой точкѣ.

Масса, сосредоточенная въ одной геометрической точкѣ, есть воображаемый предметъ, извѣстный подъ именемъ *материальной точки* и имѣющій существенное значеніе въ аналитической механикѣ, какъ будетъ объяснено въ концѣ слѣдующей главы.

ГЛАВА II.

Основныя начала механики свободныхъ материальныхъ точекъ.

§ 13. Материальная точка.

Материальная точка есть масса, которую мы воображаемъ себѣ сосредоточенною въ одной геометрической подвижной точкѣ.

Материальная точка вполне свободна, если она можетъ имѣть какую угодно скорость по какому угодно направленію и притомъ скорость ея не зависитъ отъ скоростей какихъ-либо другихъ материальныхъ точекъ.

§ 14. Основныя начала въ примѣненіи къ свободной материальной точкѣ.

Основныя начала, изложенныя въ предыдущей главѣ, примѣняются къ материальной точкѣ въ слѣдующемъ видѣ:

Основное начало 1-е. Всякая матерьяльная точка, по свойству инерции материи, стремится сохранить ту абсолютную скорость, которую она имѣетъ.
(Начало инерціи матерьяльной точки)

Пока на нее не дѣйствуютъ никакія силы, она дѣйствительно сохраняетъ свою абсолютную скорость; если послѣдняя равна нулю, то точка остается въ абсолютномъ покоѣ; если эта скорость не равна нулю, то точка совершаетъ абсолютное движеніе по прямой линіи равномерно.

Каждой силѣ, дѣйствующей на матерьяльную точку, мы приписываемъ:

- а) *мѣсто приложенія*, которое есть сама матерьяльная точка,
 - б) *направленіе*,
 - в) *величину*, измѣряемую въ единицахъ силы (см. § 8, (29));
- представленіе о силѣ приложенной къ матерьяльной точкѣ составляется изъ совокупности этихъ трехъ понятій.

Основное начало 2-е. Ускореніе, сообщаемое свободной матерьяльной точкѣ силою, приложенною къ ней, имѣетъ направленіе этой силы и равно величинѣ силы, дѣленной на массу матерьяльной точки.

Основное начало 3-е. Ускореніе, сообщаемое свободной матерьяльной точкѣ нѣсколькими одновременно приложенными къ ней силами, есть геометрическая сумма, составленная изъ тѣхъ самыхъ ускореній, которыя сообщаютъ эти силы, приложенныя къ матерьяльной точкѣ порознь.

(Начало параллелограмма силъ)

Эти три начала необходимы и достаточны для того, чтобы, основываясь на нихъ, изложить механику свободныхъ матерьяльныхъ точекъ; первое начало опредѣляетъ свойство, которое мы приписываемъ матерьяльной точкѣ; два послѣднія начала опредѣляютъ дѣйствіе, производимое на матерьяльную точку силами, приложенными къ ней.

§ 15. Цѣль введенія понятія о матеріальной точкѣ въ механику.

Въ концѣ предыдущей главы было высказано, что, рассматривая движеніе матеріальной точки, мы смотримъ на нее, какъ на представителницу поступательнаго движенія нѣкотораго тѣла, масса котораго, равная массѣ матеріальной точки, распредѣлена какимъ бы то ни было образомъ вокругъ той точки, движеніе которой мы рассматриваемъ; при этомъ силы, которыя мы предполагаемъ приложенными къ матеріальной точкѣ, должны быть приложены къ тѣлу однородно.

Понятно, что только для этого не стоило бы вводить въ механику понятіе о матеріальной точкѣ, если бы не имѣлось въ виду дать ей болѣе обширной и существенной роли.

Наиболѣе важныя слѣдствія проистекаютъ изъ того обстоятельства, что матеріальная точка, подобно геометрической, не имѣетъ размѣровъ.

Поэтому, говоря о матеріальной точкѣ, мы избегаемъ необходимости входить въ какія-либо разсужденія относительно вращательнаго движенія массы, сосредоточенной въ точкѣ; мы даже не можемъ говорить о вращательномъ движеніи точки, то есть того, что не имѣетъ размѣровъ.

По той же причинѣ терминъ: «однородно-приложенная сила» теряетъ значеніе, если рѣчь идетъ о силѣ, приложенной къ матеріальной точкѣ.

Назначеніе матеріальной точки въ механикѣ состоитъ въ томъ, чтобы замѣнять собою такія тѣла или части тѣла, размѣрами которыхъ мы пренебрегаемъ сравнительно съ длинами, рассматриваемыми въ вопросѣ.

Такъ, напримѣръ, въ тѣхъ вопросахъ, въ которыхъ тѣла рассматриваются какъ собранія частицъ и въ которыхъ нѣтъ надобности принимать въ расчетъ форму и размѣры частицъ, каждую частицу мы воображаемъ себѣ замѣненною матеріальною точкою, масса которой равна массѣ частицы.

Точно также, въ тѣхъ вопросахъ небесной механики, въ которыхъ нѣтъ надобности принимать въ расчетъ вращательныхъ

движеній свѣтилъ вокругъ ихъ осей и можно пренебречь размѣрами тѣлъ по отношенію ко взаимнымъ разстояніямъ между ними, каждое свѣтило замѣняется матерьяльною точкою, масса которой равна массѣ свѣтила.

Мы увидимъ далѣе, что даже тогда, когда матерьяльныя тѣла принимаются сплошными, намъ приходится, для рѣшенія какихъ-либо кинетическихъ вопросовъ относительно этихъ тѣлъ, или замѣнять каждое тѣло нѣкоторою системою матерьяльныхъ точекъ, или основываться въ нашихъ разсужденіяхъ на результатахъ, полученныхъ изъ механики системы матерьяльныхъ точекъ.

По этимъ причинамъ мы прежде всего должны изложить механику матерьяльныхъ точекъ и системъ матерьяльныхъ точекъ, что и составляетъ содержаніе этой книги.

ГЛАВА III.

Механика свободной матерьяльной точки.

§ 16. Равнодѣйствующая нѣсколькихъ силъ, одновременно-приложенныхъ къ матерьяльной точкѣ. Силы, взаимно уравновѣшивающіяся.

Механика свободной матерьяльной точки основывается на трехъ основныхъ началахъ, выраженныхъ въ § 14-мъ предыдущей главы.

Все, сказанное въ § 3 первой главы относительно однородныхъ силъ, одновременно-приложенныхъ къ одному и тому же матерьяльному тѣлу, примѣняется къ силамъ, одновременно-приложеннымъ къ одной матерьяльной точкѣ.

Равнодѣйствующею нѣсколькихъ силъ, одновременно-приложенныхъ къ матерьяльной точкѣ, называется такая сила, которая одна сообщаетъ точкѣ то же самое ускореніе (той же величины и того же направленія), какое сообщаютъ ей одновременно-приложенныя силы всѣ вѣдѣтъ.

Силы, одновременно-приложенныя къ одной матерьяльной точкѣ, называются *составляющими* силами.

Если ускореніе, сообщаемое матерьяльной точкѣ нѣсколькими одновременно-приложенными къ ней силами, равно нулю, то приложенныя силы называютъ *взаимно-уравновѣшивающимися*, или *силами находящимися въ равновѣсіи*.

Если силы, приложенныя къ матерьяльной точкѣ, находятся въ равновѣсіи въ теченіе конечнаго промежутка времени, то, въ теченіи этого промежутка, матерьяльная точка будетъ находиться въ покоѣ, или въ равномерномъ прямолинейномъ движеніи по инерціи.

Каждую силу, приложенную къ матерьяльной точкѣ, можно изобразить длиною, отложенною по направленію силы отъ точки приложенія ея и заключающею столько единицъ длины, сколько въ изображаемой силѣ заключается единицъ силы.

Длины, изображающія различныя силы, прилагаемыя къ одной и той же матерьяльной точкѣ, будутъ пропорціональны длинамъ, изображающимъ ускоренія, сообщаемыя этими силами этой точкѣ.

Длина, изображающая равнодѣйствующую нѣсколькихъ составляющихъ силъ, будетъ имѣть величину и направленіе геометрической суммы длинъ, изображающихъ составляющія силы.

Пусть F означаетъ величину какой-либо силы, приложенной къ нѣкоторой матерьяльной точкѣ; углы, составляемые направлениемъ ея съ положительными направленіями осей координатъ X, Y, Z , означимъ черезъ $(F, X), (F, Y), (F, Z)$.

Величины:

$$F \cos(F, X), F \cos(F, Y), F \cos(F, Z)$$

называются *проекціями* силы F на *оси координатъ* X, Y, Z ; онѣ изображаются проекціями на тѣ же оси длинъ, изображающей силу F .

Такъ какъ проекція на какое-либо направленіе длинъ, изображающей равнодѣйствующую силу, равняется суммѣ проекцій длинъ, изображающихъ составляющія силы, то отсюда слѣдуетъ, что *проекція на какое-либо направленіе равнодѣйствующей нѣсколькихъ*

составляющих силъ, приложенныхъ къ матеріальной точкѣ, равна суммѣ прожцій составляющихъ силъ на то же направление.

Пусть $F_1, F_2, F_3, \dots, F_k$ суть величины составляющихъ силъ, а F —величина ихъ равнодѣйствующей; прожціи ихъ на оси координатъ удовлетворяютъ слѣдующимъ равенствамъ:

$$\left. \begin{aligned} F \cos (F, X) &= F_1 \cos (F_1, X) + F_2 \cos (F_2, X) + \dots \\ &\dots + F_k \cos (F_k, X) \\ F \cos (F, Y) &= F_1 \cos (F_1, Y) + F_2 \cos (F_2, Y) + \dots \\ &\dots + F_k \cos (F_k, Y) \\ F \cos (F, Z) &= F_1 \cos (F_1, Z) + F_2 \cos (F_2, Z) + \dots \\ &\dots + F_k \cos (F_k, Z) \end{aligned} \right\}, \dots (32)$$

которыя могутъ быть замѣнены слѣдующимъ символическимъ равенствомъ:

$$\bar{F} = \bar{F}_1 + \bar{F}_2 + \dots + \bar{F}_k \dots \dots \dots (33)$$

Отсюда, напримѣръ для случая трехъ составляющихъ силъ G, H, K , не лежащихъ въ одной плоскости, слѣдуетъ:

$$F^2 = G^2 + H^2 + K^2 + 2HK \cos (H, K) + 2KG \cos (K, G) + 2GH \cos (G, H),$$

то есть, что равнодѣйствующая представляется діагональю параллелоипеда, построеннаго на сторонахъ, представляющихъ составляющія силы.

Если

$$K = 0,$$

то:

$$F = \sqrt{G^2 + 2GH \cos (G, H) + H^2};$$

равнодѣйствующая двухъ составляющихъ силъ представляется діаго-

налью параллелограмма, построеннаго на сторонахъ, изображающихъ составляющія силы.

Если G направлена по оси X , H —по оси Y , K —по оси Z , то равнодѣйствующая будетъ представляться діагональю прямоугольнаго параллелепипеда, построеннаго на этихъ составляющихъ силахъ, параллельныхъ осямъ координатъ; изъ чего слѣдуетъ, что проекціи какой-либо силы на оси прямоугольныхъ координатъ суть вѣстѣ съ тѣмъ и составляющія этой силы по этимъ осямъ.

Для косоугольныхъ прямолинейныхъ координатъ проекціи какой-либо силы на эти оси не равны составляющимъ ея по этимъ осямъ; пусть G есть составляющая силы F по оси X_1 , H —составляющая по оси Y_1 , K —составляющая по оси Z_1 ; проектируя силу F и составляющія ея на направленія осей X_1 , Y_1 , Z_1 , получимъ равенства:

$$\left. \begin{aligned} F \cos (F, X_1) &= G + H \cos (Y, X_1) + K \cos (Z, X_1) \\ F \cos (F, Y_1) &= G \cos (X, Y_1) + H + K \cos (Z, Y_1) \\ F \cos (F, Z_1) &= G \cos (X, Z_1) + H \cos (Y, Z_1) + K \end{aligned} \right\} \dots (34)$$

Для равновѣсія силъ F_1, F_2, \dots, F_p , приложенныхъ къ материальной точкѣ, необходимо, чтобы сумма проекцій этихъ силъ на всякое направленіе равнялась нулю; а для этого достаточно, чтобы равнялись нулю суммы проекцій ихъ на три какія-либо направленія, не лежащія въ одной плоскости, напримѣръ на оси координатъ.

Символически, эти условія можно изобразить равенствомъ:

$$\bar{F}_1 + \bar{F}_2 + \bar{F}_3 + \dots + \bar{F}_p = 0 \dots \dots \dots (35)$$

Примѣчаніе. Въ послѣдующихъ параграфахъ очень часто придется пользоваться формулами, заключающими выраженія проекцій силъ, приложенныхъ къ материальнымъ точкамъ, на координатныя оси различныхъ координатныхъ системъ.

По большей части приходится пользоваться ортогональными координатными системами, то есть такими, координатныя линіи которыхъ пересѣкаются взаимно-перпендикулярно; таковы: прямо-

линейная система координатъ съ прямоугольными осями, сферическая система и кругово-цилиндрическая система координатъ.

Для краткости формулъ мы условимся обозначать проеэкціи силъ на координатныя оси тѣми же буквами, которыми обозначаемъ самыя оси, но съ надлежащими значками; напримѣръ, проеэкціи силъ F_1, F_2, \dots, F_k на оси X, Y, Z мы будемъ обозначать такъ:

$$X_1, X_2, \dots, X_k$$

$$Y_1, Y_2, \dots, Y_k$$

$$Z_1, Z_2, \dots, Z_k,$$

а проеэкціи на тѣ же оси равнодѣйствующей F этихъ силъ такъ:

$$X = F \cos (F, X) = X_1 + X_2 + \dots + X_k$$

$$Y = F \cos (F, Y) = Y_1 + Y_2 + \dots + Y_k$$

$$Z = F \cos (F, Z) = Z_1 + Z_2 + \dots + Z_k.$$

Проеэкціи какой-либо силы F_k на оси X, Y, Z , неизмѣнно-связанныя съ какою-либо неизмѣняемою средою, мы будемъ обозначать такъ:

$$X_k = F_k \cos (F_k, X)$$

$$Y_k = F_k \cos (F_k, Y)$$

$$Z_k = F_k \cos (F_k, Z).$$

Проеэкціи той же силы на координатныя оси α, β, γ сферической или кругово-цилиндрической системы координатъ мы будемъ обозначать такъ:

$$A_k = F_k \cos (F_k, \alpha)$$

$$B_k = F_k \cos (F_k, \beta)$$

$$C_k = F_k \cos (F_k, \gamma).$$

Такъ какъ во всякой ортогональной системѣ три координатныя оси всякой точки взаимно-перпендикулярны, то проеція силы на эти оси суть иѣсть съ тѣмъ и составляющія ея по нимъ.

Въ косоугольной прямолинейной системѣ координатъ, также какъ и во всякой криволинейной косоугольной системѣ, подобаго равенства не существуетъ; означая черезъ X , Y , Z направленія осей прямолинейной косоугольной системы, мы будемъ тогда подъ знаками: Xk , Yk , Zk подразумѣвать *составляющія по этимъ осямъ силы Fk* .

§ 17. Дифференціальныя уравненія движенія свободной матерьяльной точки.

На основаніи приведенныхъ въ § 14 основныхъ началъ, ускореніе свободной матерьяльной точки, масса которой равна m и въ которой приложены силы: F_1 , F_2 , F_k , должно быть равно величинѣ равнодѣйствующей этихъ силъ, дѣленной на массу точки, и должно быть направлено по равнодѣйствующей; это выражается слѣдующими равенствами:

a) въ прямолинейныхъ прямоугольныхъ координатахъ:

$$\left. \begin{aligned} m \frac{d^2x}{dt^2} &= X_1 + X_2 + \dots + X_k \\ m \frac{d^2y}{dt^2} &= Y_1 + Y_2 + \dots + Y_k \\ m \frac{d^2z}{dt^2} &= Z_1 + Z_2 + \dots + Z_k \end{aligned} \right\}, \dots \dots \dots (36)$$

b) въ кругово-цилиндрическихъ координатахъ:

$$\left. \begin{aligned} m(\cos \varphi) \left(\frac{d^2\rho}{dt^2} - \rho \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 \right) &= A_1 + A_2 + \dots + A_k \\ m(\cos \varphi) \frac{d}{dt} \left(\rho \frac{d\theta}{dt} \right) &= B_1 + B_2 + \dots + B_k \\ m \frac{d^2z}{dt^2} &= \Gamma_1 + \Gamma_2 + \dots + \Gamma_k \end{aligned} \right\}, \dots \dots \dots (37)$$

с) въ сферическихъ координатахъ: (*m. I imp. 255*)

$$\left. \begin{aligned} m \cdot \dot{r} \cdot \cos(\dot{r} \alpha) &= m \left(\frac{d^2 r}{dt^2} - r \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 - r \sin^2 \varphi \left(\frac{d\psi}{dt} \right)^2 \right) = A \\ m \cdot \dot{r} \cdot \cos(\dot{r} \beta) &= m \left(\frac{1}{r} \frac{d \left(r^2 \frac{d\varphi}{dt} \right)}{dt} - r \sin \varphi \cos \varphi \left(\frac{d\psi}{dt} \right)^2 \right) = B \\ m \cdot \dot{r} \cdot \cos(\dot{r} \gamma) &= \frac{m}{r \sin \varphi} \frac{d \left(r^2 \sin^2 \varphi \cdot \frac{d\psi}{dt} \right)}{dt} = \Gamma \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (38)$$

Каждое изъ этихъ равенствъ выражаетъ, что проекція на одну изъ координатныхъ осей равнодѣйствующей F равняется, помноженной на массу, проекціи ускоренія на ту же ось.

д) Въ прямолинейныхъ *косугольных* координатахъ равенства:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = X; \quad m \frac{d^2 y}{dt^2} = Y; \quad m \frac{d^2 z}{dt^2} = Z$$

выражаютъ, что *составляющія* по осямъ координатъ силы F равняются, помноженнымъ на массу, *составляющимъ* ускоренія.

е) Проекція равнодѣйствующей на бинормаль *) траекторіи, описываемой матерьяльной точкою, должна быть равна нулю, проекціи же ея на направленіе скорости и на направленіе радіуса кривизны траекторіи должны быть пропорціональны соотвѣтствующимъ проекціямъ ускоренія; а именно: (*m. I imp. 256*)

$$\left. \begin{aligned} m \frac{dv}{dt} &= F \cos(Fv) \\ m \frac{v^2}{\rho} &= F \cos(F\rho) \\ 0 &= F \cos(Fb) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (39)$$

Если извѣстно движеніе матерьяльной точки, то, зная массу ея, мы можемъ, пользуясь вышеприведенными совокупностями равенствъ,

*) Бинормаль или вторая главная нормаль перпендикулярна къ плоскости кривизны.

опредѣлить для всякаго момента движенія величину и направленіе равнодѣйствующей силъ, приложенныхъ къ матерьяльной точкѣ.

На этомъ основаніи могутъ быть рѣшены, напримѣръ, слѣдующіе вопросы.

Примѣръ 1-й. Тяжелая матерьяльная точка описываетъ окружность радіуса R , находящуюся въ вертикальной плоскости; скорость точки постоянна. Определить величину и направленіе той силы, которая, действуя на точку, заставляетъ ее совершать такое движеніе.

Возьмемъ центръ окружности за начало координатъ, ось Y направимъ вертикально внизъ, ось X — горизонтально въ плоскости круга.

Движеніе точки по окружности радіуса R , съ постоянною скоростью a , выражается въ прямолинейныхъ прямоугольныхъ координатахъ, такъ:

$$x = R \cos\left(\frac{a}{R}t\right); \quad y = R \sin\left(\frac{a}{R}t\right);$$

проекція силъ тяжести на оси X и Y суть:

$$X_1 = 0; \quad Y_1 = mg;$$

проекція же другой силы опредѣлятся изъ уравненій (36) и окажутся имѣющими слѣдующія величины:

$$X_2 = -m \frac{a^2}{R^2} x; \quad Y_2 = -m \frac{a^2}{R^2} y - mg = -m \frac{a^2}{R^2} \left(y + \frac{gR^2}{a^2}\right).$$

Изъ этихъ выраженій видно, что сила F_2 постоянно направлена къ точкѣ C , находящейся на отрицательной оси Y въ разстояніи $g \frac{R^2}{a^2}$ отъ начала координатъ; величина же этой силы равна:

$$F_2 = m \frac{a^2}{R^2} MC,$$

гдѣ MC есть разстояніе между матерьяльною точкою M и точкою C .

Примѣръ 2-й. Матерьяльная точка совершаетъ слѣдующее движеніе:

$$x = ae^{-kt} \cos \omega t, \quad y = be^{-kt} \sin \omega t,$$

находясь подъ вліяніемъ двухъ силъ: F_1 , направленной къ началу координатъ, и F_2 , направленной по касательной къ траекторіи. Требуется опредѣлить эти силы.

Окажется, что:

$$\begin{aligned} F_1 &= m(\omega^2 + k^2) \sqrt{x^2 + y^2} \\ F_2 &= 2kmv \end{aligned}$$

и что сила F_2 направлена противоположно скорости.

Слѣдовательно, первая сила есть притяженіе, пропорціональное разстоянію точки отъ начала координатъ, вторая же сила пропорціональна скорости точки и направлена противоположно скорости.

Величина и направленіе силы, приложенной къ матеріальной точкѣ, могутъ измѣняться:

- а) съ измѣненіемъ положенія матеріальной точки въ пространствѣ,
- б) въ той же точкѣ пространства съ теченіемъ времени;
- в) кромѣ того, они могутъ зависѣть отъ величины и направленія скорости матеріальной точки.

(Такъ, напримѣръ, сила притяженія, дѣйствующая по закону тяготѣнія на какую-либо матеріальную точку со стороны однороднаго шара, имѣетъ величину, обратно пропорціональную квадрату разстоянія точки до центра шара; направлена же эта сила къ центру шара. Если шаръ сохраняетъ неподвижное положеніе въ пространствѣ, то сила притяженія имъ матеріальной точки будетъ функціею только координатъ точки.

Если же центръ шара будетъ совершать какое-либо движеніе въ пространствѣ, то сила притяженія его въ каждой точкѣ пространства будетъ измѣняться съ теченіемъ времени.

Примѣрами силъ, зависящихъ отъ скоростей, могутъ служить сопротивленія жидкостей и газовъ движенію погруженныхъ въ нихъ тѣлъ: такіа силы называются *сопротивленіями среды*; въ примѣненіи къ матеріальной точкѣ, сопротивленіе среды въ большинствѣ случаевъ принимаютъ противоположнымъ скорости точки и зависящимъ отъ скорости точки и плотности среды).

Вообще говоря, силы, приложенныя къ матеріальной точкѣ, суть нѣкоторыя функціи времени, координатъ точки и скорости ея.

Поэтому вторыя части равенствъ (36) суть нѣкоторыя функціи времени, координатъ x, y, z и производій скорости на оси координатъ;

а следовательно, эти равенства суть три совокупныя дифференціальныя уравненія второго порядка:

$$\left. \begin{aligned} m \frac{d^2x}{dt^2} &= \Phi_1 \left(t, x, y, z, \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt} \right) \\ m \frac{d^2y}{dt^2} &= \Phi_2 \left(t, x, y, z, \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt} \right) \\ m \frac{d^2z}{dt^2} &= \Phi_3 \left(t, x, y, z, \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt} \right) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (40)$$

(Φ_1, Φ_2, Φ_3 означаютъ нѣкоторыя функціи величинъ, заключенныхъ въ скобкахъ)

Эти уравненія называются *дифференціальными уравненіями движенія матеріальной точки, выраженными въ прямоугольныхъ координатахъ*.

Если вторыя части равенствъ (37) будутъ выражены въ функціяхъ времени, кругово-цилиндрическихъ координатъ ρ, Θ, z , и ихъ производныхъ по времени: ρ', Θ', z' , то будемъ имѣть дифференціальныя уравненія движенія матеріальной точки въ кругово-цилиндрическихъ координатахъ:

$$\left. \begin{aligned} m \left(\frac{d^2\rho}{dt^2} - \rho \left(\frac{d\Theta}{dt} \right)^2 \right) &= \Theta_1 \left(t, \rho, \Theta, z, \frac{d\rho}{dt}, \frac{d\Theta}{dt}, \frac{dz}{dt} \right) \\ m \rho \frac{d^2\Theta}{dt^2} &= \Theta_2 \left(t, \rho, \Theta, z, \frac{d\rho}{dt}, \frac{d\Theta}{dt}, \frac{dz}{dt} \right) \\ m \frac{d^2z}{dt^2} &= \Theta_3 \left(t, \rho, \Theta, z, \frac{d\rho}{dt}, \frac{d\Theta}{dt}, \frac{dz}{dt} \right) \end{aligned} \right\} \dots\dots (41)$$

гдѣ $\Theta_1, \Theta_2, \Theta_3$ означаютъ нѣкоторыя функціи величинъ, заключенныхъ въ скобкахъ.

Подобнымъ образомъ будемъ имѣть дифференціальныя уравненія движенія матеріальной точки въ сферическихъ координатахъ, если вторыя части равенства (38) будутъ выражены функціями сферическихъ координатъ и ихъ производныхъ по времени.

Если вторыя части равенствъ (39) будутъ выражены функціями времени, скорости и величинъ, опредѣляющихъ положеніе точки въ

пространствѣ, то эти равенства будутъ представлять собою особый видъ дифференціальныхъ уравненій движенія матеріальной точки.

Вобще дифференціальныя уравненія движенія свободной матеріальной точки могутъ быть представлены подѣ весьма различныя видою, но какъ бы они ни были представлены, они суть аналитическія выраженія того, что ускореніе матеріальной точки имѣетъ направленіе и равно дѣлѣнной на массу величины равнодѣйствующей приложенныхъ къ точкѣ силъ, выражаемыхъ нѣкоторыми функциями времени, скорости и величины, опредѣляющихъ положеніе матеріальной точки въ пространство.

§ 18. Интегралы дифференціальныхъ уравненій движенія свободной матеріальной точки; число постоянныхъ произвольныхъ; начальное положеніе и начальная скорость матеріальной точки.

Если извѣстны силы, приложенныя къ матеріальной точкѣ данной массы, въ функціяхъ времени, скорости и величины, опредѣляющихъ положеніе точки въ пространство, и требуется опредѣлить движеніе, совершаемое матеріальною точкою подѣ вліяніемъ этихъ силъ, то надо сначала выбрать систему координатъ, наиболѣе удобную для рѣшенія вопроса, и составить дифференціальныя уравненія движенія точки въ этихъ координатахъ.

Напримѣръ:

Примѣръ 3-й. Матеріальная точка движется въ однородной средѣ, оказывающей сопротивленіе движенію, пропорціональное первой степени скорости; каждая изъ трехъ взаимно-перпендикулярныхъ плоскостей координатъ притягиваетъ матеріальную точку съ силою, перпендикулярною къ плоскости и пропорціональною первой степени разстоянія отъ вел. Пусть $2km$, λm , μm , χm суть коэффициенты: сопротивленія среды и притяженій перпендикулярныхъ къ плоскостямъ YZ , ZX , XU . Требуется опредѣлить движеніе.

Дифференціальныя уравненія движенія, съ составленія которыхъ начинается процессъ рѣшенія вопроса, мы напомнимъ въ этомъ случаѣ въ прямоугольныхъ прямолинейныхъ координатахъ.

Сопротивленіе движенію, равное $2kmt$, направлено противоположно скорости, поэтому проекція его на ось X равна: $-2mkx'$.

Изъ трехъ притяженій одно параллельно оси X и направлено въ отрицательную сторону ея, если $X > 0$; два другія притяженія перпендикулярны къ этой оси.

Поэтому одно изъ дифференціальныѣ уравненій движенія будетъ слѣдующее:

$$mx'' = -2mkx' - m\lambda x;$$

а два другія:

$$my' = -2mky' - m\lambda y; \quad mz' = -2mkz' - m\lambda z.$$

Для большей опредѣлительности изложенія мы будемъ предполагать, что дифференціальныя уравненія составлены въ прямоугольныхъ координатахъ; но все, что будетъ здѣсь сказано, можетъ быть примѣнено съ весьма незначительными измѣненіями ко всякимъ другимъ координатамъ.

Составленныя дифференціальныя уравненія должны сослужить для опредѣленія функцій $f_1(t), f_2(t), f_3(t)$, опредѣляющихъ координаты движущейся точки для всякаго момента опредѣляемаго движенія.

Эти функціи должны удовлетворять дифференціальнымъ уравненіямъ для всякаго момента движенія, обращая ихъ въ тождества; то есть функція времени, заключающаяся во второй части каждаго изъ тождествъ:

$$mx'': mf_1''(t) = \Phi_1(t, f_1(t), f_2(t), f_3(t), f_1'(t), f_2'(t), f_3'(t))$$

$$my'': mf_2''(t) = \Phi_2(t, f_1(t), f_2(t), f_3(t), f_1'(t), f_2'(t), f_3'(t))$$

$$mz'': mf_3''(t) = \Phi_3(t, f_1(t), f_2(t), f_3(t), f_1'(t), f_2'(t), f_3'(t))$$

должна быть тождественна съ функціею времени, заключающеюся въ первой части его.

Для опредѣленія функцій f_1, f_2, f_3 мы можемъ пользоваться составленными дифференціальными уравненіями и всѣми равенствами, изъ нихъ получаемыми.

Дифференціальныя уравненія даютъ намъ только выраженія вторыхъ производныхъ координатъ въ извѣстныхъ намъ функціяхъ прочихъ семи величинъ (времени, координатъ и ихъ первыхъ производныхъ).

Взявъ отъ дифференціальныхъ уравненій производныя по времени и замѣнивъ въ полученныхъ равенствахъ вторыя производныя координатъ ихъ выраженіями, мы получимъ выраженія третьихъ производныхъ координатъ въ функціяхъ тѣхъ же семи величинъ: t, x, y, z, x', y', z' .

Продолжая такимъ же образомъ далѣе, мы выразимъ производныя какого угодно порядка (выше 1-го) отъ координатъ по времени въ извѣстныхъ намъ функціяхъ отъ t, x, y, z, x', y', z' .

Пусть t_0 есть какой-либо моментъ движенія; x_0, y_0, z_0 , — координаты матерьяльной точки и x'_0, y'_0, z'_0 , — проэкціи на оси координатъ скорости точки въ этотъ моментъ; какъ сейчасъ сказано, производныя второго и высшихъ порядковъ въ этотъ моментъ выразятся нѣкоторыми извѣстными намъ функціями семи величинъ $t_0, x_0, y_0, z_0, x'_0, y'_0, z'_0$; означимъ величины этихъ производныхъ такъ:

$$z_0'', y_0'', z_0'', x_0''', y_0''', z_0''', \dots x_0^{(n)}, y_0^{(n)}, z_0^{(n)}, \dots$$

Функціи $f_1(t), f_2(t), f_3(t)$, выражающія непрерывно измѣняющіяся координаты движущейся точки, должны быть непрерывными функціями времени; поэтому мы можемъ примѣнить къ нимъ Тейлорово разложеніе въ рядъ по восходящимъ степенямъ разности $(t-t_0)$; означимъ эту разность черезъ ϑ ; ряды будутъ:

$$\left. \begin{aligned} x &= f_1(t) = x_0 + x'_0 \vartheta + x_0'' \frac{\vartheta^2}{1.2} + x_0''' \frac{\vartheta^3}{1.2.3} + \dots \\ y &= f_2(t) = y_0 + y'_0 \vartheta + y_0'' \frac{\vartheta^2}{1.2} + y_0''' \frac{\vartheta^3}{1.2.3} + \dots \\ z &= f_3(t) = z_0 + z'_0 \vartheta + z_0'' \frac{\vartheta^2}{1.2} + z_0''' \frac{\vartheta^3}{1.2.3} + \dots \end{aligned} \right\}; \dots (42)$$

но такъ какъ вторыя и высшія производныя: $x_0'', y_0'', z_0'', x_0''', \dots$ суть функціи отъ $t_0, x_0, y_0, z_0, t'_0, x'_0, y'_0, z'_0$, то эти ряды представляютъ нѣкоторыя функціи отъ $t, t_0, x_0, y_0, z_0, x'_0, y'_0, z'_0$:

$$\left. \begin{aligned} x &= f_1(t, t_0, x_0, y_0, z_0, x'_0, y'_0, z'_0, \\ y &= f_2(t, t_0, x_0, y_0, z_0, x'_0, y'_0, z'_0, \\ z &= f_3(t, t_0, x_0, y_0, z_0, x'_0, y'_0, z'_0, \end{aligned} \right\} \dots (43)$$

Такимъ образомъ мы имѣемъ возможность, исходя изъ дифференціальнаго уравненія движенія, получить искомыя функціи въ видѣ рядовъ, заключающихъ кромѣ t , еще t_0 , x_0 , y_0 , z_0 , x_0' , y_0' , z_0' .

Примѣнимъ этотъ приемъ къ слѣдующимъ тремъ примѣрамъ:

Примѣръ 4-й. Сила, приложенная къ матерьяльной точкѣ, имѣетъ постоянную величину и направленіе, такъ что проэкціи ея на оси координатъ равны постояннымъ величинамъ A , B , C .

Дифференціальныя уравненія движенія въ этомъ случаѣ будутъ:

$$mx'' = A, \quad my'' = B, \quad mz'' = C.$$

Производныя третьяго и высшихъ порядковъ будутъ равны нулю, а потому:

$$\left. \begin{aligned} x &= x_0 + x_0'(t - t_0) + \frac{A(t - t_0)^2}{m \cdot 1.2} \\ y &= y_0 + y_0'(t - t_0) + \frac{B(t - t_0)^2}{m \cdot 1.2} \\ z &= z_0 + z_0'(t - t_0) + \frac{C(t - t_0)^2}{m \cdot 1.2} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (44)$$

Примѣръ 5-й. Силы, приложенныя къ матерьяльной точкѣ, суть притяженія къ плоскостямъ координатъ, такія же, какъ въ примѣрѣ 3-мъ, но коэффициенты пропорціональности суть: mx_1^2 , mx_2^2 , mx_3^2 .

Дифференціальныя уравненія движенія будутъ:

$$mx'' = -mx_1^2x; \quad my'' = -mx_2^2y; \quad mz'' = -mx_3^2z.$$

Чтобы составить выраженіе для x , мы составляемъ сначала выраженія для производныхъ:

$$\begin{aligned} x'' &= -x_1^2x & x''' &= -x_1^2x' \\ x^{(4)} &= -x_1^2x'' = x_1^4x & x^{(5)} &= -x_1^2x''' = x_1^4x' \\ &\dots \dots \dots & &\dots \dots \dots; \end{aligned}$$

рядъ, выражающій x , будетъ слѣдующій:

$$\begin{aligned} x &= x_0 + x_0'\vartheta - x_1^2x_0\frac{\vartheta^2}{1.2} - x_1^2x_0'\frac{\vartheta^3}{1.2.3} + x_1^4x_0\frac{\vartheta^4}{1.2.3.4} + \\ &+ x_1^4x_0'\frac{\vartheta^5}{1.2.3.4.5} - \dots \dots \dots; \end{aligned}$$

его можно представить такъ:

$$x = x_0 \left(1 - \frac{(x_1 \vartheta)^2}{1.2} + \frac{(x_1 \vartheta)^4}{1.2.3.4} - \dots \right) + \\ + \frac{x_0'}{x_1} \left(x_1 \vartheta - \frac{(x_1 \vartheta)^3}{1.2.3} + \frac{(x_1 \vartheta)^5}{1.2.3.4.5} - \dots \right).$$

Легко видѣть, что рядъ, помноженный на x_0 , равняется $\cos x_1 \vartheta$, а рядъ, помноженный на (x_0'/x_1) , равняется синусу той же дуги, слѣдовательно:

$$x = x_0 \cos x_1 \vartheta + \frac{x_0'}{x_1} \sin x_1 \vartheta \dots \dots \dots (45, a)$$

Такъ же найдемъ выраженія для y и z :

$$y = y_0 \cos x_2 \vartheta + \frac{y_0'}{x_2} \sin x_2 \vartheta, \dots \dots \dots (45, b)$$

$$z = z_0 \cos x_3 \vartheta + \frac{z_0'}{x_3} \sin x_3 \vartheta \dots \dots \dots (45, c)$$

Чтобы упростить примѣненіе этого приѣма къ дифференціальнымъ уравненіямъ примѣра 3-го, мы преобразуемъ ихъ слѣдующимъ образомъ.

Сокративъ m , помножимъ каждое на e^{kt} ;
означимъ черезъ $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ слѣдующія произведенія:

$$\varphi_1 = x e^{kt}, \quad \varphi_2 = y e^{kt}, \quad \varphi_3 = z e^{kt},$$

а чрезъ λ, μ, ν слѣдующія разности

$$x_1^2 = \lambda - k^2, \quad x_2^2 = \mu - k^2, \quad x_3^2 = \nu - k^2;$$

тогда дифференціальныя уравненія 3-го примѣра примутъ такой видъ:

$$\varphi_1'' = -x_1^2 \varphi_1, \quad \varphi_2'' = -x_2^2 \varphi_2, \quad \varphi_3'' = -x_3^2 \varphi_3,$$

одинаковый съ видомъ уравненій пятого примѣра; по этому нетрудно получить для x, y, z слѣдующія выраженія:

$$\left. \begin{aligned} x &= e^{-k\vartheta} \left(x_0 \cos (\vartheta \sqrt{\lambda - k^2}) + \frac{x_0' + kx_0}{\sqrt{\lambda - k^2}} \sin (\vartheta \sqrt{\lambda - k^2}) \right) \\ y &= e^{-k\vartheta} \left(y_0 \cos (\vartheta \sqrt{\mu - k^2}) + \frac{y_0' + ky_0}{\sqrt{\mu - k^2}} \sin (\vartheta \sqrt{\mu - k^2}) \right) \\ z &= e^{-k\vartheta} \left(z_0 \cos (\vartheta \sqrt{\nu - k^2}) + \frac{z_0' + kz_0}{\sqrt{\nu - k^2}} \sin (\vartheta \sqrt{\nu - k^2}) \right) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (46)$$

Е. Вмѣсто того, чтобы опредѣлять функція f_1, f_2, f_3 путемъ послѣдовательнаго дифференцированія составленныхъ дифференціальнахъ уравненій, мы можемъ идти въ той же цѣли путемъ прямо-противоположнымъ.

Имѣя выраженія вторыхъ производныхъ координатъ въ функціяхъ: времени, координатъ и ихъ первыхъ производныхъ, мы можемъ искать выраженія первыхъ производныхъ координатъ въ функціяхъ времени и координатъ; для этого надо данныя дифференціальныя уравненія подвергнуть такимъ преобразованіямъ, чтобы, вмѣсто нихъ, получились три равносильныя *) явя дифференціальныя уравненія такого вида:

$$^{**)} \frac{d\varphi_1}{dt} = 0, \quad \frac{d\varphi_2}{dt} = 0, \quad \frac{d\varphi_3}{dt} = 0, \dots \dots \dots (47)$$

*) Уравненія (47) равносильны дифференціальнымъ уравненіямъ движенія матеріальной точки въ томъ смыслѣ, что, если мы рѣшимъ первыя относительно x', y', z'' , то получимъ послѣднія, то есть:

$$x' = \frac{\phi_1}{m}, \quad y' = \frac{\phi_2}{m}, \quad z'' = \frac{\phi_3}{m};$$

а потому, если въ уравненіяхъ (47) замѣнимъ x', y'', z'' функціями ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 , дѣленными на m , то первыя части этихъ уравненій обратятся въ нуль черезъ взаимное сокращеніе всѣхъ членовъ. " ~

**) Знакъ:

$$\frac{d\varphi}{dt}$$

служить для обозначенія полной производной по времени отъ функціи $\varphi(t, x, y, z, x', y', z')$; то есть:

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \frac{dz}{dt} + \frac{\partial \varphi}{\partial x'} \frac{dx'}{dt} + \frac{\partial \varphi}{\partial y'} \frac{dy'}{dt} + \frac{\partial \varphi}{\partial z'} \frac{dz'}{dt}.$$

Частныя же производныя функціи φ по входящимъ въ нее переменнымъ величинамъ мы будемъ обозначать помощью круглыхъ ∂ ; напримѣръ:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t}$$

есть производная по t , явно заключающемуся въ функціи φ .

гдѣ $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ суть нѣкоторыя функціи отъ t, x, y, z, x', y', z' ; интегрируя эти уравненія, мы получимъ равенства:

$$\left. \begin{aligned} \varphi_1(t, x, y, z, x', y', z') &= C_1 \\ \varphi_2(t, x, y, z, x', y', z') &= C_2 \\ \varphi_3(t, x, y, z, x', y', z') &= C_3 \end{aligned} \right\}, \dots \dots \dots (48)$$

которыя должны служить для выраженія x', y', z' въ функціяхъ отъ $t, x, y, z, C_1, C_2, C_3$.

Величины C_1, C_2, C_3 суть произвольныя постоянныя, введенныя тремя произведенными интегрированіями и не заключающіяся въ дифференціальныя уравненія.

Каждое изъ равенствъ вида (48) называется *первымъ интеграломъ дифференціальныхъ уравненій движенія*.

Если изъ ^{любокуяности} трехъ первыхъ интеграловъ, послѣ какихъ-либо преобразованій, могутъ быть получены три равносильныя имъ уравненія слѣдующаго вида:

$$\frac{d\Phi_1}{dt}=0, \quad \frac{d\Phi_2}{dt}=0, \quad \frac{d\Phi_3}{dt}=0, \dots \dots \dots (49)$$

гдѣ Φ_1, Φ_2, Φ_3 суть функціи отъ $t, x, y, z, C_1, C_2, C_3$, то изъ нихъ, послѣ новыхъ интегрированій, получимъ *вторые интегралы* дифференціальныхъ уравненій:

$$\left. \begin{aligned} \Phi_1(t, x, y, z, C_1, C_2, C_3) &= \Gamma_1 \\ \Phi_2(t, x, y, z, C_1, C_2, C_3) &= \Gamma_2 \\ \Phi_3(t, x, y, z, C_1, C_2, C_3) &= \Gamma_3 \end{aligned} \right\}, \dots \dots \dots (50)$$

гдѣ $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$ суть три постоянныя произвольныя.

Полученные вторые интегралы должны служить для выраженія x, y, z въ функціяхъ времени и шести постоянныхъ произвольныхъ:

$$\left. \begin{aligned} x &= \psi_1(t, C_1, C_2, C_3, \Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3) \\ y &= \psi_2(t, C_1, C_2, C_3, \Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3) \\ z &= \psi_3(t, C_1, C_2, C_3, \Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (51)$$

Такимъ образомъ, мы получили шесть постоянныхъ произвольныхъ величинъ, которыя должны служить для выраженія x, y, z въ функціяхъ времени и шести постоянныхъ произвольныхъ.

Выраженія для x' , y , z получаются, или непосредственно изъ выраженій (51), взявъ производныя по времени отъ функций ψ_1, ψ_2, ψ_3 :

$$x' = \psi_1'(t), y = \psi_2'(t), z = \psi_3'(t), \dots \dots \dots (52)$$

или изъ первыхъ интеграловъ (48), если рѣшить ихъ относительно x, y, z и замѣнить x, y, z функциями ψ_1, ψ_2, ψ_3 ; выраженія, полученные тѣмъ и другимъ путемъ, должны быть одинаковы, такъ какъ функции (51) должны тождественно удовлетворять уравненіямъ (49) или равносильнымъ имъ интеграламъ (48).

Выраженія для x, y, z , полученные чрезъ двукратное дифференцирование функций ψ_1, ψ_2, ψ_3 по времени:

$$x'' = \psi_1''(t), y' = \psi_2'(t), z = \psi_3(t), \dots \dots \dots (53)$$

должны быть тождественны съ выраженіями:

$$\left. \begin{aligned} x'' &= \frac{1}{m} \Phi(t, \psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_1', \psi_2', \psi_3') \\ y'' &= \frac{1}{m} \Phi(t, \psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_1', \psi_2', \psi_3') \\ z'' &= \frac{1}{m} \Phi(t, \psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_1', \psi_2', \psi_3') \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (54)$$

потому что функции (51) должны тождественно удовлетворять дифференціальнымъ уравненіямъ движенія.

И такъ дѣлѣ

Равенства (48) и (51) должны быть справедливы для всякаго момента движенія; примѣняя ихъ къ моменту t_0 , въ который координаты точки сута x_0, y_0, z_0 , а проекціи скорости — x', y', z' , мы получимъ слѣдующую зависимость между этими постоянными и постоянными произвольными C_1, C_2, \dots, C_3 :

$$\left. \begin{aligned} \varphi_1(t_0, x_0, y_0, z_0, x_0', y_0', z_0') &= C_1 \\ \varphi_2(t_0, x_0, y_0, z_0, x_0', y_0', z_0') &= C_2 \\ \varphi_3(t_0, x_0, y_0, z_0, x_0', y_0', z_0') &= C_3 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (55)$$

$$\left. \begin{aligned} \Phi_1(t_0, x_0, y_0, z_0, C_1, C_2, C_3) &= \Gamma_1 \\ \Phi_2(t_0, x_0, y_0, z_0, C_1, C_2, C_3) &= \Gamma_2 \\ \Phi_3(t_0, x_0, y_0, z_0, C_1, C_2, C_3) &= \Gamma_3 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (56)$$

Отсюда слѣдуетъ, что x_0, y_0, \dots, z_0' суть функція $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_3'$ отъ $t_0, C_1, C_2, C_3, \Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$:

$$\left. \begin{aligned} x_0 &= \psi_1(t_0) \\ y_0 &= \psi_2(t_0) \\ z_0 &= \psi_3(t_0) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (57)$$

$$\left. \begin{aligned} x_0' &= \psi_1'(t_0) \\ y_0' &= \psi_2'(t_0) \\ z_0' &= \psi_3'(t_0) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (58)$$

а такъ какъ t_0 есть произвольно-выбранный моментъ движенія и $C_1, C_2, \dots, \Gamma_3$ суть постоянныя произвольныя, то и $x_0, y_0, \dots, y_0', z_0'$ суть величины произвольныя.

Слѣдовательно, *функція времени, выражающія координаты движущейся свободной матерьяльной точки и удовлетворяющія даннымъ дифференціальнымъ уравненіямъ движенія, заключаютъ въ себѣ шесть постоянныхъ произвольныхъ, вследствие чего координаты и проекціи скорости точки могутъ быть выбраны по произволу въ одинъ изъ моментовъ движенія.*

Функція ψ_1, ψ_2, ψ_3 даютъ тѣ же самыя величины для координатъ x, y, z въ моментъ t , какія даютъ функція f_1, f_2, f_3 (43), если только удовлетворены условія (55), (56), или равносильныя имъ (57), (58); въ этомъ можемъ убѣдиться слѣдующимъ образомъ.

Разложимъ функція ψ_1, ψ_2, ψ_3 въ ряды по возрастающимъ степенямъ разности $(t - t_0) = \vartheta$; получимъ, наприимѣръ для ψ_1 , слѣдующій рядъ:

$$\psi_1(t) = \psi_1(t_0) + \psi_1'(t_0)\vartheta + \psi_1''(t_0)\frac{\vartheta^2}{1.2} + \psi_1'''(t_0)\frac{\vartheta^3}{1.2.3} + \dots;$$

но:

$$\psi_1(t_0) = x_0 = f_1(t_0), \quad \psi_1'(t_0) = x_0' = f_1'(t_0),$$

$$\psi_1''(t_0) = \frac{1}{m} \phi_1(t_0, x_0, y_0, z_0, x_0', y_0', z_0') = f_1''(t_0);$$

также убѣдимся, что $\psi_1'''(t_0) = f_1'''(t_0)$ и такъ далѣе; поэтому предыдущій рядъ есть ни что иное, какъ разложене первой изъ функцій (43) по восходящимъ степенямъ разности $(t - t_0) = \theta$, а потому:

$$\psi_1(t, C_1, C_2, C_3, \Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3) = f_1(t, t_0, x_0, y_0, z_0, x_0', y_0', z_0'),$$

то есть функціи ψ_1, ψ_2, ψ_3 обращаются въ функціи f_1, f_2, f_3 , если произвольныя постоянныя C_1, C_2, \dots, C_3 будутъ замѣнены величинами $t_0, x_0, y_0, \dots, z_0'$ при посредствѣ равенствъ (55) (56).

Изъ этого видно, что оба указанныя нами приѣма даютъ результаты тождественныя.

Примѣнимъ второй приѣмъ къ дифференціальнымъ уравненіямъ примѣра 4-го; мы легко найдемъ, что первые интегралы суть:

$$x' - \frac{A}{m} t = C_1, \quad y - \frac{B}{m} t = C_2, \quad z' - \frac{C}{m} t = C_3;$$

вторые интегралы:

$$x - \frac{A}{m} \frac{t^2}{2} - C_1 t = \Gamma_1, \quad y - \frac{B}{m} \frac{t^2}{2} - C_2 t = \Gamma_2, \quad z - \frac{C}{m} \frac{t^2}{2} - C_3 t = \Gamma_3.$$

Составивъ равенства (55) (56) и исключивъ произвольныя постоянныя изъ полученныхъ вторыхъ интеграловъ, мы приведемъ послѣдніе къ виду (44).

Дифференціальныя уравненія движенія свободной матеріальной точки могутъ быть замѣнены совокупностью шести дифференціальныхъ уравненій перваго порядка:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= x', & \frac{dy}{dt} &= y, & \frac{dz}{dt} &= z \\ \frac{tx'}{dt} &= \phi_1, & \frac{dy'}{dt} &= \phi_2, & \frac{dz'}{dt} &= \phi_3 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (59)$$

Каждое изъ равенствъ вида:

$$\varphi(t, x, y, z, x', y', z') = C,$$

полная производная первой части котораго:

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{\partial\varphi}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial\varphi}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \dots + \frac{\partial\varphi}{\partial z'} \frac{dz'}{dt}$$

обращается въ нуль тождественно, когда вмѣсто производныхъ отъ x, y, z, x', y', z' будутъ подставлены равныя имъ вторыя части уравненій (59), называется интеграломъ этихъ дифференціальныхъ уравненій.

Чтобы найти функціи времени, выражающія x, y, z, x', y', z' и тождественно удовлетворяющія уравненіямъ (59), необходимо имѣть шесть такихъ различныхъ интеграловъ:

$$\varphi_1 = C_1, \varphi_2 = C_2, \varphi_3 = C_3, \varphi_4 = C_4, \varphi_5 = C_5, \varphi_6 = C_6, \dots \dots \dots (60)$$

изъ полныхъ производныхъ которыхъ по времени:

$$\frac{d\varphi_1}{dt} = 0, \frac{d\varphi_2}{dt} = 0, \frac{d\varphi_3}{dt} = 0, \frac{d\varphi_4}{dt} = 0, \frac{d\varphi_5}{dt} = 0, \frac{d\varphi_6}{dt} = 0 \dots \dots \dots (60 \text{ bis})$$

получатся дифференціальныя уравненія (59), если шесть уравненій (60 bis) будутъ рѣшены относительно производныхъ:

$$\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}, \frac{dx'}{dt}, \frac{dy'}{dt}, \frac{dz'}{dt}.$$

Рѣшивъ интегралы (60) относительно $x, y, \dots \dots z'$, мы получимъ выраженія послѣднихъ въ функціяхъ t и шести произвольныхъ постоянныхъ $C_1, C_2, \dots \dots C_6$.

Если выраженія для x, y, z суть:

$$x = \psi_1, y = \psi_2, z = \psi_3, \dots \dots \dots (61)$$

гдѣ вторыя части суть функціи отъ $t, C_1, C_2, \dots \dots C_6$, то выраженія для x', y', z' будутъ:

$$x' = \psi_1', y' = \psi_2', z' = \psi_3', \dots \dots \dots (61 \text{ bis})$$

такъ какъ уравненія:

$$\frac{dx}{dt} = x', \quad \frac{dy}{dt} = y', \quad \frac{dz}{dt} = z'$$

должны быть удовлетворены тождественно.

Всякое равенство вида:

$$F(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_6) = C \dots \dots \dots (62)$$

есть также интеграль уравненій (59); въ самомъ дѣлѣ полная производная первой части его:

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial \varphi_1} \frac{d\varphi_1}{dt} + \dots + \frac{\partial F}{\partial \varphi_6} \frac{d\varphi_6}{dt}$$

обращается въ нуль тождественно при замѣщеніи производныхъ отъ x, y, \dots, z' вторыми частями уравненій (59), такъ какъ такое замѣщеніе обращаетъ въ нуль полныя производныя отъ $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_6$.

Изъ этого слѣдуетъ, что если совокупныя дифференціальныя уравненія (59) имѣютъ шесть независимыхъ интеграловъ, то они имѣютъ еще кромѣ того безчисленное множество интеграловъ, представляющихъ собою комбинаціи шести первыхъ.

Всякій новый интеграль:

$$\psi(t, x, y, z, x', y', z') = C$$

совокупныхъ дифференціальныхъ уравненій (59) можетъ быть представленъ подъ видомъ (62); въ самомъ дѣлѣ, подставивъ въ φ вмѣсто x, y, \dots, z' ихъ выраженія (61) и (61 bis), мы обратимъ φ въ нѣкоторую функцію f отъ t, C_1, C_2, \dots, C_6 ; замѣнимъ C_1, C_2, \dots, C_6 черезъ $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_6$:

$$\varphi = f(t, \varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_6);$$

полная производная отъ φ или отъ f по t будетъ:

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial \varphi_1} \frac{d\varphi_1}{dt} + \dots + \frac{\partial f}{\partial \varphi_6} \frac{d\varphi_6}{dt};$$

она должна тождественно обращаться въ нуль, когда производныя отъ $x, y, z, \dots z'$ будутъ замѣнены вторыми частями уравненій (59); но тогда обращаются въ нуль также и полныя производныя функцій $\varphi_1, \varphi_2, \dots \varphi_6$; поэтому должно быть:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = 0;$$

значить:

$$\varphi = f(\varphi_1, \varphi_2, \dots \varphi_6) = C.$$

Произвольная постоянная C есть такая же функція произвольныхъ постоянныхъ $C_1, C_2, \dots C_6$:

$$C = f(C_1, C_2, \dots C_6).$$

Слѣдовательно, можно сказать, что совокупныя дифференціальныя уравненія (59) имѣютъ шесть самостоятельныхъ интеграловъ съ шестью независимыми произвольными постоянными и безчисленное множество интеграловъ, представляющихъ комбинаціи первыхъ; произвольныя постоянныя послѣднихъ суть такія же комбинаціи независимыхъ произвольныхъ постоянныхъ.

Къ этому надо еще прибавить: что любые шесть интеграловъ могутъ играть роль самостоятельныхъ, если изъ нихъ, путемъ полного дифференцированія по времени, могутъ быть получены дифференціальныя уравненія (59), какъ указано относительно интеграловъ (60).

Д. Если найдены будутъ шесть самостоятельныхъ интеграловъ дифференціальныхъ уравненій (59), то, исключивъ изъ нихъ x', y', z' , мы получимъ вторые интегралы дифференціальныхъ уравненій движенія.

Напримѣръ шесть самостоятельныхъ интеграловъ дифференціальныхъ уравненій:

$$\frac{dx}{dt} = x', \quad \frac{dy}{dt} = y', \quad \frac{dz}{dt} = z'$$

$$\frac{dx'}{dt} = \frac{A}{m}, \quad \frac{dy'}{dt} = \frac{B}{m}, \quad \frac{dz'}{dt} = \frac{C}{m}$$

суть три:

$$x' - \frac{A}{m}t = C_1, \quad y' - \frac{B}{m}t = C_2, \quad z' - \frac{C}{m}t = C_3, \dots \dots \dots (63)$$

полученные выше, и три новые:

$$(x')^2 - 2 \frac{A}{m} x = C_4, \quad (y')^2 - 2 \frac{B}{m} y = C_5, \quad (z')^2 - 2 \frac{C}{m} z = C_6 \dots (64)$$

По исключеніи x, y, z изъ (63) и (64), мы получимъ вторые интегралы дифференціальныхъ уравненій примѣра 4-го подъ слѣдующимъ видомъ.

$$x = \frac{A}{m} \frac{t^2}{2} + C_4 t + \frac{C_4^2 - C_4}{2A} m, \quad y = \frac{B}{m} \frac{t^2}{2} + C_5 t + \frac{C_5^2 - C_5}{2B} m,$$

$$z = \frac{C}{m} \frac{t^2}{2} + C_6 t + \frac{C_6^2 - C_6}{2C} m.$$

Въ нѣкоторыхъ вопросахъ можно получить всѣ шесть самостоятельныхъ интеграловъ, но трудно исключить изъ нихъ x', y', z' , тогда совокупность шести первыхъ интеграловъ представляетъ собою рѣшеніе вопроса.

Во всякомъ случаѣ полное рѣшеніе какого-либо вопроса о движеніи свободной матеріальной точки заключаетъ въ себѣ шесть независимыхъ постоянныхъ произвольныхъ или величины $t_0, x_0, y_0, z_0, x'_0, y'_0, z'_0$.

Моментъ t_0 называютъ *начальнымъ моментомъ времени*, хотя онъ можетъ быть взятъ гдѣ угодно на протяженіи всего времени, занимаемаго разсматриваемымъ движеніемъ; величины x_0, y_0, z_0 называются координатами *начального положенія* матеріальной точки, а величины x'_0, y'_0, z'_0 — проэкціями на оси координатъ *начальной скорости* точки.

Въ тѣхъ случаяхъ, когда будетъ возможно и нужно для упрощенія формулъ, будемъ считать время отъ начального момента, полагая $t_0 = 0$; тогда начальные координаты будемъ обозначать буквами a, b, c , а проэкціи начальной скорости буквами α, β, γ .

§ 19. Случай прямолинейныхъ движеній матеріальной точки.

Начнемъ съ разсмотрѣнія тѣхъ случаевъ, въ которыхъ сила, приложенная къ матеріальной точкѣ, имѣетъ неизмѣнное направле-

ніе въ пространствѣ и начальная скорость параллельна тому же направленію; тогда матерьяльная точка совершаетъ движеніе по прямой, параллельной этому направленію.

Въ самомъ дѣлѣ, если ось X сдѣлаемъ параллельною этому направленію и проведемъ ее черезъ начальное положеніе матерьяльной точки, то дифференціальныя уравненія движенія будутъ:

$$mx''=X, \quad my''=0, \quad mz''=0;$$

первые и вторые интегралы послѣднихъ двухъ уравненій очевидно будутъ слѣдующіе:

$$y'=0, \quad z'=0,$$

потому что

$$y_0'=0 \quad \text{и} \quad z_0'=0,$$

и далѣе:

$$y=0, \quad z=0,$$

потому что

$$y_0=0, \quad z_0=0;$$

слѣдовательно, матерьяльная точка будетъ совершать свое движеніе по оси X .

Въ оставшемся дифференціальномъ уравненіи движенія точки

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = X \dots \dots \dots (65)$$

вторая часть X , выражающая величину и знакъ силы, приложенной къ точкѣ, можетъ быть функціею:

- а) одной изъ величинъ t, x, x' ,
- б) двухъ изъ нихъ,
- в) всѣхъ трехъ;

можемъ поэтому различать случаи семи родовъ:

- | | | |
|-----------------|--------------------|-------------------------|
| 1) $X=\phi(t)$ | 4) $X=\phi(x, x')$ | 7) $X=\phi(t, x, x')$. |
| 2) $X=\phi(x)$ | 5) $X=\phi(x', t)$ | |
| 3) $X=\phi(x')$ | 6) $X=\phi(t, x)$ | |

Случаи 1-го рода:

$$mx'' = \phi(t).$$

Первый интегралъ:

$$mx' - \phi(t) = C; \quad \phi(t) = \int \phi(t) dt.$$

Второй интегралъ:

$$mx - F(t) - Ct = \Gamma; \quad F(t) = \int \phi(t) dt.$$

Зависимость между произвольными постоянными и начальными обстоятельствами движенія:

$$mx_0' - \phi(t_0) = C, \quad mx_0 - F(t_0) - Ct_0 = \Gamma.$$

Исключивъ C и Γ изъ перваго и втораго интеграла, мы получимъ:

$$x' = x_0' + \frac{1}{m} \int_{t_0}^t \phi(t) dt \dots \dots \dots (66)$$

$$x = x_0 + x_0'(t - t_0) + \frac{1}{m} \int_{t_0}^t dt \int_{t_0}^t \phi(t) dt \dots \dots \dots (67) \quad 435 \quad 66$$

Примѣры: а) Паденіе матерьяльной точки вертикально сверху внизъ подъ вліяніемъ силы тяжести, принимаемой постоянною (ось X направлена вертикально, сверху внизъ).

$$mx' = mg, \quad x_0 = 0, \quad x_0' = \alpha > 0, \quad t_0 = 0.$$

б) Движеніе тяжелой матерьяльной точки, брошенной снизу вверхъ вертикально:

$$mx'' = mg, \quad t_0 = 0, \quad x_0 = 0, \quad x_0' = -\alpha, \quad \text{гдѣ } \alpha > 0.$$

Опредѣлить: высоту поднятія, время подъема и дальнѣйшее движеніе послѣ поднятія на наибольшую высоту.

Примѣръ 6-й.

$$X = m\lambda \sin \frac{2\pi}{T} t, \quad x_0 = 0, \quad x'_0 = 0, \quad t_0 = 0.$$

$$x = \frac{\lambda T}{2\pi} t - \lambda \left(\frac{T}{2\pi} \right)^2 \sin \frac{2\pi}{T} t;$$

точка совершаетъ колебательное движеніе около центра, движущагося равномерно со скоростью $\frac{\lambda T}{2\pi}$.

Случай 2-го рода.

$$mx'' = \Phi(x).$$

Это дифференціальное уравненіе можетъ быть замѣнено совокупностью двухъ дифференціальныхъ уравненій перваго порядка:

$$m \frac{dx'}{dt} = \Phi(x), \quad \frac{dx}{dt} = x',$$

которыя могутъ быть представлены такъ:

$$\frac{m dx'}{\Phi(x)} = \frac{dx}{x'} = dt.$$

Первый интеграль дифференціального уравненія втораго порядка получимъ, интегрируя двучленное уравненіе:

$$mx' dx' = \Phi(x) dx.$$

Этотъ интеграль — слѣдующій:

$$m(x')^2 - 2\phi(x) = C, \quad \phi(x) = \int \Phi(x) dx.$$

Второй интеграль даннаго дифференціального уравненія втораго порядка будетъ:

$$\sqrt{m} \int \frac{dx}{\sqrt{C + 2\phi(x)}} = t + \Gamma.$$

Зависимость между произвольными постоянными и начальными обстоятельствами движения:

$$m(x'_0)^2 - 2\phi(x_0) = C$$

$$F(x_0, x_0) = t_0 + \Gamma; \quad F(x, x_0) = \int_{x_0}^x \frac{\sqrt{m} dx}{\sqrt{m(x'_0)^2 + 2\phi(x) - 2\phi(x_0)}} = t + \Gamma;$$

Поэтому:

$$x' = \left((x'_0)^2 + \frac{2}{m} \int_{x_0}^x \phi(x) dx \right)^{\frac{1}{2}}, \dots \dots \dots (68)$$

$$t - t_0 = \int_{x_0}^x \frac{\sqrt{m} dx}{\left(m(x'_0)^2 + 2 \int_{x_0}^x \phi(x) dx \right)^{\frac{1}{2}}} \dots \dots \dots (69)$$

Примеры а и b: .

$$X = mg, \quad t_0 = 0, \quad x_0 = 0, \quad x'_0 = \pm \alpha.$$

Примеръ 7-й. $X = \mu^2 x$, то есть сила, дѣйствующая на материальную точку, есть сила, отталкивающая ее отъ начала координатъ O , и величина ея пропорціональна разстоянію отъ O .

Положимъ

$$t_0 = 0, \quad x_0 = a, \quad x'_0 = \alpha.$$

$$\frac{2}{m} \int_a^x \phi(x) dx = k^2(x^2 - a^2); \quad k = \frac{\mu}{\sqrt{m}}.$$

$$x' = \sqrt{\alpha^2 - k^2 a^2 + k^2 x^2} = k \sqrt{x^2 + p}; \quad p = \frac{\alpha^2}{k^2} - a^2.$$

Если начальная скорость α настолько велика, что $p > 0$, то x' не обращается въ нуль, а потому и не мѣняетъ своего знака во

время движенія; въ этихъ случаяхъ движеніе совершается безъ перемѣны направленія въ одну и ту же сторону оси X , а именно въ положительную, если $\alpha > 0$, и въ отрицательную, если $\alpha < 0$.

Если же $p < 0$, такъ что можно положить: $p = -n^2$, то выраженіе для x' будетъ:

$$x' = k\sqrt{x^2 - n^2};$$

оно показываетъ, что наименьшая величина, которую можетъ имѣть x^2 , есть n^2 , то есть, что матерьяльная точка не можетъ приблизиться къ началу координатъ на разстояніе, меньшее n ; когда x будетъ равно $\pm n$, тогда скорость сдѣлается равною нулю и послѣ этого направленіе движенія перемѣнится.

Далѣе:

$$\int_a^x \frac{dx}{\sqrt{x^2 + p}} = kt,$$

или

$$\log \left[\frac{x + \sqrt{x^2 + p}}{a + \frac{\alpha}{k}} \right] = kt; \quad x + \sqrt{x^2 + p} = \left(a + \frac{\alpha}{k} \right) e^{kt}; \dots \dots \dots (70)$$

отсюда

$$\frac{e^{-kt}}{a + \frac{\alpha}{k}} = \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + p}} = \frac{x - \sqrt{x^2 + p}}{a^2 - \frac{\alpha^2}{k^2}};$$

$$x - \sqrt{x^2 + p} = \left(a - \frac{\alpha}{k} \right) e^{-kt} \dots \dots \dots (71)$$

Сложивъ равенства (70) и (71), мы получимъ слѣдующее выраженіе движенія точки:

$$x = a \frac{e^{kt} + e^{-kt}}{2} + \frac{\alpha}{k} \frac{e^{kt} - e^{-kt}}{2} \dots \dots \dots (72)$$

Эта формула можетъ быть представлена въ болѣе сжатой формѣ,

но въ различномъ видѣ, смотря потому, каковы знаки величинъ $(ak + a)$ и $(ak - a)$.

а) Если эти величины имѣютъ одинаковые знаки, то, положивъ:

$$e^{k\tau} = \sqrt{\frac{a - \frac{a}{k}}{a + \frac{a}{k}}},$$

можно представить выраженіе для x такъ:

$$x = \frac{\sqrt{a^2 k^2 - a^2}}{2k} (e^{k\theta} + e^{-k\theta}); \quad \theta = t - \tau.$$

Такая зависимость x отъ t изобразится графически кривою линіею такого вида, какъ на чертежѣ 1-й, если изображать t абсциссами, а x ординатами. Вся кривая находится, или на сторонѣ положительныхъ, или на сторонѣ отрицательныхъ ординатъ; ON изображаетъ τ , т.-е. моментъ, въ который точка находится въ кратчайшемъ разстояніи отъ начала координатъ.

б) Если знаки вышеупомянутыхъ величинъ различны, то поло-

$$e^{k\theta} = \sqrt{\frac{\frac{a}{k} - a}{\frac{a}{k} + a}},$$

можно представить выраженіе для x такъ:

$$x = \frac{\sqrt{a^2 - a^2 k^2}}{2k} (e^{k\theta} - e^{-k\theta}); \quad \theta = t - \Theta.$$

Такая зависимость изобразится кривою такого вида, какъ на чертежѣ 2-й. Движеніе совершается со скоростью, не измѣняющею своего направленія; въ моментъ $ON = \Theta$ точка проходитъ черезъ начало координатъ.

с) Если

$$ak - a = 0,$$

то тогда

$$x = ae^{kt},$$

то есть точка асимптотически удаляется отъ начала координатъ въ безконечность.

d) Если

$$ak + \alpha = 0,$$

тогда

$$x = ae^{-kt},$$

то есть точка асимптотически приближается къ началу координатъ.

Примѣръ 8-й.

$$X = -\lambda^2 x, \quad t_0 = 0, \quad x_0 = a, \quad x'_0 = \alpha;$$

то есть сила, дѣйствующая на матерьяльную точку, есть притяженіе къ точкѣ O , прямо пропорціональное разстоянію отъ нея.

Въ этомъ случаѣ

$$x' = \omega \sqrt{q^2 - x^2}; \quad \omega = \frac{\lambda}{\sqrt{m}}; \quad q^2 = a^2 + \frac{\alpha^2}{\omega^2};$$

такъ какъ скорость должна имѣть во всякомъ случаѣ дѣйствительное значеніе, то x^2 не можетъ быть болѣе q^2 , и когда $x = \pm q$, скорость обращается въ нуль.

Далѣе

$$\int_a^x \frac{dx}{\sqrt{q^2 - x^2}} = \omega t,$$

или

$$\arcsin \frac{x}{q} - \arcsin \frac{a}{q} = \omega t;$$

откуда.

$$\frac{x}{q} = \sin\left(\omega t + \arcsin \frac{a}{q}\right) = \frac{a}{q} \cos \omega t + \frac{\sqrt{q^2 - a^2}}{q} \sin \omega t;$$

слѣдовательно

$$x = a \cos \omega t + \frac{\alpha}{\omega} \sin \omega t \dots \dots \dots (73)$$

Это выраженіе могло быть получено прямо изъ выраженія (72)

черезъ замѣщеніе величины k величиною $i\omega$, гдѣ $i = \sqrt{-1}$; крокъ того, оно согласуется съ выраженіемъ (45, а), удовлетворяющимъ тому же самому дифференціальному уравненію.

Изъ выраженія (73), а еще лучше изъ выраженія:

$$x = q \sin(\omega t + c); \quad c = \arcsin \frac{a}{q}$$

видно, что точка совершаетъ періодическое колебательное движеніе около начала O , отклоняясь на разстоянія $+q$ и $-q$ по обѣ стороны его; полный періодъ колебаній равенъ $2T$, гдѣ:

$$T = \frac{\pi}{\omega} = \pi \frac{\sqrt{m}}{\lambda}, \quad \frac{T}{2} = \frac{\pi}{2\omega} \dots \dots \dots (73 \text{ bis})$$

Случай 3-го рода:

$$mx'' = \phi(x').$$

Это дифференціальное уравненіе 2-го порядка можно замѣнить двумя дифференціальными уравненіями перваго порядка, которыя можно представить такъ:

$$m \frac{dx'}{\phi(x')} = \frac{dx}{x'} = dt.$$

Въ случаяхъ этого рода, смотря по обстоятельствамъ, можно рѣшать вопросъ различными способами.

А. Интегрировать уравненіе:

$$m \frac{dx'}{\phi(x')} = dt.$$

Если интегралъ его:

$$m \int \frac{dx'}{\phi(x')} = t + C_1 \dots \dots \dots (74)$$

можетъ быть рѣшенъ относительно x' , которое выразится нѣкоторою функціею ψ отъ $(t + C_1)$, то второй интегралъ даннаго дифференціального уравненія будетъ:

$$\int \psi(t + C_1) dt = x + C_2 \dots \dots \dots (75)$$

В. Интегрировать уравнение:

$$m \frac{x' dx'}{\phi(x')} = dx.$$

Если интегралъ его:

$$m \int \frac{x' dx'}{\phi(x')} = x + C_2 \dots \dots \dots (76)$$

можетъ быть рѣшенъ относительно x' , которое выразится нѣкоторою функціею Ψ отъ $(x + C_2)$, то второй интегралъ даннаго дифференціального уравненія будетъ:

$$\int \frac{dx}{\Psi(x + C_2)} = t + C_1 \dots \dots \dots (77)$$

С. Второй интегралъ можно получить или рассматривать, какъ результатъ исключенія x' изъ интеграловъ (74) и (76).

Примѣръ 9-й.

$$X = mg - mkx'.$$

Если положительная ось X направлена вертикально сверху внизъ, то такимъ образомъ будетъ выражаться равнодѣйствующая изъ вѣса матерьяльной точки и сопротивленія воздуха, если принимать послѣднее пропорціональнымъ первой степени скорости.

Въ этомъ примѣрѣ можно, кромѣ предыдущихъ пріемовъ, примѣнить слѣдующій.

Одинъ изъ первыхъ интеграловъ даннаго дифференціального уравненія втораго порядка:

$$x'' = g - kx'$$

будетъ слѣдующій:

$$x' = gt - kx + C$$

или

$$x' - a = gt - k(x - a).$$

Другой получится по формулѣ (74) и будетъ:

$$\int \frac{k dx'}{g - kx'} = kt + C_1,$$

или

$$\log\left(\frac{g - k\alpha}{g - kx'}\right) = kt.$$

Исключивъ x' изъ этихъ двухъ интеграловъ, мы получимъ результатъ:

$$x = \alpha + \frac{g}{k}t - \frac{1}{k}\left(\frac{g}{k} - \alpha\right)(1 - e^{-kt}) \dots\dots\dots (78)$$

Эта формула пригодна, какъ для восходящаго, такъ и для нисходящаго движенія матерьяльной точки; первое имѣетъ мѣсто только при $\alpha < 0$ и продолжается только до момента:

$$t_1 = \frac{1}{k} \log\left(1 - \frac{k\alpha}{g}\right),$$

въ который скорость обращается въ нуль и съ котораго начинается нисходящее движеніе. Во всякомъ случаѣ скорость съ теченіемъ времени асимптотически приближается къ предѣлу $+\frac{g}{k}$.*).

Примѣръ 10. Прямолинейное движеніе тяжелой матерьяльной точки въ средѣ, сопротивленіе которой пропорціонально кубу скорости; коэффициентъ сопротивленія среды означимъ черезъ mgk^3 .

$$mx'' = mg - mg(kx')^3.$$

Изъ дифференціальныхъ уравненій:

$$1 - \frac{dx'}{(kx')^3} = gdt, \quad \frac{x' dx'}{1 - (kx')^3} = gdx$$

составимъ слѣдующее:

$$\frac{dx'}{(kx')^3 + kx' + 1} = g(dt - kdx),$$

*). Изобразивъ зависимость (78) графически, получимъ кривую, изображенную на чертежѣ 3-мъ, выпуклость этой кривой постоянно обращена къ оси абциссъ; она имѣетъ асимптоту, наклоненную къ оси абциссъ подъ угломъ, тангенсъ котораго есть $\frac{g}{k}$; x имѣетъ наименьшую величину въ точкѣ M .

интегралъ котораго есть:

$$\frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \left(\frac{2kx' + 1}{\sqrt{3}} \right) = gk(t - kx) + C_1 \dots \dots \dots (79)$$

Полагая $t_0 = 0$, $x_0 = a$, $x'_0 = a$, получимъ для опредѣленія C_1 , равенство:

$$\frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \left(\frac{2ka + 1}{\sqrt{3}} \right) = C_1 - gk^2 a.$$

По исключеніи C_1 , равенство (79) получить слѣдующій видъ:

$$\frac{gk\sqrt{3}}{2} (t - k(x - a)) = \operatorname{arctg} \frac{2kx' + 1}{\sqrt{3}} - \operatorname{arctg} \frac{2ka + 1}{\sqrt{3}} \dots \dots (80)$$

Для полученія другаго перваго интеграла мы составимъ слѣдующее дифференціальное уравненіе:

$$\frac{1 + kx'}{1 - (kx')^3} dx' = g(dt + kdx),$$

интегралъ котораго — слѣдующій:

$$\log \frac{1 - (kx')^3}{(1 - ka)^3} = 3kg(t + kx) + C_2, \dots \dots \dots (81)$$

или

$$3kg(t + k(x - a)) = \log \frac{1 - (kx')^3}{(1 - ka)^3} - \log \frac{1 - (ka)^3}{(1 - ka)^3} \dots \dots \dots (82)$$

Совокупность первыхъ интеграловъ (79) и (81), или (80) и (82) представляетъ рѣшеніе задачи о движеніи тяжелой матерьяльной точки, брошенной вертикально вверхъ или внизъ и движущейся въ средѣ, сопротивляющейся пропорціонально кубу скорости; въ самомъ дѣлѣ, по формуламъ (80) и (82) можемъ вычислять t и x , соотвѣтствующія различнымъ скоростямъ.

Но можно исключить x' изъ этихъ интеграловъ и тогда получимъ второй интегралъ въ видѣ зависимости между величинами:

$$\xi = \frac{\sqrt{3}}{2} gk(t - k(x - a)), \quad \eta = \frac{3kg}{2} (t + k(x - a)),$$

и этотъ же интегралъ можно получить черезъ интегрированіе уравненія (80); результатъ будетъ слѣдующій:

$$\cos \xi - \frac{1 + ka}{1 - ka} \sqrt{3} \sin \xi = e^{-\eta} \dots \dots \dots (83)$$

Для опредѣленія момента t_1 и положенія x_1 наибольшаго подъема матеріальной точки при отрицательной начальной скорости, положимъ въ равенствахъ (80) и (82) $x' = 0$ и $a = -n$, гдѣ n означать положительную скорость; изъ нихъ получимъ слѣдующія выраженія:

$$t_1 = \frac{1}{3gk} \left[\log \frac{1+kn}{\sqrt{1-kn+(kn)^2}} + \sqrt{3} \operatorname{arctg} \frac{kn\sqrt{3}}{2-kn} \right] \dots (84)$$

$$-(x_1 - a) = \frac{1}{3gk^2} \left[\log \frac{\sqrt{1-kn+(kn)^2}}{1+kn} + \sqrt{3} \operatorname{arctg} \frac{kn\sqrt{3}}{2-kn} \right] \dots (85)$$

Примѣръ 11-й. Тяжелая матеріальная точка движется въ средѣ, сопротивление которой пропорціонально квадрату скорости. Въ этомъ случаѣ X выразится неодинаковымъ образомъ при паденіи точки сверху внизъ и при подъемѣ снизу вверхъ:

$$\text{при паденіи } X = m(g - k^2(x')^2),$$

$$\text{при подъемѣ } X = m(g + k^2(x')^2).$$

Дифференціальныя уравненія движенія будутъ:

$$\text{при паденіи } x'' = g - (kx')^2,$$

$$\text{при подъемѣ } x'' = g + (kx')^2;$$

разница между ними только въ знакѣ у k^2 , поэтому мы будемъ интегрировать только уравненіе для паденія точки, а чтобы перейти къ подъему, должны будемъ подставить въ результатѣ ik (гдѣ $i = \sqrt{-1}$) вмѣсто k .

Интегрировать уравненіе

$$x'' = g - (kx')^2$$

можно по всякому изъ указанныхъ способовъ; по способу А сначала получимъ интегралъ:

$$\int \frac{dx'}{g - (kx')^2} = t + C_1,$$

или

$$\frac{1}{2k\sqrt{g}} \log \left(\frac{\sqrt{g+kx'}}{\sqrt{g-kx'}} \right) = t + C_1;$$

потому что дробь, стоящая под знакомъ интеграла, можетъ быть разложена слѣдующимъ образомъ:

$$g - (kx')^2 = 2\sqrt{g} \left(\sqrt{g} \frac{1}{-kx'} + \sqrt{g + kx'} \right).$$

Предыдущее равенство, при положеніи $t_0=0$, $x'=a$, даетъ

$$\frac{1 + kx'}{1 - kx'} = \frac{1 + ka}{1 - ka} e^{2\epsilon t}, \dots \dots \dots (86)$$

гдѣ, для краткости, введены обозначенія:

$$\frac{k}{\sqrt{g}} = \kappa, \quad k\sqrt{g} = \epsilon.$$

Рѣшивъ равенство (86) относительно x' , получится уравненіе:

$$x' = \frac{1}{\kappa} \left[\frac{(1 + \kappa a)e^{\epsilon t} - (1 - \kappa a)e^{-\epsilon t}}{(1 + \kappa a)e^{\epsilon t} + 1 - \kappa a e^{-\epsilon t}} \right],$$

которое легко интегрируется и даетъ второй интегралъ дифференціального уравненія движенія:

$$x = a + \frac{1}{\kappa \epsilon} \log \left(\frac{e^{\epsilon t} + e^{-\epsilon t}}{2} + \kappa a \frac{e^{\epsilon t} - e^{-\epsilon t}}{2} \right)$$

или

$$x = a + \frac{1}{\kappa} \log \left(\cos(\epsilon t \sqrt{g}) - \frac{\kappa a}{\sqrt{g}} i \sin(\epsilon t \sqrt{g}) \right). \dots \dots (87)$$

По способу В мы должны начать съ интегрированія уравненія:

$$\frac{x' dx'}{g - (kx')^2} = dx;$$

получимъ

$$\frac{g - (kx')^2}{g - (ka)^2} = e^{2k^2(a-x)}; \dots \dots \dots (88)$$

продолжая дальше, мы придемъ къ тому же самому результату (87).

Чтобы получить выраженіе для движенія снизу вверхъ, надо положить скорость α отрицательною и замѣнить k черезъ ik , тогда выраженіе (87) приметъ слѣдующій видъ:

$$x = a - \frac{1}{k^2} \log \left(\cos(kt \sqrt{g}) + \frac{kn}{\sqrt{g}} \sin(kt \sqrt{g}) \right), \dots (89)$$

гдѣ поставлено $\alpha = -n$.

Равенство (88) при движеніи снизу вверхъ замѣняется слѣдующимъ.

$$\frac{g + (kx')^2}{g + (kn)^2} = e^{-2k^2(a-x)} \dots (90)$$

Наибольшая высота опредѣлится изъ послѣдняго равенства, положивъ въ немъ $x' = 0$; означимъ высоту поднятія $(a - x_1)$ черезъ h .

$$1 + \frac{k^2}{g} n^2 = e^{2k^2 h} \dots (91)$$

Движеніе, совершаемое матеріальною точкою по достиженіи ею наибольшей высоты, выразится уравненіями (86)—(88), если поставимъ въ нихъ $(t - t_1)$, x_1 и нуль вмѣсто t , a и α .

Скорость v , съ которою точка возвратится въ положеніе $x = a$, опредѣлится изъ (88):

$$1 - \frac{k^2}{g} v^2 = e^{2k^2(x_1 - a)} = e^{-2k^2 h}; \dots (92)$$

скорость эта оказывается меньшею n ; въ самомъ дѣлѣ, изъ (91) и (92) получимъ:

$$v = n e^{-k^2 h}.$$

Примѣръ 12-й. Прямолінейное движеніе тяжелой матеріальной точки въ средѣ, сопротивленіе которой выражается суммою двухъ членовъ: одного, пропорціональнаго первой степени, другаго, пропорціональнаго второй степени скорости.

Предполагая движеніе точки сверху внизъ, напишемъ дифференціальное уравненіе движенія:

$$mx'' = m(g - 2kx' - (\mu x')^2);$$

но мы можемъ этому уравненію придать также слѣдующій видъ:

$$\xi'' = g + \frac{k^2}{\mu^2} - \mu^2 (\xi')^2, \dots (93)$$

гдѣ:

$$\xi' = x' + \frac{k}{u_2}, \quad \xi = x + \frac{k}{u_2} t.$$

Дифференціальное же уравненіе (93) отличается отъ перваго изъ дифференціальныхъ уравненій предыдущаго примѣра только коэффициентами и значеніемъ зависимой переменнѣй, но не видомъ; а потому ссылаемся на результаты 11-го примѣра.

Въ случаяхъ 4—7 нельзя дать общихъ правилъ, хотя въ нѣкоторыхъ задачахъ можетъ быть произведено одно, а въ другихъ и два интегрированія; мы приведемъ здѣсь нѣсколько примѣровъ такихъ задачъ.

Изъ случаевъ 4-го рода:

$$mx'' = \Phi(x', x)$$

Примѣръ 13-й. Матерьяльная точка, притягиваемая къ началу координатъ силою, пропорціональною разстоянію отъ него, движется по оси X въ средѣ, сопротивленіе которой пропорціонально скорости точки.

Этотъ частный случай примѣра 3-го мы рассмотримъ здѣсь подробнѣе, чѣмъ въ § 18.

Дифференціальное уравненіе движенія:

$$mx'' = -2mkx' - m\lambda x$$

представимъ такъ:

$$x'' + 2kx' + k^2x = (k^2 - \lambda)x;$$

затѣмъ помножимъ обѣ части равенства на e въ степени kt и означимъ произведеніе изъ x на эту степень e черезъ φ ; тогда дифференціальное уравненіе получитъ слѣдующій видъ:

$$\varphi'' = (k^2 - \lambda)\varphi; \quad \varphi = xe^{kt},$$

а это есть дифференціальное уравненіе примѣра 7-го или 8-го, смотря по тому, каковъ знакъ разности $(k^2 - \lambda)$.

а) Если $(k^2 - \lambda)$ есть величина отрицательная, то, положивъ:

$$k^2 - \lambda = -\omega^2,$$

примѣнимъ формулу (73), которая въ этомъ случаѣ получитъ слѣдующій видъ:

$$\varphi = \varphi_0 \cos \omega t + \frac{\varphi'_0}{\omega} \sin \omega t;$$

но, такъ какъ:

$$\varphi_0 = a, \quad \varphi'_0 = ak + a,$$

то искомое выраженіе для x будетъ имѣть слѣдующій видъ:

$$x = e^{-kt} \left(a \cos (t\sqrt{\lambda - k^2}) + \frac{ak + a}{\sqrt{\lambda - k^2}} \sin (t\sqrt{\lambda - k^2}) \right) \dots (94)$$

Движеніе, выражаемое этимъ уравненіемъ, есть колебательное съ уменьшающимися размахами; сумма, заключенная въ большихъ скобкахъ, измѣняется періодически, такъ что въ моменты: $t, t+2T, t+4T, t+6T$, и т. д., она имѣетъ одну и ту же величину, если T есть слѣдующій промежутокъ времени:

$$T = \frac{\pi}{\sqrt{\lambda - k^2}} \dots \dots \dots (94 \text{ bis})$$

Въ эти моменты x будетъ имѣть слѣдующія величины:

$$Ae^{-kt}, Ae^{-kt} \cdot e^{-2kT}, Ae^{-kt} \cdot e^{-4kT}, Ae^{-kt} \cdot e^{-6kT}, \dots$$

гдѣ A есть величина упомянутой суммы въ моментъ t .

Отсюда видимъ, что величины x для этихъ моментовъ уменьшаются въ геометрической прогрессіи, отношеніе которой есть:

$$e^{-2kT}; \quad T = \frac{\pi}{\sqrt{\lambda - k^2}}.$$

Чертежъ 4-й изображаетъ законъ измѣненія x съ теченіемъ времени, выражаемый формулою (94).

б) Когда $k^2 = \lambda$, формула (94) приметъ слѣдующій видъ:

$$x = e^{-kt} (a + (ak + a)t), \dots \dots \dots (95)$$

потому что, при $k^2 = \lambda$:

$$\cos (t\sqrt{\lambda - k^2}) = 1, \quad \frac{\sin (t\sqrt{\lambda - k^2})}{\sqrt{\lambda - k^2}} = t.$$

Изъ формулы (95) получимъ слѣдующее выраженіе скорости:

$$x' = e^{-kt} (a - k(ak + a)t),$$

изъ котораго видно, что скорость обращается въ нуль при $t=t_1$,

$$t_1 = \frac{a}{k(ak + a)}$$

и при $t = \infty$.

Въ моментъ t_1 координата x_1 выражается такъ:

$$x_1 = e^{-kt_1} \left(a + \frac{a}{k} \right).$$

Формулу (95) можно преобразовать въ слѣдующему виду;

$$x = x_1 e^{-k\vartheta} (1 + k\vartheta); \quad \vartheta = t - t_1 \dots \dots \dots (95 \text{ bis})$$

На чертежѣ 5-мъ проведена кривая, изображающая законъ измѣненія x , выражаемый формулою (95) или (95 bis); наивысшая точка M соответствуетъ моменту t_1 ; при $t = t_1 - \frac{1}{k}$ точка проходитъ черезъ начало координатъ, а при $t = t_1 + \frac{1}{k}$ кривая имѣетъ точку перегиба.

с) Если $(k^2 - \lambda)$ есть величина положительная, то выраженіе (94) получить слѣдующій видъ:

$$x = e^{-kt} \left(a \cos(it\sqrt{k^2 - \lambda}) + \frac{ak + a}{i\sqrt{k^2 - \lambda}} \sin(it\sqrt{k^2 - \lambda}) \right), \dots (96)$$

или:

$$x = \frac{(aq + a)e^{-pt} - (ap + a)e^{-qt}}{q - p}, \dots \dots \dots (96 \text{ bis})$$

гдѣ $p = k - \sqrt{k^2 - \lambda}$ и $q = k + \sqrt{k^2 - \lambda}$ суть двѣ положительныя величины.

Въ тѣхъ вопросахъ, въ которыхъ функція $\phi(x, x')$ имѣетъ слѣдующій видъ:

$$\phi(x, x') = f(x) + (x')^2 \varphi(x),$$

всегда можно найти первый интегралъ дифференціального уравненія движенія; въ самомъ дѣлѣ, это уравненіе:

$$x'' = f(x) + \varphi(x)(x')^2$$

можно представить такъ:

$$x' \frac{dx'}{dx} - (x')^2 \varphi(x) = f(x),$$

или такъ.

$$\frac{du}{dx} - 2u\varphi(x) = 2f(x), \quad u = (x')^2;$$

а это есть обыкновенное линейное дифференціальное уравненіе перваго порядка, рѣшеніе котораго, какъ извѣстно, есть:

$$(x')^2 = u = e^{2\theta(x)} \left(C + 2 \int e^{-2\theta(x)} f(x) dx \right), \dots \dots (97)$$

гдѣ:

$$\theta(x) = \int \varphi(x) dx.$$

Примѣръ 14-й. Матеріальная точка притягивается къ началу координатъ силою, прямо пропорціальною разстоянію отъ него; движеніе ея происходитъ въ средѣ, плотность которой обратно пропорціовальна разстоянію отъ начала координатъ; эта среда оказываетъ движенію сопротивленіе, пропорціовальное плотности и квадрату скорости.

Начальное положеніе точки на положительной оси X въ разстояніи a отъ начала координатъ, начальная скорость равна нулю, опредѣлить движеніе.

Въ этомъ примѣрѣ $f(x) = -\mu^2 x$, функція же φ равна

$$\varphi(x) = \frac{k}{x},$$

если точка находится на положительной оси X и скорость ея направлена къ началу координатъ.

По формулѣ (97) составимъ равенство:

$$(x')^2 = x^{2k} \left(C - \frac{\mu^2}{1-k} x^{2-2k} \right);$$

опредѣлимъ C по начальнымъ обстоятельствамъ движенія; окажется:

$$C = \frac{\mu^2}{1-k} a^{2-2k}.$$

По извлеченіи корня и по отдѣленіи переменныхъ, получимъ дифференціальное уравненіе:

$$-\frac{x^{-k}dx}{\sqrt{a^2 - 2k - x^2 - 2k}} = \frac{\mu}{\sqrt{1-k}} dt,$$

интегралъ котораго:

$$\arccos \left(\frac{x}{a} \right)^{1-k} = t\mu\sqrt{1-k}$$

даетъ намъ выраженіе движенія точки:

$$x = a (\cos t\mu\sqrt{1-k})^{\frac{1}{1-k}}.$$

Движеніе, начавшееся въ моментъ $t=0$, кончается въ моментъ T :

$$T = \frac{\pi}{2\mu\sqrt{1-k}}; \dots\dots\dots (98)$$

въ этотъ моментъ точка приходитъ въ начало координатъ и скорость ея обращается въ нуль. Наибольшая скорость, которую имѣетъ точка во время движенія, равна:

$$a\mu k \left(\frac{k}{2(1-k)} \right).$$

Изъ случаевъ 7-го рода:

$$mx'' = \phi(t, x, x').$$

Примѣръ 15. Матерьяльная точка, движущаяся по оси X , притягивается къ точкѣ $Ю$, которая, въ свою очередь, движется по той же прямой по слѣдующему закону:

$$x_{ю} = \psi(t);$$

сила, притягивающая матерьяльную точку къ точкѣ $Ю$, пропорціональна разстоянію отъ нея, притомъ движеніе происходитъ въ неподвижной средѣ, оказывающей сопротивленіе, пропорціональное скорости.

Очевидно, дифференціальное уравненіе движенія будетъ слѣдующее:

$$mx'' = -m(2kx' + \lambda(x - x_{ю}))$$

пав:

$$x'' + 2kx' + \lambda x = \varphi(t); \quad \varphi(t) = \lambda \psi(t);$$

інтегрування його не представить затруднень, если известен видъ функціи φ .

Примѣръ 16. Заданіе отличается отъ заданія предыдущаго примѣра тѣмъ, что k и λ суть функціи времени, удовлетворяющія слѣдующему условию:

$$\lambda(t) - k^2(t) - \frac{dk(t)}{dt} = n^2, \dots\dots\dots (99)$$

гдѣ n есть величина постоянная.

Положимъ:

$$x = \xi e^{-\theta(t)}, \quad \theta(t) = \int k(t) dt$$

и принявъ во вниманіе условіе (99), мы приведемъ дифференціальное уравненіе къ слѣдующему:

$$\xi'' + n^2 \xi = \varphi e^{\theta}.$$

Примѣръ 17. Дифференціальное уравненіе движенія:

$$x'' + x'f(t) + x\lambda^2(t) = 0,$$

гдѣ f и λ суть двѣ функціи времени, удовлетворяющія слѣдующему условию:

$$\frac{f}{\lambda} + \frac{1}{\lambda^2} \frac{d\lambda}{dt} = 2n; \dots\dots\dots (100)$$

n — величина постоянная.

Положимъ въ дифференціальному уравненію:

$$x = \xi e^{\int \psi dt},$$

гдѣ ψ есть функція времени, удовлетворяющая дифференціальному уравненію перваго порядка:

$$\psi' + \psi^2 + \psi f + \lambda^2 = 0, \dots\dots\dots (101)$$

мы получимъ, для опредѣленія ξ , слѣдующее дифференціальное уравненіе:

$$\xi'' + (2\psi + f)\xi' = 0 \dots\dots\dots (102)$$

Дифференціальное уравненіе (101), на основаніи условія (100), можетъ быть приведено къ такому виду, при которомъ переменныя могутъ быть отдѣлены и интегрированіе произведено; окажется, что:

$$\psi = -n\lambda + \lambda\sqrt{1-n^2} \cotg\left(\sqrt{1-n^2} \int \lambda dt\right);$$

затѣмъ проинтегрируется уравненіе (102) и найдется слѣдующій результатъ:

$$x = Ce^{-n\theta} \sin(\Gamma + \theta\sqrt{1-n^2}); \quad \theta = \int \lambda dt.$$

Въ тѣхъ вопросахъ, которые требуютъ интегрированія дифференціального уравненія:

$$x'' + x'f(t) + (x')^2\varphi(x) = 0$$

всегда можетъ быть найденъ первый интегралъ; въ самомъ дѣлѣ, положивъ:

$$x' = \xi e^{-\int \varphi dx},$$

мы приведемъ дифференціальное уравненіе къ слѣдующему:

$$\xi' + \xi f(t) = 0;$$

а поэтому:

$$x' = Ce^{\psi}; \quad \psi = -\int \varphi(x) dx - \int f(t) dt. \dots (103)$$

§ 20. Вопросы объ опредѣленіи криволинейнаго движенія свободной матеріальной точки, въ которыхъ каждое изъ дифференціальныхъ уравненій втораго порядка интегрируется отдѣльно.

Переходя къ задачамъ и вопросамъ, относящимся къ криволинейнымъ движеніямъ матеріальныхъ точекъ, мы прежде всего упомянемъ о тѣхъ случаяхъ, въ которыхъ опредѣленіе движенія по каждой изъ координатъ можетъ быть произведено въ отдѣльности, то есть, когда каждое изъ дифференціальныхъ уравненій втораго порядка заключаетъ время, только одну изъ координатъ и ея производныя.

Къ числу такихъ случаевъ принадлежатъ тѣ, которые приведены въ § 18 подъ названіемъ примѣровъ 3-го, 4-го и 5-го; тамъ получены ихъ интегралы, здѣсь остается показать, каковы видъ траекторій.

Въ примѣрѣ 4-мъ сила имѣетъ неизмѣнное направленіе и постоянную величину:

$$P = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}.$$

Расположимъ оси координатъ такимъ образомъ, чтобы ось Y была параллельна направленію силы P , чтобы начало координатъ совпадало съ начальнымъ положеніемъ движущейся точки, чтобы начальная скорость заключалась въ плоскости XZ и чтобы эта скорость составляла острый уголъ съ осью X ; тогда дифференціальныя уравненія движенія будутъ:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = 0, \quad m \frac{d^2y}{dt^2} = P, \quad m \frac{d^2z}{dt^2} = 0;$$

начальные обстоятельства движенія:

$$a = 0, \quad b = 0, \quad c = 0, \quad \gamma = 0;$$

поэтому вторые интегралы будутъ слѣдующіе:

$$x = \alpha t, \quad y = \frac{gt^2}{2} + \beta t, \quad z = 0; \quad \dots \dots \dots (104)$$

здѣсь g подставлено вмѣсто частнаго: ($P: m$).

Уравненія (104) отличаются отъ уравненій, приведенныхъ на стр. 7-й кинематической части (примѣръ 3-й), только знакомъ передъ произведеніемъ βt .

Означивъ черезъ v_0 величину начальной скорости и черезъ $\left(\frac{\pi}{2} + \omega\right)$ — уголъ, составляемый ею съ положительною осью Y , мы получимъ слѣдующее извѣстное уравненіе параболической траекторіи тяжелой матерьяльной точки, брошенной въ пустотѣ подъ угломъ ω къ горизонту:

$$y = -xtg\omega + \frac{gx^2}{2v_0^2 \cos^2 \omega} \dots \dots \dots (105)$$

Въ примѣрѣ 5-мъ мы ограничимся указаніемъ на видъ траекторіи въ томъ случаѣ, когда:

$$x_1 = x_2 = x_3 = x;$$

т.-е. когда на точку дѣйствуетъ притяженіе къ началу координатъ пропорціональное разстоянію отъ него.

Въ этомъ случаѣ дифференціальныя уравненія движенія будутъ:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\kappa x, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = -\kappa y, \quad \frac{d^2z}{dt^2} = -\kappa z;$$

они сохраняютъ тотъ же видъ, если мы перемѣнимъ направленія прямоугольныхъ осей какимъ бы то ни было образомъ; то есть, если мы отнесемъ движущуюся точку къ другимъ неподвижнымъ прямоугольнымъ осямъ E, Y, Z , имѣющимъ то же самое начало, то, въ новыхъ координатахъ ξ, η, ζ дифференціальныя уравненія получаютъ тотъ же самый видъ:

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} = -\kappa \xi, \quad \frac{d^2\eta}{dt^2} = -\kappa \eta, \quad \frac{d^2\zeta}{dt^2} = -\kappa \zeta.$$

Возьмемъ за плоскость EY ту плоскость, проходящую черезъ начальное положеніе точки, которая заключаетъ въ себѣ направленіе начальной скорости; тогда $\zeta_0 = 0$, $\zeta'_0 = 0$, а потому выраженія (45) будутъ слѣдующія:

$$\xi = \xi_0 \cos \kappa \vartheta + \frac{\xi'_0}{\kappa} \sin \kappa \vartheta$$

$$\eta = \eta_0 \cos \kappa \vartheta + \frac{\eta'_0}{\kappa} \sin \kappa \vartheta$$

$$\zeta = 0.$$

Траекторія, заключающаяся въ плоскости EY , есть эллипсъ, центръ котораго находится въ началѣ координатъ (см. въ кинематической части на стр. 50 задачу 5-ю).

Если въ примѣрѣ 3-мъ возьмемъ случай:

$$\mu = \nu = \lambda; \quad \lambda - k^2 > 0,$$

то, подобно какъ и въ предыдущемъ примѣрѣ, убѣдимся, что траекторія будетъ кривая плоская; допустимъ прямо, что траекторія заключается въ плоскости XU , тогда выраженія (46) примутъ слѣдующій видъ:

$$z=0, \quad x=e^{-kt}(a \cos \varepsilon t + \alpha_1 \sin \varepsilon t), \quad y=e^{-kt}(b \cos \varepsilon t + \beta_1 \sin \varepsilon t),$$

гдѣ

$$\varepsilon = \sqrt{\lambda - k^2}, \quad \alpha_1 = \frac{a + ka}{\varepsilon}, \quad \beta_1 = \frac{b + kb}{\varepsilon};$$

a и b суть координаты начального положенія, α и β — проекціи начальной скорости на оси координатъ.

Чтобы уяснить себѣ движеніе точки M , представимъ себѣ другую точку $N(x_1, y_1)$, движущуюся по закону:

$$x_1 = a \cos \varepsilon t + \alpha_1 \sin \varepsilon t, \quad y_1 = b \cos \varepsilon t + \beta_1 \sin \varepsilon t;$$

какъ видно изъ предыдущаго (5-го) примѣра, точка N будетъ описывать нѣкоторый эллипсъ, имѣющій центръ въ началѣ координатъ.

Точка M будетъ находиться на радіусѣ векторѣ точки N , но будетъ асимптотически приближаться къ началу координатъ, такъ что, если черезъ ρ и ρ_1 означимъ длины радіусовъ векторовъ OM и ON , то будетъ:

$$\rho = \rho_1 e^{-kt};$$

слѣдовательно, точка M описываетъ вокругъ начала координатъ нѣкоторую спираль логарифмическаго характера (черт. 6).

Примѣръ 18-й. Движеніе точки при дѣйствіи силы тяжести въ сопротивляющейся средѣ, сопротивленіе которой пропорціонально первой степени скорости.

Ось Z расположимъ вертикально снизу вверхъ, то есть противоположно направленію силы тяжести. Начало координатъ совмѣстимъ съ начальнымъ положеніемъ точки и ось Y направимъ такъ, чтобы начальная скорость заключалась въ плоскости YZ . Тогда начальныя обстоятельства движенія будутъ:

$$t_0=0, \quad a=0, \quad b=0, \quad c=0, \quad \alpha=0, \quad \beta=v_0 \cos \theta_0, \quad \gamma=v_0 \sin \theta_0,$$

гдѣ v_0 означаетъ начальную скорость; θ_0 — начальный уголъ, составляемый скоростью съ осью Y ; съ осью Z она составляетъ уголъ $(\frac{\pi}{2} - \theta_0)$.

Изъ трехъ дифференціальныхъ уравненій движенія:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = 0, \quad m \frac{d^2y}{dt^2} = -mk \frac{dy}{dt}, \quad m \frac{d^2z}{dt^2} = -m(g + k \frac{dz}{dt})$$

первое даетъ, на основаніи начальныхъ условій, результатъ $x=0$, выражающій, что движеніе происходитъ въ плоскости YZ .

Третье дифференціальное уравненіе отличается отъ дифференціального уравненія примѣра 9-го тѣмъ, что вмѣсто x здѣсь находятся $(-z)$, возьмемъ поэтому формулу (78) и подставимъ въ нее: $(-z)$, нуль и $(-\gamma)$ вмѣсто x , a и α , получимъ, при измѣненіи знаковъ въ обѣихъ частяхъ равенства:

$$z = \frac{1}{k} \left(\gamma + \frac{g}{k} \right) (1 - e^{-kt}) - \frac{g}{k} t. \dots\dots\dots (106)$$

Чтобы перейти отъ третьяго дифференціального уравненія ко второму, надо замѣнить g — нулемъ и z черезъ y ; поэтому сдѣлаемъ подобныя же замѣненія въ формулѣ (106) и сверхъ того замѣнимъ γ черезъ β ; получимъ тогда второй интеграль второго дифференціального уравненія:

$$y = \frac{\beta}{k} (1 - e^{-kt}) \dots\dots\dots (107)$$

Полученные результаты (106) и (107) выражаютъ координаты y , z въ функціяхъ времени; составленіе уравненія траекторіи и разсмотрѣніе вида ея сдѣлано на стр. 51 — 51 кинематической части (черт. 30 тамъ же). Уравненіе траекторіи — слѣдующее:

$$z = \left(\frac{g}{k\beta} + \frac{\gamma}{\beta} \right) y + \frac{g}{k^2} \log \left(1 - \frac{ky}{\beta} \right);$$

если разложить логарифмъ въ рядъ, то получимъ:

$$z = \frac{\gamma}{\beta} y - g \left(\frac{y^2}{2\beta^2} + \frac{ky^3}{3\beta^3} + \frac{k^2 y^4}{4\beta^4} + \dots \right).$$

Положивъ здѣсь $k=0$, мы получимъ уравненіе траекторіи въ пустотѣ:

$$z_1 = \frac{\gamma}{\beta} y - \frac{gy^2}{2\beta^2} \dots\dots\dots (108)$$

Изъ этихъ двухъ равенствъ слѣдуетъ:

$$z = z_1 - g \left(\frac{ky^2}{3\beta^2} + \frac{k^2y^4}{4\beta^4} + \dots \right),$$

то есть, что, при одной и той же абсциссѣ, ордината траекторіи въ сопротивляющейся средѣ менѣе ординаты параболической траекторіи.

§ 21. Два приема преобразования дифференціальныхъ уравненій движенія свободной матерьяльной точки.

Общіе способы, слѣдующіе которымъ можно было бы рѣшить всякую задачу о криволинейномъ движеніи точки при дѣйствіи какихъ бы то ни было силъ, неизвѣстны; извѣстны только нѣкоторые приемы преобразования дифференціальныхъ уравненій движенія, при примѣненіи которыхъ можно получить нѣкоторые изъ первыхъ интеграловъ, если приложенныя къ матерьяльной точкѣ силы удовлетворяютъ нѣкоторымъ условіямъ.

1. Одинъ изъ этихъ приемовъ заключается въ слѣдующемъ.

Помножимъ третье изъ дифференціальныхъ уравненій движенія:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = X, \quad m \frac{d^2y}{dt^2} = Y, \quad m \frac{d^2z}{dt^2} = Z. \dots\dots\dots (36)$$

на y и придадимъ къ нему второе, помноженное на $(-z)$; составится равенство:

$$m \left(y \frac{d^2z}{dt^2} - z \frac{d^2y}{dt^2} \right) = yZ - zY, \dots\dots\dots (109)$$

первая часть котораго есть производная отъ

$$m \left(y \frac{dz}{dt} - z \frac{dy}{dt} \right)$$

по t ; поэтому равенство это (109) можетъ быть написано такъ:

$$\frac{d \left[m \left(y \frac{dz}{dt} - z \frac{dy}{dt} \right) \right]}{dt} = yZ - zY \dots\dots\dots (110 a)$$

Помножимъ первое изъ уравненій (36) на z и придадимъ къ нему третье, помноженное на $(-x)$, получимъ:

$$\frac{d \left[m \left(z \frac{dx}{dt} - x \frac{dz}{dt} \right) \right]}{dt} = zX - xZ; \dots\dots\dots (110 b)$$

наконецъ, помноживъ второе изъ уравненій (36) на x и придавъ къ нему первое, помноженное на $(-y)$, получимъ:

$$\frac{d \left[m \left(x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} \right) \right]}{dt} = xY - yX \dots\dots\dots (110 c)$$

Въ слѣдующихъ параграфахъ будетъ объяснено значеніе разностей, находящихся во вторыхъ частяхъ полученныхъ дифференціальныхъ уравненій (110, a, b, c); затѣмъ будетъ показано, какіе интегралы получаются изъ этихъ уравненій и при какихъ условіяхъ.

2. Другой пріемъ, при посредствѣ котораго изъ уравненій (36) составляется дифференціальное уравненіе, легко интегрирующееся при нѣкоторыхъ условіяхъ, состоитъ въ томъ, что первое изъ уравненій (36) помножается на x' , второе — на y' , третье — на z' и затѣмъ, по сложеніи, составляется уравненіе:

$$m \left(x' \frac{dx'}{dt} + y' \frac{dy'}{dt} + z' \frac{dz'}{dt} \right) = X \frac{dx}{dt} + Y \frac{dy}{dt} + Z \frac{dz}{dt},$$

первая часть котораго есть, очевидно, производная по времени отъ слѣдующаго тричлена:

$$\frac{m}{2} \left((x')^2 + (y')^2 + (z')^2 \right),$$

выражающаго половину произведенія изъ массы на квадратъ скорости матерьяльной точки; поэтому, полученное дифференціальное уравненіе можно написать такъ:

$$\frac{d \left(\frac{m}{2} v^2 \right)}{dt} = X \frac{dx}{dt} + Y \frac{dy}{dt} + Z \frac{dz}{dt} \dots\dots\dots (111)$$

Помноживъ обѣ части этого дифференціального уравненія на dt , получимъ:

$$d\left(\frac{m}{2} v^2\right) = Xdx + Ydy + Zdz \dots\dots\dots (112)$$

Значеніе первой и второй частей этого дифференціального уравненія будетъ объяснено въ одномъ изъ слѣдующихъ параграфовъ и затѣмъ будетъ указано, какой интеграль получается изъ этого уравненія и при какихъ условіяхъ.

§ 22. Значеніе вторыхъ частей дифференціальныхъ уравненій (110). Моментъ силы, приложенной къ материальной точкѣ, вокругъ даннаго центра и вокругъ данной оси.

Чтобы объяснять себѣ значеніе разностей:

$$yZ - zY \quad zX - xZ \quad xY - yX, \dots\dots\dots (113)$$

заключающихся во вторыхъ частяхъ дифференціальныхъ уравненій (110), мы сравнимъ ихъ со вторыми частями формулъ (96) кинематической части (стр. 85), которыя мы напомнимъ при предположеніи, что точка M (черт. 41 и 42 кинематич. части) взята за начало координатъ; вторыя части равенствъ (96) получаютъ тогда слѣдующій видъ:

$$y_o R - z_o Q \quad z_o P - x_o R \quad x_o Q - y_o P. \dots\dots\dots (114)$$

Припомнимъ, что эти разности выражаютъ величины проецій на оси координатъ вращательной скорости $\overline{M\omega}$ точки M вокругъ полюса O и что длина, изображающая эту скорость, направлена изъ точки M перпендикулярно къ плоскости, заключающей въ себѣ радіусъ векторъ \overline{MO} и длину $\overline{O\omega}$ (чертежъ 41 кинематической части), изображающую угловую скорость твердаго тѣла; направлена длина $\overline{M\omega}$ въ ту изъ двухъ сторонъ перпендикуляра къ плоскости, съ которой наблюдателю, стоящему ногами въ M , головою по направленію $\overline{M\omega}$, смотрящему на точку O , видно, что длина $\overline{O\omega}$ направлена слѣва на право.

Формулы (96) кинематической части и написанныя здѣсь разности (114) относятся къ кинематикѣ твердаго тѣла, между тѣмъ какъ разности (113) относятся къ движенію свободной матеріальной точки; первыя приведены здѣсь только для того, чтобы, на основаніи сходства вида ихъ со вторыми, по возможности нагляднѣе объяснить значеніе послѣднихъ.

Если въ разностяхъ (114) замѣнять:

величины x_0, y_0, z_0 — величинами x, y, z ,

величины P, Q, R — величинами X, Y, Z ,

то получатся разности (113).

Однако слѣдуетъ замѣтить, что P, Q, R , какъ проэкціи на оси координатъ угловой скорости Ω , имѣютъ измѣренія:

$$\frac{1}{(\text{единица времени})} = \frac{1}{\sigma},$$

между тѣмъ какъ X, Y, Z — проэкціи силы F на тѣ же оси координатъ. — имѣютъ измѣренія:

$$\frac{(\text{единица массы}) (\text{единица длины})}{(\text{единица времени})^2} = \frac{m \cdot \sigma}{\sigma^2}.$$

(Примѣчаніе. Символы: (единица массы), (единица длины), (единица времени) мы условимся обозначать, для краткости, буквами: m, σ, σ русскаго курсивнаго шрифта).

Для того, чтобы разности (114), имѣющія измѣренія скорости, получили значенія проэкцій длины, необходимо помножить ихъ на величину σ .

Разности (113) имѣютъ слѣдующія измѣренія:

$$\frac{m \cdot \sigma^2}{\sigma^2};$$

если помножить ихъ на величину:

$$\frac{\sigma^2}{m \cdot \sigma},$$

то полученнаго произведенія:

$$(yZ - zY)_{\text{м.д.}}^{\sigma^2}, (zX - xZ)_{\text{м.д.}}^{\sigma^2}, (xY - yX)_{\text{м.д.}}^{\sigma^2} \dots \quad (115)$$

будутъ имѣть измѣренія длины и будутъ представлять проэкціи на оси координатъ длины, возстановленной изъ точки O перпендикулярно къ плоскости, проведенной черезъ радіусъ вектора OM (черт. 7) матеріальной точки $M(x, y, z)$ и черезъ силу F , приложенную къ точкѣ M ; эта длина \overline{OL} направлена въ ту изъ двухъ сторонъ перпендикуляра къ плоскости, съ которой наблюдателю, стоящему ногами въ O , головою по направленію OL , смотрящему на точку M , видно, что сила MF направлена слева на право (черт. 7).

Такимъ же образомъ, какъ на страницахъ 89 и 90 кинематической части, мы выведемъ, что квадратъ длины OL равняется:

$$(\overline{OL})^2 = [(X^2 + Y^2 + Z^2)(x^2 + y^2 + z^2) - (xX + yY + zZ)^2] \left(\frac{\sigma^2}{\text{м.д.}} \right)^2;$$

или

$$(\overline{OL})^2 = [(\overline{MF})^2 \cdot (\overline{OM})^2 - (\overline{MF} \cdot \overline{OM} \cos(MF, OM))^2] \left(\frac{\sigma^2}{\text{м.д.}} \right)^2.$$

Заключающійся въ этой формулѣ уголъ между направленіями OM и MF есть уголъ $\angle MF$ (черт. 7), синусъ котораго равенъ синусу угла OMF , поэтому:

$$\overline{OL} = (\overline{MF} \cdot \overline{OM} \sin(OMF)) \frac{\sigma^2}{\text{м.д.}}$$

или

$$OL = (Fr \sin(F, r))_{\text{м.д.}}^{\sigma^2},$$

гдѣ r означаетъ величину и направленіе радіуса вектора \overline{OM} .

Произведеніе:

$$p = r \sin(F, r)$$

выражает длину перпендикуляра OD , опущеннаго изъ точки O на направленіе силы \overline{MF} ; этотъ перпендикуляръ, представляющій кратчайшее разстояніе силы \overline{MF} отъ точки O , называется *плечомъ* силы F по отношенію къ центру O .

Произведение Fp изъ величины силы, приложенной къ материальной точкѣ, на плечо ея по отношенію къ какому-либо центру называется моментомъ этой силы вокругъ этого центра.

И такъ:

$$OL = Fp_{\text{м.о.}}^{a^2}, \dots\dots\dots (116)$$

то есть, длина OL равняется моменту силы \overline{MF} вокругъ центра O , дѣленному на единицу силы (символь единицы силы: см. формулу (29)).

Единица моментовъ силъ есть моментъ единицы силы при длинѣ плеча, равной единицѣ; т. е.

$$(\text{единица моментовъ силъ}) = \frac{\text{м. д}^2}{a^2}.$$

Моментъ силы вокругъ центра имѣетъ всегда величину положительную.

Длину OL можно разсматривать какъ изображеніе момента Fp ; изображенный такимъ образомъ моментъ силы можно назвать *линейнымъ изображеніемъ момента* *) силы вокругъ центра O .

Величины (115), которыя суть проеціи длины OL на оси координатъ:

$$\left. \begin{aligned} (yZ - zY)_{\text{м.о.}}^{a^2} &= \overline{OL} \cos(\overline{OL}, X) \\ (zX - xZ)_{\text{м.о.}}^{a^2} &= \overline{OL} \cos(\overline{OL}, Y) \\ (xY - yX)_{\text{м.о.}}^{a^2} &= \overline{OL} \cos(\overline{OL}, Z) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (117)$$

*) Пръ изведеніе Fp называютъ различно. статическимъ моментомъ, линейнымъ моментомъ, вращательнымъ моментомъ; надобность въ какомъ либо прилагательномъ къ слову „моментъ“ явилась вслѣдствіе того, что это слово получило въ механикѣ нѣсколько различныхъ значеній; въ терминѣ, принятомъ въ этой книгѣ, прилагательное замѣняется словами „вокругъ центра такого-то“.

могутъ быть названы *проекціями на оси координатъ линейнаго изображенія момента силы вокругъ центра O.*

На основаніи равенства (116), изъ предыдущихъ формулъ можно получить слѣдующія равенства:

$$\left. \begin{aligned} yZ - zY &= Fp \cos(OL, X) \\ zX - xZ &= Fp \cos(OL, Y) \\ xY - yX &= Fp \cos(OL, Z) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (118)$$

Моментъ силы вокругъ центра можетъ быть еще изображенъ удвоенною площадью треугольника OMF , имѣющаго основаніемъ длину \overline{MF} , изображающую силу, а высотой — плечо \overline{OD} этой силы по отношенію къ тому центру O , вокругъ котораго составляется моментъ; величина этой площади равна

$$Fp_m^{p'},$$

а линія \overline{OL} нормальна къ ней; поэтому изъ равенствъ (118) слѣдуетъ, что величины:

$$(yZ - zY)_m^{p^2}, (zX - xZ)_m^{p^2}, (xY - yX)_m^{p^2} \dots (119)$$

равны положительно или отрицательно взятымъ проекціямъ удвоенной площади треугольника OMF на плоскости координатъ:

$$YZ \quad ZX \quad XY;$$

знакъ проекціи опредѣляется знакомъ косинуса угла, составляемаго направленіемъ \overline{OL} съ направленіемъ положительной оси:

$$X \quad Y \quad Z.$$

Чтобы выразиться опредѣлительнѣе, означимъ знаками:

$$F_{yz} \quad F_{zx} \quad F_{xy}$$

величины и направленія проэкцій силы F на вышеозначенныя плоскости координатъ и чрезъ:

$$r_{yz} \quad r_{zx} \quad r_{xy}$$

означимъ величины и направленія проэкцій радіуса вектора \overline{OM} на тѣ же плоскости; тогда значеніе разностей (113) можно выразить слѣдующимъ образомъ:

$$\left. \begin{aligned} yZ - zY &= \begin{cases} +F_{yz}r_{yz} \sin(F_{yz}, r_{yz}), \text{ если } \cos(\overline{OL}, X) > 0 \\ -F_{yz}r_{yz} \sin(F_{yz}, r_{yz}), \text{ если } \cos(\overline{OL}, X) < 0 \end{cases} \\ zX - xZ &= \begin{cases} +F_{zx}r_{zx} \sin(F_{zx}, r_{zx}), \text{ если } \cos(\overline{OL}, Y) > 0 \\ -F_{zx}r_{zx} \sin(F_{zx}, r_{zx}), \text{ если } \cos(\overline{OL}, Y) < 0 \end{cases} \\ xY - yX &= \begin{cases} +F_{xy}r_{xy} \sin(F_{xy}, r_{xy}), \text{ если } \cos(\overline{OL}, Z) > 0 \\ -F_{xy}r_{xy} \sin(F_{xy}, r_{xy}), \text{ если } \cos(\overline{OL}, Z) < 0 \end{cases} \end{aligned} \right\} \quad (120)$$

Въ самомъ дѣлѣ, проэкція площади треугольника OMF на плоскость YZ есть площадь треугольника OM_1F_1 (черт. 8 и 9), двѣ стороны котораго суть: $\overline{OM_1}$ (черт. 8 и 9) — проэкція радіуса вектора \overline{OM} на плоскость YZ , и $\overline{M_1F_1}$ — проэкція силы \overline{MF} на ту же плоскость; величина удвоенной площади треугольника OM_1F_1 выражается произведеніемъ:

$$2 \text{ (плоч. } OM_1F_1) = \frac{\sigma^2}{m} F_{yz} r_{yz} \sin(F_{yz}, r_{yz}),$$

которое есть величина всегда положительная, также какъ и площади OMF и OM_1F_1 ; поэтому:

$$\begin{aligned} 2(\text{плоч. } OMF) \cos(\overline{OL}, X) &= 2(\text{плоч. } OM_1F_1) = \\ &= \frac{\sigma^2}{m} F_{yz} r_{yz} \sin(F_{yz}, r_{yz}), \end{aligned}$$

если уголъ между направлениемъ \overline{OL} и положительною осью X острый (черт. 8), и

$$2(\text{плоч. } OMF) \cos(OL, X) = -2(\text{плоч. } OM_1F_1) = \\ = -\frac{\sigma^2}{m} F_{yz} r_{yz} \sin(F_{yz} r_{yz}),$$

если уголъ между направлениемъ \overline{OL} и положительною осью X тупой (черт. 9).

Этимъ объясняется, почему изъ выражений (118) получаются выраженія (120).

Заключающіяся во вторыхъ частяхъ формулъ (120) произведенія:

$$r_{yz} \sin(F_{yz} r_{yz}) \quad r_{zx} \sin(F_{zx} r_{zx}) \quad r_{xy} \sin(F_{xy} r_{xy}),$$

выражаютъ длины кратчайшихъ разстояній между силою \overline{MF} и осями координатъ X , Y , Z ; мы докажемъ это относительно перваго изъ написанныхъ произведений.

Произведение

$$r_{yz} \sin(F_{yz} r_{yz})$$

выражаетъ длину OD_1 (черт. 10) перпендикуляра опущеннаго изъ точки O на линію M_1F_1 ; кратчайшее же разстояніе KE между осью X и линією \overline{MF} равно и параллельно перпендикуляру OD_1 , потому что, подобно ему, пересѣкаетъ ось X и перпендикулярно къ плоскости MM_1F_1F , проектирующей линію MF на плоскость YZ ; эта плоскость MM_1F_1F проходитъ черезъ линію \overline{MF} и параллельна оси X , поэтому кратчайшее разстояніе между этими двумя линіями должно быть къ ней перпендикулярно.

Такимъ образомъ оказывается, что каждыя изъ разностей (113) есть положительно или отрицательно взятое произведение изъ проекціи силы F на одну изъ плоскостей координатъ и изъ кратчайшаго разстоянія этой силы отъ координатной оси, перпендикулярной къ той плоскости, на которую взята проекція силы; подобныя произведенія называются моментами силъ вокругъ осей.

Пусть OP есть какая-либо ось, положительное направление которой считается отъ O къ P ; пусть MF есть какая-либо сила, приложенная къ материальной точкѣ M .

Моментомъ силы MF вокругъ оси OP называется произведение изъ проекции силы на плоскость перпендикулярную къ оси (черт. 11 и 12) и изъ кратчайшаго разстоянія KE между силою и осью: произведению этому должно дать положительный знакъ, если наблюдателю, стоящему ногами въ K , головою по положительному направлению оси KP , смотрящему на точку M_1 , видно, что проекция силы идетъ слева на право (какъ на черт. 11); если же наблюдателю видно, что проекция $\overline{M_1F_1}$ направлена справа на лево (какъ на черт. 12), то тогда моментъ силы вокругъ оси равняется вышеказанному произведению, взятому со знакомъ минусъ.

Моментъ силы вокругъ оси измѣряется тѣми же самыми единицами, какъ и моментъ силы вокругъ центра.

По данному сейчасъ опредѣленію, разности (113) оказываются моментами силы F вокругъ осей координатъ.

Другія значенія этихъ разностей опредѣляются формулами (118), которыя мы выразимъ словесно слѣдующимъ образомъ:

Разности (113) суть проекции на оси координатъ момента силы F вокругъ начала координатъ.

Выражаясь такъ, мы приписываемъ моменту силы вокругъ центра не только величину, но и направление, подразумѣвая подъ направлениемъ момента — направление его линейнаго изображенія.

Условимся обозначать величину и направление момента силы F вокругъ центра O знакомъ:

$$L_o(F).$$

Этимъ знакомъ будемъ пользоваться повидѣе, а именно въ тѣхъ случаяхъ, въ которыхъ придется различать моменты различныхъ

силъ, приложенныхъ въ одной или въ нѣсколькихъ точкахъ; такъ, наприимѣръ, моменты силъ F_1, F_2, \dots будемъ обозначать знаками:

$$L_0(F_1), L_0(F_2), \dots;$$

въ разсужденіяхъ же, относящихся къ одной силѣ и моменту ея, гдѣ не предвидится возможности смѣшать этотъ моментъ съ другими величинами того же рода, мы упростимъ обозначеніе и вмѣсто $L_0(F)$ будемъ писать L_0 .

Изъ того, что сказано въ этомъ параграфѣ, слѣдуетъ: $(yZ - zY)$ есть моментъ силы F , приложенной къ точкѣ M , вокругъ оси X , или проекція на ту же ось момента силы вокругъ начала координатъ:

$$yZ - zY = L_0 \cos(L_0 X); \dots \dots \dots (121, a)$$

$(zX - xZ)$ есть моментъ силы F вокругъ оси Y , или проекція на ту же ось момента этой силы вокругъ начала координатъ:

$$zX - xZ = L_0 \cos(L_0 Y); \dots \dots \dots (121, b)$$

$(xY - yX)$ есть моментъ силы F вокругъ оси Z , или проекція на ту же ось момента этой силы вокругъ начала координатъ:

$$xY - yX = L_0 \cos(L_0 Z); \dots \dots \dots (121, c)$$

Вообще, моментъ силы F вокругъ какой-либо оси PO , проходящей черезъ начало координатъ, есть проекція на ту же ось момента силы вокругъ начала координатъ:

$$\begin{aligned} & (\text{мом. силы } F \text{ вокругъ оси } OP) = \\ & = (yZ - zY) \cos(PX) + (zX - xZ) \cos(PY) + (xY - yX) \cos(PZ) = \\ & = L_0 \cos(L_0 P); \dots \dots \dots (122) \end{aligned}$$

§ 23. Моментъ количества движенія матерьяльной точки вокругъ центра и вокругъ данной оси. Секторьяльные скорости проэкцій точки на плоскости координатъ.

Произведеніе изъ скорости матерьяльной точки на массу ея

называется *количествомъ движенія матерьяльной точки*; оно измѣряется слѣдующею единицею:

$$(\text{единица количества движенія}) = \frac{m \cdot d}{\theta} \dots \dots \dots (123)$$

Подобно силѣ, количество движенія матерьяльной точки можетъ быть изображено длиною, отложенною отъ мѣста матерьяльной точки по направленію скорости ея; эта длина должна быть во столько разъ болѣе единицы длины, во сколько разъ количество движенія точки болѣе единицы количества движенія.

Подъ направленіемъ количества движенія матерьяльной точки мы подразумѣваемъ направленіе изображающей его длины.

Произведенія:

$$m \frac{dx}{dt} \quad m \frac{dy}{dt} \quad m \frac{dz}{dt}$$

мы называетъ проекціями на оси координатъ количества движенія матерьяльной точки.

Изображая количество движенія, подобно силѣ, длиною, отложенною отъ мѣста матерьяльной точки, мы можемъ ввести понятіе о моментѣ количества движенія вокругъ какого-либо центра и о моментѣ его вокругъ какой-либо оси; понятно, что изложеніе и формулированіе этихъ понятій сведется къ почти дословному повторенію всего того, что изложено въ предыдущемъ параграфѣ, а потому мы ограничимся только слѣдующими указаніями.

Единица моментовъ количествъ движеній имѣетъ инныя измѣренія, чѣмъ единица моментовъ силъ, а именно:

$$(\text{единица моментовъ колич. движ.}) = \frac{m \cdot d^2}{\theta}.$$

Тѣ величины, производимыя которыхъ по времени образуютъ первыя части дифференціальныхъ уравненій (110), имѣютъ слѣдующія значенія:

$(y m x' - z m y')$ есть моментъ вокругъ оси X количества движенія

точки m , или проекція на ось X момента того же количества движенія вокругъ начала координатъ:

$$m\left(y \frac{dz}{dt} - z \frac{dy}{dt}\right) = l_0 \cos(l_0 X); \dots\dots\dots (124, a)$$

гдѣ l_0 означаетъ величину и направленіе момента количества движенія точки m вокругъ начала координатъ;

$(xmx' - xmx')$ есть моментъ того же количества движенія вокругъ оси Y , или проекція на ось Y момента его вокругъ начала координатъ:

$$m\left(z \frac{dx}{dt} - x \frac{dz}{dt}\right) = l_0 \cos(l_0 Y); \dots\dots\dots (124, b)$$

$(xmy' - ymx')$ есть моментъ того же количества движенія вокругъ оси Z , или проекція на ось Z момента его вокругъ начала координатъ:

$$m\left(x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt}\right) = l_0 \cos(l_0 Z) \dots\dots\dots (124, c)$$

Такова аналогія между значеніями этихъ величинъ и значеніями разностей, рассмотрѣнныхъ въ предыдущемъ параграфѣ.

Кромѣ того, величины (124) имѣютъ еще иной смыслъ: каждая изъ нихъ есть удвоенное произведеніе изъ массы матеріальной точки на производную по времени отъ нѣкоторой площади; мы докажемъ это надъ разностью:

$$m\left(x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt}\right).$$

Разность эта, будучи моментомъ количества движенія точки m вокругъ оси Z , можетъ быть выражена такъ:

$$m\left(x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt}\right) = \pm m v_{xy} r_{xy} \sin(v_{xy}, r_{xy}) \dots\dots (125)$$

Здѣсь долженъ быть взятъ знакъ $+$, если $\cos(l_0 Z)$ болѣе нуля и знакъ минусъ, если этотъ косинусъ менѣе нуля; v_{xy} означаетъ проекцію скорости точки на плоскость XU .

Вѣстѣ съ тѣмъ v_{xy} есть скорость проекціи M_3 на плоскость XZ матерьяльной точки m ; означивъ черезъ ds_{xy} *положительно-взятую* длину бесконечно-малой дуги, пройденную точкою M_3 въ теченіи бесконечно-малаго промежутка времени отъ момента t до момента $(t + dt)$, и принявъ во вниманіе, что:

$$v_{xy} = \frac{ds_{xy}}{dt},$$

можемъ представить равенство (125) подъ слѣдующимъ видомъ:

$$m \left(x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} \right) = m \left(\pm r_{xy} ds_{xy} \sin(r_{xy}, r_{xy}) \right) \dots \dots (126)$$

Разсмотримъ значеніе второй части этого равенства.

Произведеніе:

$$r_{xy} ds_{xy} \sin(r_{xy}, r_{xy})$$

выражаетъ величину площади, разнящейся на бесконечно-малыя величины вышнихъ порядковъ отъ удвоенной величины площади сектора $OM_3M'_3$ (чертежи 13 и 14), заключающагося между радіусами векторами OM_3 и OM'_3 и дугою $M_3M'_3$, описанною точкою M_3 въ теченіи времени отъ t до $(t + dt)$. Знаки, поставленные передъ этимъ произведеніемъ въ равенствѣ (126), означаютъ, что удвоенную величину этой площади должно взять со знакомъ плюсъ, если наблюдателю, смотрящему на точку M_3 съ положительной оси Z , скорость v_{xy} ($M_3 V_3$ на чертежахъ) кажется направленною слѣва на право, какъ на чертежѣ 13); если же скорость $M_3 V_3$ кажется направленною справа на лѣво (какъ на черт. 14), то величина удвоенной площади $OM_3M'_3$ входитъ въ равенство (126) со знакомъ минусъ.

Можно еще замѣтить, что знакъ плюсъ соотвѣтствуетъ тѣмъ случаямъ, въ которыхъ уголъ Θ_3 , составляемый радіусомъ вектора OM_3 съ осью X , увеличивается въ теченіи времени отъ t до $(t + dt)$ (черт. 13); знакъ же минусъ соотвѣтствуетъ тѣмъ случаямъ, въ которыхъ этотъ уголъ уменьшается (черт. 14).

Интеграль:

$$2\Pi_{xy} = \int (r_{xy} \sin(r_{xy}, r_{xy})) ds_{xy} \dots \dots (127)$$

взятый вдоль по кривой, описанной точкою M_3 , отъ положенія A , занимаемаго ею въ моментъ t_0 , до положенія, занимаемаго ею въ моментъ t , называется удвоенною площадью сектора, описаннаго радиусомъ векторомъ точки M_3 въ теченіи времени отъ t_0 до t ; предполагается, что вышеуказанное правило знаковъ соблюдается для каждаго бесконечно-малаго элемента времени.

Если уголъ Θ_3 постоянно увеличивается въ теченіи всего промежутка времени $(t-t_0)$, то тогда интеграль (127) выражаетъ величину удвоенной площади сектора OAM_3O , заключающійся внутри периметра, образуемаго радиусами векторами OA и OM_3 и траекторіею AM_3 (черт. 13); если уголъ Θ_3 все время уменьшается, то интеграль (127) выражаетъ отрицательно взятую величину удвоенной площади OAM_3O ; если же уголъ Θ_3 то возрастаетъ, то убываетъ (какъ наприимѣръ изображено на чертежѣ 15), то интеграль (127) будетъ состоять изъ положительныхъ и отрицательныхъ частей, наприимѣръ, въ случаѣ представленнаго на чертежѣ 15, будетъ:

$$\Pi_{xy} = \text{плоч. } (OABDO) - \text{плоч. } (ODM_3O).$$

Во всякомъ случаѣ очевидно, что во второй части равенства (126) заключается производная:

$$\frac{d\Pi_{xy}}{dt},$$

выражающая скорость, съ которою возрастаетъ площадь сектора, описываемаго радиусомъ векторомъ проекціи движущейся точки на плоскость XU ; эта производная называется *секторьяльною скоростью проекціи движущейся точки на плоскость XU* ; мы будемъ обозначать ее знакомъ:

$$\sigma(xy).$$

И такъ:

$$m \left(x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} \right) = 2m_{\sigma}(xy) \dots \dots \dots (128)$$

Къ этому мы должны прибавить еще одно замѣчаніе касательно одного весьма употребительнаго выраженія секторьяльной скорости.

Уголъ θ_3 и радіусъ векторъ r_{xy} (который мы будемъ на время обозначать черезъ r_3) суть полярныя координаты точки M_3 на плоскости XU ; означимъ черезъ α_3 и β_3 координатныя оси этихъ координатъ.

Примемъ теперь во вниманіе, что въ случаяхъ, изображенныхъ на чертежѣ 13:

$$v_3 \sin(v_3 r_3) = v_3 \sin(v_3 \alpha_3) = v_3 \cos(v_3 \beta_3),$$

а въ случаяхъ, изображенныхъ на черт. 14:

$$\begin{aligned} v_3 \sin(v_3 r_3) &= v_3 \sin(V_3 M_3 \alpha_3) = v_3 \sin\left((V_3 M_3 \beta_3) - \frac{\pi}{2}\right) = \\ &= -v_3 \cos(V_3 M_3 \beta_3) = -v_3 \cos(v_3 \beta_3); \end{aligned}$$

(гдѣ, также временно, v_{xy} замѣнено чрезъ v_3).

Слѣдовательно, во всякомъ случаѣ:

$$\pm r_3 v_3 \sin(v_3 r_3) = r_3 v_3 \cos(v_3 \beta_3).$$

По формулѣ же (20 bis) стр. 33-й кинематической части:

$$v_3 \cos(v_3 \beta_3) = r_3 \frac{d\theta_3}{dt};$$

а потому, возстановляя прежнія обозначенія, будемъ имѣть слѣдующее выраженіе удвоенной секторьяльной скорости:

$$2_{\sigma}(xy) = r_{xy}^2 \frac{d\theta_3}{dt} \dots \dots \dots (129)$$

Такимъ образомъ мы имѣемъ возможность сказать слѣдующее относительно значеній величинъ, образующихъ первыя части равенствъ (124).

Во первых, онѣ суть моменты количества движенія матерьяльной точки вокругъ осей координатъ, или проэкціи на оси координатъ момента количества движенія вокругъ начала координатъ.

Во вторыхъ, онѣ суть удвоенныя произведенія изъ массы точки на секторьяльныя скорости проэкцій радіуса вектора на плоскости координатъ; это выражается формулами:

$$m \left(y \frac{dz}{dt} - z \frac{dy}{dt} \right) = 2m\omega(yz) = mr^2 \frac{d\theta_1}{y z dt} \dots \dots (130, a)$$

$$m \left(z \frac{dx}{dt} - x \frac{dz}{dt} \right) = 2m\omega(zx) = mr^2 \frac{d\theta_2}{z x dt} \dots \dots (130, b)$$

$$m \left(x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} \right) = 2m\omega(xy) = mr^2 \frac{d\theta_3}{x y dt} \dots \dots (130, c)$$

Здѣсь θ_1 есть уголъ, составляемый съ осью Y проэкціею радіуса вектора движущейся точки на плоскость YZ ; $\omega(yz)$ — секторьяльная скорость проэкціи точки на ту же плоскость; θ_2 — уголъ, составляемый съ осью Z проэкціею радіуса вектора на плоскость ZX ; $\omega(zx)$ — секторьяльная скорость проэкціи точки на ту же плоскость.

§ 24. Значеніе дифференціальныхъ уравненій (110). Интегралы, выражающіе законъ площадей.

А. Каждое изъ дифференціальныхъ уравненій (110) выражаетъ, что производная по времени отъ момента количества движенія вокругъ одной изъ осей координатъ равняется моменту вокругъ той же оси силы, приложенной къ матерьяльной точкѣ.

Значеніе этихъ дифференціальныхъ уравненій можетъ быть объяснено еще иначе.

Длина l , проведенная изъ начала координатъ и представляющая величину и направленіе момента количества движенія матерьяльной точки вокругъ начала координатъ, измѣняется во время движенія точки свою величину и свое направленіе; конецъ ея описываетъ при этомъ некоторую кривую линію, которую можно назвать *подотрафомъ момента количества движенія*.

Уравненія (110) выражаютъ, что скорость точки, чертящей гототрафъ момента количества движенія, равна и параллельна длинѣ, изображающей моментъ силы F .

5 Если моментъ силы F вокругъ осей X равенъ нулю во все время движенія точки, то изъ уравненія (110, а) получимъ слѣдующій интеграль дифференціальныхъ уравненій движенія:

$$m\left(y\frac{dz}{dt} - z\frac{dy}{dt}\right) = C_1 \dots \dots \dots (131, а)$$

Моментъ силы F вокругъ осей X равенъ нулю или тогда, когда проэкція силы на плоскость YZ равна нулю (тогда $Y=0, Z=0$), или тогда, когда проэкція силы на эту плоскость проходитъ черезъ начало координатъ: послѣднее условіе выражается равенствомъ:

$$\frac{y}{Y} = \frac{z}{Z} \dots \dots \dots (132, а)$$

и требуетъ, чтобы сила F пересѣкала ось X .

Интеграль (131, а) выражаетъ, что секторьяльная скорость проэкціи радіуса вектора на плоскость YZ имѣетъ постоянную величину, то есть:

$$m r_{yz}^2 \frac{d\theta_1}{dt} = C_1,$$

$$\theta(yz) = \frac{d\Pi_{yz}}{dt} = \frac{C_1}{2m};$$

откуда слѣдуетъ:

$$\Pi_{yz} = \frac{C_1}{2m} t, \dots \dots \dots (133, а)$$

то есть площадь сектора, описываемаго проэкціею радіуса вектора на плоскости YZ , возрастаетъ равномерно.

Такъ какъ за ось X можетъ быть взята всякая неподвижная линія, а за плоскость YZ — всякая плоскость перпендикулярная въ ней, то мы можемъ сказать слѣдующее:

Если равнодѣйствующая силъ, приложенныхъ къ движущейся матеріальной точкѣ, проходитъ черезъ какую либо неподвижную прямую линію, то дифференціальные уравненія движенія этой точки имѣютъ интегралъ, выражающій постоянство секторьяльной скорости проэкціи радіуса вектора

точки на плоскость перпендикулярную къ прямой (началомъ радіуса вектора служить пересѣченіе прямой съ плоскостью).

5. Если во все время движенія моменты силы F вокругъ двухъ осей координатъ равны нулю, то движеніе точки совершается въ нѣкоторой плоскости, проходящей черезъ начало координатъ.

Положимъ, что равны нулю моменты силы F вокругъ осей X и Y , то есть, что сила F удовлетворяетъ двумъ условіямъ:

$$yZ - zY = 0, \quad zX - xZ = 0. \dots\dots\dots (134)$$

Помноживъ первое равенство на x , второе на y и сложивъ, получимъ равенство:

$$z(yX - xY) = 0,$$

которое тоже должно быть удовлетворено при движеніи точки.

Оно можетъ быть удовлетворено или тѣмъ, что во все время движенія $z = 0$, или тѣмъ, что сила F удовлетворяетъ, кромѣ условій (134), еще условію:

$$xY - yX = 0 \dots\dots\dots (135)$$

Въ первомъ случаѣ точка движется въ плоскости XU ; мы сейчасъ покажемъ, что она движется въ нѣкоторой плоскости и во второмъ случаѣ.

Въ этомъ случаѣ вторыя части всѣхъ трехъ уравненій (110, а, b, c) равны нулю, а потому мы имѣемъ тогда три интеграла:

$$m(yz' - zy') = C_1. \dots\dots\dots (131, a)$$

$$m(zx' - xz') = C_2. \dots\dots\dots (131, b)$$

$$m(xy' - yx') = C_3. \dots\dots\dots (131, c)$$

Помноживъ: первый — на x , второй — на y , третій — на z , и сложивъ, получимъ:

$$0 = C_1x + C_2y + C_3z; \dots\dots\dots (136)$$

это — уравненіе той плоскости, проходящей черезъ начало координатъ, въ которой должна оставаться движущаяся точка.

Постоянныя C_1, C_2, C_3 , пропорціональны косинусамъ угловъ, составляемыхъ нормалью къ этой плоскости съ осями координатъ, опредѣлятся по начальнымъ обстоятельствамъ движенія: $a, b, c, \alpha, \beta, \gamma$, а именно:

$$C_1 = m(b\gamma - c\beta), \quad C_2 = m(c\alpha - a\gamma), \quad C_3 = m(a\beta - b\alpha) \dots (137)$$

Обратимъ вниманіе на эти случаи, въ которыхъ сила F удовлетворяетъ тремъ условіямъ (134) (135) и въ которыхъ, поэтому, дифференціальныя уравненія движенія матерьяльной точки имѣютъ три интеграла (131, a, b, c).

Условія (134) и (135) можно представить въ видѣ слѣдующихъ равенствъ:

нормаль къ плоскости

$$\frac{x}{X} = \frac{y}{Y} = \frac{z}{Z}, \dots \dots \dots (132)$$

выражающихъ, что направленіе силы F проходитъ черезъ начало координатъ.

Интегралы (131, a, b, c) выражаютъ, что проэкціи на всѣ три оси координатъ момента количества движенія вокругъ начала координатъ имѣютъ постоянныя величины; изъ этого слѣдуетъ, что моментъ количества движенія l_0 имѣетъ постоянную величину:

$$l_0 = m \left[(b\gamma - c\beta)^2 + (c\alpha - a\gamma)^2 + (a\beta - b\alpha)^2 \right]^{\frac{1}{2}} = \\ = mr_0 v_0 \sin(v_0 r_0) \dots \dots \dots (138)$$

и постоянное направленіе:

$$\left. \begin{aligned} \cos(l_0 X) &= \frac{m(b\gamma - c\beta)}{l_0} \\ \cos(l_0 Y) &= \frac{m(c\alpha - a\gamma)}{l_0} \\ \cos(l_0 Z) &= \frac{m(a\beta - b\alpha)}{l_0} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (139)$$

Вмѣстѣ съ тѣмъ интегралы (131, a, b, c) выражаютъ, что сек-

торьяльные скорости проекцій радіуса вектора на всѣ три плоскости координатъ постоянны:

$$\sigma(yz) = \frac{C_1}{2m}, \quad \sigma(zx) = \frac{C_2}{2m}, \quad \sigma(xy) = \frac{C_3}{2m}; \dots \dots \dots (140)$$

а отсюда слѣдуетъ, что площади секторовъ, описываемыхъ на плоскостяхъ координатъ проекціями радіуса вектора на эти плоскости, возрастаютъ равномерно:

$$\Pi_{yz} = \frac{C_1}{2m}t, \quad \Pi_{zx} = \frac{C_2}{2m}t, \quad \Pi_{xy} = \frac{C_3}{2m}t \dots \dots \dots (141)$$

Секторьяльная скорость проекціи радіуса вектора на какую бы то ни было неподвижную плоскость, проходящую черезъ начало координатъ, будетъ также постоянна; въ самомъ дѣлѣ, если переимѣнимъ направленіе осей координатъ такимъ образомъ, чтобы одна изъ новыхъ осей совпала съ направленіемъ OP , перпендикулярнымъ къ этой плоскости \mathcal{F} , то, по предыдущимъ формуламъ, рассматриваемая секторьяльная скорость $\sigma(\mathcal{F})$ выразится такъ:

$$\sigma(\mathcal{F}) = \frac{l_0 \cos(l_0 P)}{2m} \dots \dots \dots (142)$$

Отсюда видно, что наибольшая секторьяльная скорость:

$$\sigma = \frac{l_0}{2m} \dots \dots \dots (143)$$

будетъ въ плоскости (136), въ которой заключается траекторія движущейся точки; секторьяльная же скорость проекціи радіуса вектора на всякую плоскость, проходящую черезъ направленіе l_0 , будетъ равна нулю.

Слѣдовательно, если равнодѣйствующая силъ приложенныхъ къ матерьяльной точки, при всякомъ положеніи точки направлена чрезъ начало координатъ, то движеніе точки совершается въ плоскости, проходящей черезъ начало координатъ и подчиняется тому закону, что площадь сектора, описываемого радіусомъ векторомъ, возрастаетъ равномерно; съ-

возбуждаемыхъ движеніемъ проводниковъ и магнитовъ. Такия силы называются *силами сопротивленія движенію*, или просто *сопротивленіями движенію*.

Интеграль:

$$\int_{s_1}^{s_2} F \cos(F, v) ds,$$

взятый по протяженію въкоторой части пути, пройденнаго точкою, называется *работою силы F на этой части пути*.

Работа имѣетъ измѣренія одинаковыя съ моментами силъ: она представляетъ произведеніе изъ величины силы на длину; такъ что:

$$(\text{единица работы}) = (\text{един. силы}) (\text{един. длины}) = \frac{\text{м.} \cdot \partial^2}{\partial^2} \dots (146)$$

На практикѣ за единицу работы принимаютъ килограммо-метръ, то есть работу, совершаемую на протяженіи одного метра, вѣсомъ одного килограмма (въ Парижѣ, на уровнѣ моря); но правильнѣе принять за единицу работы ту, которая выражена формулою (146).

Коммиссія при Британскомъ Обществѣ поощренія наукъ (стр. 27) предложила принять за единицу — работу, производимую динаю на протяженіи сантиметра (предполагая, конечно, что направленіе силы совпадаетъ постоянно съ направленіемъ скорости); эту единицу работы предложено называть эргъ (erg).

$$\text{Эргъ} = \frac{(\text{грамм} \cdot (\text{сантиметр})^2)}{(\text{секунда})^2} \dots \dots \dots (147)$$

Приводимъ здѣсь числовыя выраженія въкоторыхъ величинъ работы въ эргахъ.

Килограммометръ = 100000. g . (эргъ).

Килограммометръ въ Парижѣ, на уровнѣ моря = 9,8094. 10^7 . (эргъ).

Англійскій фунтофутъ = 13825. g . (эргъ).

Лошадиная сила есть способность произвести 75 килограммометровъ работы въ секунду; если принять $g = 981$ (въ сантиметрахъ

и секундахъ), то лошадиную силу можно опредѣлить какъ способность произвести работу въ $7,36 \cdot 10^9$ эрговъ въ секунду.

Въ Англіи принята лошадиная сила нѣсколько большая: способность произвести 550 фунтофутонъ работы въ секунду или, принимая $g = 981$, способность произвести $7,46 \cdot 10^9$ эрговъ работы въ секунду.

Первая часть дифференціального уравненія (112) есть дифференціалъ отъ произведенія:

$$\frac{mv^2}{2},$$

называемаго *живою силою* матерьяльной точки или *кинетическою энергіею* ея.

Живая сила имѣетъ тѣ же самыя измѣренія, какъ и работа, а потому эргъ есть также единица кинетической энергіи или живой силы.

Дифференціальное уравненіе (112) выражаетъ, что безконечно малое приращеніе живой силы матерьяльной точки, получаемое ею на протяженіи безконечно-малаго элемента пути ds , равняется элементарной работѣ (на протяженіи того же элемента пути) равнодѣйствующей силъ, приложенныхъ къ матерьяльной точкѣ, элементарная же работа равнодѣйствующей F равна суммѣ элементарныхъ работъ составляющихъ силъ: F_1, F_2, \dots, F_k , то есть:

$$F \cos (F, v) ds = F_1 \cos (F_1, v) ds + F_2 \cos (F_2, v) ds + \dots \\ \dots + F_k \cos (F_k, v) ds \dots \dots \dots (148)$$

Пусть t_1 и t_2 суть два какіе либо момента времени, v_1 и v_2 — скорость матерьяльной точки въ эти моменты, s_1 — разстояніе, считаемое по дугѣ траекторіи, отъ нѣкоторой опредѣленной точки S_0 траекторіи, до того положенія, которое матерьяльная точка занимаетъ въ моментъ t_1 , l_{21} — длина пути пробѣгаемаго точкою въ теченіи промежутка времени $(t_2 - t_1)$.

Возьмемъ отъ обѣихъ частей уравненія (112) интегралы въ предѣлахъ, соотвѣствующихъ моментамъ t_1 и t_2 ; получимъ:

$$\frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2} = \int_{s_1}^{s_2} F \cos(F, v) ds, \dots \dots (149)$$

гдѣ:

$$s_2 = s_1 + l_{21}.$$

Это равенство выражаетъ, что *разность между величинами живой силы въ концѣ и въ началѣ пути, пройденнаго свободною матерьяльною точкою въ теченіи какого либо промежутка времени ($t_2 - t_1$), равняется работѣ, произведенной на этомъ пути равнодѣйствующею силѣ, приложенныхъ къ матерьяльной точкѣ.*

Дифференціальное уравненіе (112) и равенство (149) справедливы при всякихъ силахъ, приложенныхъ къ свободной матерьяльной точкѣ.

§ 26. Законъ живой силы или сохраненія энергіи для одной матерьяльной точки. Потенціальная функція. Поверхности уровня.

Если проеціи на оси координатъ силъ, приложенныхъ къ матерьяльной точкѣ, суть такія функція координатъ, которыя дѣлаютъ тричленъ:

$$Xdx + Ydy + Zdz$$

полнымъ дифференціаломъ нѣкоторой функція $U(x, y, z)$ координатъ, то дифференціальное уравненіе (112) будетъ имѣть слѣдующій видъ:

$$d\left(\frac{mv^2}{2}\right) = dU;$$

а потому дифференціальныя уравненія движенія свободной матерьяльной точки будутъ имѣть тогда слѣдующій интегралъ:

$$\frac{mv^2}{2} = U + h, \dots \dots (150)$$

гдѣ h есть произвольная постоянная.

Условіе:

$$Xdx + Ydy + Zdz = dU \dots \dots \dots (151)$$

требуетъ, чтобы проэкціи силы на оси координатъ были равны производнымъ отъ U по координатамъ; а именно должно быть

$$X = \frac{\partial U}{\partial x}, \quad Y = \frac{\partial U}{\partial y}, \quad Z = \frac{\partial U}{\partial z} \dots \dots \dots (152)$$

Функція U отъ x, y, z , производныя которой по x, y, z выражаютъ проэкціи X, Y, Z силы, приложенной къ материальной точкѣ, находящейся въ точкѣ (x, y, z) пространства, называется *потенціальною* или *силовою функціею* этой силы. Сила же, проэкціи которой на оси координатъ суть функція отъ x, y, z , удовлетворяющія условію (151), называется *силою, имѣющею потенциалъ*.

Если придадимъ опредѣленные численные значенія: a, b, c переменнымъ величинамъ x, y, z , заключающимся въ функціи U , то послѣдняя получитъ нѣкоторое численное значеніе C .

Уравненіе:

$$U(x, y, z) = U(a, b, c)$$

или

$$U(x, y, z) = C \dots \dots \dots (153)$$

есть уравненіе поверхности, проходящей черезъ ту точку пространства, координаты которой суть a, b, c ; во всѣхъ точкахъ этой поверхности, называемой *поверхностью уровня*, потенциальная функція U имѣетъ одну и ту же постоянную величину C ; эта постоянная называется *параметромъ* поверхности уровня.

Придавая параметру C въ уравненіи (153) различныя дѣйствительныя значенія, которыя можетъ получать потенциальная функція U , мы получимъ уравненія различныхъ поверхностей уровня этой функція. Каждой потенциальной функціи свойственно безчисленное множество поверхностей уровня, совокупность которыхъ образуетъ систему, заполняющую собою все то пространство, внутри котораго потенциальная функція имѣетъ дѣйствительныя значенія.

Нормаль, проведенная къ поверхности уровня черезъ какую либо точку ея, имѣетъ два прямопротивоположныя направленія; одно изъ нихъ мы назовемъ положительною нормалью, другое — отрицательною.

Косинусы угловъ, составляемыхъ этими противоположными направленіями съ осями координатъ выражаются такъ:

Если мы выберемъ за положительную нормаль ту, которая направлена въ сторону убывающаго потенциала, то поверхность уровня будетъ называться поверхностью уровня.

$$\left. \begin{aligned} \cos(N_1 X) &= \frac{1}{\Delta U} \frac{\partial U}{\partial x}, \\ \cos(N_1 Y) &= \frac{1}{\Delta U} \frac{\partial U}{\partial y}, \\ \cos(N_1 Z) &= \frac{1}{\Delta U} \frac{\partial U}{\partial z}, \\ \cos(N_2 X) &= -\frac{1}{\Delta U} \frac{\partial U}{\partial x}, \\ \cos(N_2 Y) &= -\frac{1}{\Delta U} \frac{\partial U}{\partial y}, \\ \cos(N_2 Z) &= -\frac{1}{\Delta U} \frac{\partial U}{\partial z}, \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (154)$$

гдѣ:

$$\Delta U = + \sqrt{\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)^2} \dots\dots\dots (155)$$

и гдѣ въ производныя должны быть подставлены координаты той точки поверхности уровня, изъ которой возстановлена нормаль.

За положительное мы примемъ направленіе N_1 , соответствующее положительному знаку корня (155), эту положительную нормаль мы будемъ иногда, для краткости, называть просто нормалью и будемъ обозначать буквою N безъ знака внизу.

Пусть M есть точка пространства, черезъ которую проведена поверхность уровня съ параметромъ C и нормаль къ этой поверхности; M_1 — другая точка, безконечно близкая къ M ; x, y, z — координаты точки M ; $x + \delta x, y + \delta y, z + \delta z$ — координаты точки M_1 , гдѣ $\delta x, \delta y, \delta z$ суть проэкціи на оси координатъ какой либо безконечно-малой дуги δs , стягиваемой хордою MM_1 . Очевидно, пара-

метръ той поверхности уровня, на которой находится точка M_1 , можетъ отличаться отъ C только на бесконечно-малую величину:

$$\delta C = \frac{\partial U}{\partial x} \delta x + \frac{\partial U}{\partial y} \delta y + \frac{\partial U}{\partial z} \delta z = \Delta U \cos(N_1, \delta s) \delta s \dots (156)$$

Это выраженіе приведено здѣсь для того, чтобы показать, что съ той стороны поверхности уровня C , въ которую направлена положительная нормаль, находятся поверхности уровня съ параметрами большими C , со стороны же отрицательной нормали находятся поверхности уровня съ параметрами меньшими C ; въ самомъ дѣлѣ, изъ выраженія (156) видно, что:

$$\delta C > 0, \text{ если } \cos(N_1, \delta s) > 0$$

$$\delta C < 0, \text{ если } \cos(N_1, \delta s) < 0.$$

На основаніи равенствъ (152) изъ формулъ (155) и (154) получимъ:

$$\Delta U = +\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2} = F.$$

$$\cos(N_1, X) = \cos(F, X); \cos(N_1, Y) = \cos(F, Y); \cos(N_1, Z) = \cos(F, Z);$$

полѣднія три равенства выражаютъ, что сила F , имѣющая разсчитываемый потенциалъ и приложенная къ матеріальной точкѣ, находящейся въ точкѣ $M(x, y, z)$ пространства, направлена по положительной нормали къ поверхности уровня, проведенной черезъ эту точку.

Вернемся теперь къ интегралу (150), который можетъ быть представленъ такъ:

$$\frac{mv^2}{2} - U = h \dots \dots \dots (157)$$

и можетъ быть выраженъ слѣдующею словесною формулою:

Если равнодѣйствующая силъ, приложенныхъ къ свободной матеріальной точкѣ, имѣетъ потенциалъ, то движеніе точки подчиняется слѣдующему закону: разность между живого силою

Нормаль, проведенная къ поверхности уровня черезъ какую либо точку ея, имѣетъ два прямопротивоположныя направленія; одно изъ нихъ мы назовемъ положительною нормалью, другое — отрицательною.

Косинусы угловъ, составляемыхъ этими противоположными направленіями съ осями координатъ выражаются такъ:

Если мы подберемъ направление нормали, то поверхность уровня будетъ представлять собою поверхность уровня.

$$\left. \begin{aligned} \cos(N_1 X) &= \frac{1}{\Delta U} \frac{\partial U}{\partial x}, \\ \cos(N_1 Y) &= \frac{1}{\Delta U} \frac{\partial U}{\partial y}, \\ \cos(N_1 Z) &= \frac{1}{\Delta U} \frac{\partial U}{\partial z}, \\ \cos(N_2 X) &= -\frac{1}{\Delta U} \frac{\partial U}{\partial x}, \\ \cos(N_2 Y) &= -\frac{1}{\Delta U} \frac{\partial U}{\partial y}, \\ \cos(N_2 Z) &= -\frac{1}{\Delta U} \frac{\partial U}{\partial z}, \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (154)$$

гдѣ:

$$\Delta U = + \sqrt{\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)^2} \dots \dots \dots (155)$$

и гдѣ въ производныя должны быть подставлены координаты той точки поверхности уровня, изъ которой возстановлена нормаль.

За положительное мы примемъ направленіе N_1 , соответствующее положительному знаку корня (155), эту положительную нормаль мы будемъ иногда, для краткости, называть просто нормалью и будемъ обозначать буквою N безъ знака внизу.

Пусть M есть точка пространства, черезъ которую проведена поверхность уровня съ параметромъ C и нормаль къ этой поверхности; M_1 — другая точка, безконечно близкая къ M ; x, y, z — координаты точки M ; $x + \delta x, y + \delta y, z + \delta z$ — координаты точки M_1 , гдѣ $\delta x, \delta y, \delta z$ суть проеціи на оси координатъ какой либо безконечно-малой дуги δs , стягиваемой хордою MM_1 . Очевидно, пара-

метр той поверхности уровня, на которой находится точка M_1 , может отличаться от C только на бесконечно-малую величину:

$$\delta C = \frac{\partial U}{\partial x} \delta x + \frac{\partial U}{\partial y} \delta y + \frac{\partial U}{\partial z} \delta z = \Delta U \cos(N_1, \delta s) \delta s \dots (156)$$

Это выражение приведено здѣсь для того, чтобы показать, что съ той стороны поверхности уровня C , въ которую направлена положительная нормаль, находятся поверхности уровня съ параметрами большими C , со стороны же отрицательной нормали находятся поверхности уровня съ параметрами меньшими C ; въ самомъ дѣлѣ, изъ выраженія (156) видно, что:

$$\delta C > 0, \text{ если } \cos(N_1, \delta s) > 0$$

$$\delta C < 0, \text{ если } \cos(N_1, \delta s) < 0.$$

На основаніи равенствъ (152) изъ формулъ (155) и (154) получимъ:

$$\Delta U = +\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2} = F.$$

$$\cos(N_1, X) = \cos(F, X); \cos(N_1, Y) = \cos(F, Y); \cos(N_1, Z) = \cos(F, Z);$$

последнія три равенства выражаютъ, что сила F , имѣющая разсматриваемый потенціалъ и приложенная къ матеріальной точкѣ, находящейся въ точкѣ $M(x, y, z)$ пространства, направлена по положительной нормали къ поверхности уровня, проведенной черезъ эту точку.

Вернемся теперь къ интегралу (150), который можетъ быть представленъ такъ:

$$\frac{mv^2}{2} - U = h \dots \dots \dots (157)$$

и можетъ быть выраженъ слѣдующею словесною формулою:

Если равнодѣйствующая силъ, приложенныхъ къ свободной матеріальной точкѣ, имѣетъ потенціалъ, то движеніе точки подчиняется слѣдующему закону: разность между кинетическою

и величиною параметра той поверхности уровня, на которой находится материальная точка, есть величина постоянная во все время движения.

Этот закон движения известен под именем закона живой силы для одной материальной точки.

Работа силы F , имѣющей потенціалъ U , на пути, начинающемся въ точкѣ $M_1 (x_1, y_1, z_1)$ и кончающемся въ точкѣ $M_2 (x_2, y_2, z_2)$, выразится разностью значеній потенціальной функціи въ этихъ точкахъ; то есть:

$$\int_{s_1}^{s_2} F \cos(F, v) ds = \int (Xdx + Ydy + Zdz) = \\ = \int dU = U(x_2, y_2, z_2) - U(x_1, y_1, z_1) \dots \dots (158)$$

Слѣдовательно, величина работы не зависитъ отъ того пути, который опишетъ движущаяся точка между точками M_1 и M_2 , а только отъ величинъ параметровъ тѣхъ поверхностей уровня, на которыхъ эти точки находятся.

Точно также, при переходѣ материальной точки по какому бы то ни было пути съ одной поверхности уровня на другую, сила F совершаетъ работу, выражаемую разностью параметровъ этихъ поверхностей; при этомъ параметръ той поверхности, изъ которой вышла точка, играетъ роль вычитаемого, а параметръ той поверхности, на которую приходитъ точка — роль уменьшаемого.

Уравненіе (149) предыдущаго параграфа принимаетъ при силахъ, имѣющихъ потенціалъ, слѣдующій видъ:

$$\frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2} = U(x_2, y_2, z_2) - U(x_1, y_1, z_1), \dots \dots (159)$$

что получается также изъ интеграла (157) или (150), выражающаго законъ живой силы для одной материальной точки.

Примѣрами силъ, имѣющихъ потенціалъ, могутъ служить:

а) постоянная сила. Потенціальная функція ея есть линейная функція координатъ; въ самомъ дѣлѣ, если:

$$X=A, \quad Y=B, \quad Z=C,$$

гдѣ A, B, C — постоянныя, то очевидно:

$$U=Ax + By + Cz + D, \dots\dots\dots (160)$$

гдѣ D есть значеніе потенціальной функціи въ началѣ координатъ.

Поверхности уровня этой потенціальной функціи суть параллельныя плоскости.

Другой примѣръ представляетъ:

б) сила, притягивающая матеріальную точку въ неподвижному центру, находящемуся въ началѣ координатъ, или отталкивающая точку отъ этого центра; величина силы выражается нѣкоторою функціею радіуса вектора точки.

Проекціи такой силы на оси координатъ выразятся такъ:

$$X=F(r) \frac{x}{r}, \quad Y=F(r) \frac{y}{r}, \quad Z=F(r) \frac{z}{r},$$

гдѣ $F(r)$ есть положительно-взятая величина отталкивательной силы, или отрицательно-взятая величина притягательной силы; подъ r подразумѣвается здѣсь положительно-взятая величина разстоянія матеріальной точки отъ центра силы; то есть:

$$r = +\sqrt{x^2 + y^2 + z^2};$$

вмѣстѣ съ тѣмъ мы будемъ обозначать тою же буквою также и направленіе изъ центра силы вдоль по радіусу вектору.

Легко видѣть, что косинусы угловъ, составляемыхъ направленіемъ r съ осями координатъ, выражаются производными отъ r по соответственнымъ координатамъ точки, а именно:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial r}{\partial x} &= \frac{x}{r} = \cos(rx) \\ \frac{\partial r}{\partial y} &= \frac{y}{r} = \cos(ry) \\ \frac{\partial r}{\partial z} &= \frac{z}{r} = \cos(rz) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (161)$$

поэтому:

$$X = F(r) \frac{\partial r}{\partial x}, \quad Y = F(r) \frac{\partial r}{\partial y}, \quad Z = F(r) \frac{\partial r}{\partial z}, \quad \dots \quad (162)$$

а отсюда слѣдуетъ, что потенциальная функція этой силы — слѣдующая:

$$U = \int F(r) dr. \dots \dots \dots (163)$$

Въ самомъ дѣлѣ, такъ какъ:

$$\frac{dU}{dr} = F(r),$$

$$X = \frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} = F(r) \frac{\partial r}{\partial x}, \quad \dots \dots \dots$$

в) Если центръ притяженія или отталкиванія находится не въ началѣ координатъ, а въ какой либо неподвижной точкѣ M_1 , координаты которой суть: x_1, y_1, z_1 , то тогда подъ r слѣдуетъ подразумѣвать:

$$r = +\sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2},$$

а подъ направленіемъ r — направленіе изъ центра M_1 къ той точкѣ, на которую дѣйствуетъ рассматриваемая сила.

Потенциальная функція выражается интеграломъ (163), проекціи же силы на оси координатъ выражаются такъ:

$$\left. \begin{aligned} X &= F(r) \frac{\partial r}{\partial x} = F(r) \frac{x - x_1}{r} \\ Y &= F(r) \frac{y - y_1}{r} \\ Z &= F(r) \frac{z - z_1}{r} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (164)$$

Въ этомъ случаѣ, также какъ и въ предыдущемъ, поверхности уровня суть концентрическія сферы, имѣющія центръ въ центрѣ силы.

г) На матерьяльную точку могутъ дѣйствовать одновременно нѣсколько такихъ силъ, какъ упомянутая въ предыдущемъ пунктѣ;

тогда потенциальная функция равнодействующей будет выражаться суммой потенциальных функций составляющих сил:

$$U = \int F_1(r_1) dr_1 + \int F_2(r_2) dr_2 + \dots + \int F_k(r_k) dr_k, \quad (165)$$

гдѣ:

$$r_1 = +\sqrt{(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2 + (z-z_1)^2}$$

$$r_2 = +\sqrt{(x-x_2)^2 + (y-y_2)^2 + (z-z_2)^2}$$

$$\dots\dots\dots$$

$$r_k = +\sqrt{(x-x_k)^2 + (y-y_k)^2 + (z-z_k)^2};$$

$x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \dots, x_k, y_k, z_k$ — суть координаты центровъ, изъ которыхъ дѣйствуютъ составляющія силы.

Проекція равнодействующей на ось $X^{орт}$ выразится такъ:

$$X = \frac{\partial U}{\partial x} = F_1(r_1) \frac{x-x_1}{r_1} + F_2(r_2) \frac{x-x_2}{r_2} + \dots + F_k(r_k) \frac{x-x_k}{r_k} \dots \quad (166)$$

Значитъ Сила:

$$X = -\frac{Ky}{x^2+y^2}, \quad Y = \frac{Kx}{x^2+y^2}, \quad Z=0$$

(гдѣ K — постоянное) имѣетъ слѣдующую потенциальную функцию:

$$U = K \operatorname{arctg} \left(\frac{y}{x} \right) \dots\dots\dots (167)$$

Отношеніе $(y:x)$ есть тангенсъ угла θ , составляемаго съ осью $X^{орт}$ проекціею радіуса вектора точки на плоскость XU ; тотъ же самый тангенсъ имѣютъ углы:

$$\theta \pm 2n\pi,$$

гдѣ n — какое либо цѣлое число; поэтому потенциальная функция (167) имѣетъ въ каждой точкѣ пространства безчисленное множество значений:

$$U = K\theta \pm 2n\pi K \dots\dots\dots (168)$$

Когда понадобится, мы обратимъ вниманіе на обстоятельства, происходящія изъ многократности значений такой потенциальной функции.

Законъ живой силы для одной матерьяльной точки представляет собою частный случай общаго закона того же имени, относящагося къ движенію системы точекъ; въ своемъ мѣстѣ мы сообщимъ нѣкоторыя историческія свѣдѣнія относительно открытія этого закона.

§ 27. Примѣръ рѣшенія задачи о криволинейномъ движеніи свободной матерьяльной точки подъ вліяніемъ центральной силы, имѣющей потенціалъ.

Мы приведемъ теперь примѣръ рѣшенія такой задачи, въ которой имѣютъ мѣсто законы площадей и живой силы:

Примѣръ 19. Определить движеніе свободной матерьяльной точки, притягиваемой къ началу координатъ силою обратно-пропорціональною квадрату разстоянія отъ него.

Дифференціальныя уравненія движенія матерьяльной точки суть:

$$\left. \begin{aligned} m \frac{d^2x}{dt^2} &= -\frac{\mu m}{r^2} \frac{x}{r} \\ m \frac{d^2y}{dt^2} &= -\frac{\mu m}{r^2} \frac{y}{r} \\ m \frac{d^2z}{dt^2} &= -\frac{\mu m}{r^2} \frac{z}{r} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (169)$$

гдѣ μ есть нѣкоторая постоянная величина.

Такъ какъ сила постоянно направлена къ началу координатъ, то, какъ показано въ § 24, дифференціальныя уравненія имѣютъ три интеграла:

$$(yz' - zy') = \frac{C_1}{m} \dots \dots \dots (131, a)$$

$$(zx' - xz') = \frac{C_2}{m} \dots \dots \dots (131, b)$$

$$(xy' - yx') = \frac{C_3}{m} \dots \dots \dots (131, c)$$

Кромѣ того, такъ какъ сила имѣетъ потенціалъ:

$$U = -\mu m \int \frac{dr}{r^2} = \frac{\mu m}{r},$$

то, какъ показано въ § 26, дифференціальныя уравненія имѣютъ еще интегралъ:

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{m\mu}{r} = m h, \dots\dots\dots (170)$$

выражающій законъ живой силы.

Такимъ образомъ, мы имѣемъ уже четыре интеграла съ четырьмя произвольными постоянными: C_1, C_2, C_3, h .

Остается произвести еще два интегрированія, которыя введутъ двѣ произвольныя постоянныя, и тогда задача будетъ рѣшена.

Изъ параграфа 24-го извѣстно, что движеніе матеріальной точки происходитъ въ плоскости:

$$C_1x + C_2y + C_3z = 0, \dots\dots\dots (136)$$

проходящей черезъ начало координатъ, и секторьяльная скорость радіуса вектора, остающагося постоянно въ этой плоскости, постоянна:

$$\sigma = \frac{l_0}{2m}, \dots\dots\dots (143)$$

гдѣ:

$$l_0 = +\sqrt{C_1^2 + C_2^2 + C_3^2} = m r_0 v_0 \sin(v_0 r_0) \dots\dots\dots (138)$$

Выразимъ секторьяльную скорость σ въ полярныхъ координатахъ по формулѣ (144) параграфа 24-го:

$$r^2 \frac{d\theta}{dt} = 2\sigma; \dots\dots\dots (144)$$

въ интегралѣ (170) выразимъ квадратъ скорости въ полярныхъ же координатахъ по формулѣ (20) кинематической части (стр. 33):

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2 \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = 2h + \frac{2\mu}{r} \dots\dots\dots (171)$$

Мы будемъ интегрировать дифференціальныя уравненія перваго порядка: (144) (171).

(Аргументъ θ есть уголъ, составляемый радіусомъ векторомъ съ вѣкоторою неподвижною осью, проведенною въ плоскости дви-

женія черезъ начало координатъ; при движеніи точки этотъ уголъ непрерывно увеличивается).

Исключимъ Θ' изъ уравненія (171) и рѣшимъ его относительно r' ; получимъ:

$$\frac{dr}{dt} = \sqrt{2h + \frac{2\mu}{r} - \frac{4\sigma^2}{r^2}}; \dots \dots \dots (172)$$

интегрируя это послѣднее уравненіе, найдемъ выраженіе для r въ функціи отъ t .

Вмѣсто того, чтобы интегрировать уравненіе (172), мы его преобразуемъ въ другое, которое легче интегрируется и доставляетъ уравненіе траекторіи.

Для этого представимъ себѣ, что r выражено функціею отъ Θ ; поэтому:

$$\frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\Theta} \frac{d\Theta}{dt},$$

или, на основаніи уравненія (144):

$$\frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\Theta} \frac{2\sigma}{r^2} = - \frac{d\left(\frac{2\sigma}{r}\right)}{d\Theta}.$$

Тричленъ, находящійся подъ корнемъ уравненія (172), можетъ быть преобразованъ слѣдующимъ образомъ:

$$2h + \frac{2\mu}{r} - \frac{4\sigma^2}{r^2} = 2h + \frac{\mu^2}{4\sigma^2} - \left(\frac{2\sigma}{r} - \frac{\mu}{2\sigma}\right)^2.$$

Сумма:

$$2h + \frac{\mu^2}{4\sigma^2}$$

имѣетъ всегда величину положительную; въ самомъ дѣлѣ, означимъ черезъ v_0 и r_0 начальную скорость и начальный радіусъ векторъ; по формуламъ (138) (143):

$$4\sigma^2 = v_0^2 r_0^2 \sin^2(v_0 r_0);$$

постоянная же h можетъ быть выражена (см. (170)) такъ:

$$h = \frac{v_0^2}{2} - \frac{\mu}{r_0};$$

слѣдовательно:

$$2h + \frac{\mu^2}{4\sigma^2} = v_0^2 - \frac{2\mu}{r_0} + \frac{\mu^2}{v_0^2 r_0^2 \sin^2(v_0 r_0)}$$

Такъ какъ квадратъ синуса не можетъ быть болѣе единицы, то дробь:

$$\frac{\mu^2}{v_0^2 r_0^2 \sin^2(v_0 r_0)}$$

не можетъ быть менѣе дроби:

$$\frac{\mu^2}{v_0^2 r_0^2},$$

то есть, первая дробь или болѣе второй, или равна ей:

$$\frac{\mu^2}{v_0^2 r_0^2 \sin^2(v_0 r_0)} \geq \frac{\mu^2}{v_0^2 r_0^2};$$

изъ этого слѣдуетъ:

$$v_0^2 - \frac{2\mu}{r_0} + \frac{\mu^2}{v_0^2 r_0^2 \sin^2(v_0 r_0)} \geq v_0^2 - \frac{2\mu}{r_0} + \frac{\mu^2}{v_0^2 r_0^2},$$

то есть:

$$2h + \frac{\mu^2}{4\sigma^2} \geq \left(v_0 - \frac{\mu}{v_0 r_0}\right)^2;$$

значить, разсматриваемая нами сумма дѣйствительно всегда имѣть величину положительную.

Раздѣливъ эту сумму на положительную величину ($\mu^2:4\sigma^2$), мы получимъ положительное отношеніе, которое мы означимъ черезъ e^2 :

$$2h + \frac{\mu^2}{4\sigma^2} = \frac{\mu^2}{4\sigma^2} e^2$$

$$e^2 = 1 + \frac{v_0^2 r_0^2 \sin^2(v_0 r_0)}{\mu^2} \left(v_0^2 - \frac{2\mu}{r_0}\right). \dots \dots (173)$$

По всѣмъ этимъ причинамъ, уравненіе (172) можно преобразовать въ слѣдующее:

$$-\frac{d^2}{d\theta^2} \sqrt{\frac{\mu^2}{4\sigma^2} e^2 - \zeta^2}, \dots \dots \dots (174)$$

гдѣ, для краткости, черезъ ζ обозначена слѣдующая разность:

$$\frac{2\sigma}{r} - \frac{\mu}{2\sigma} = \zeta.$$

Отдѣливъ переменныя въ уравненіи (174):

$$- \frac{d\zeta}{\sqrt{\frac{\mu^2}{4\sigma^2} e^2 - \zeta^2}} = d\theta$$

и интегрируя, получимъ:

$$\arccos\left(\frac{2\sigma\zeta}{\mu e}\right) = \theta + \Gamma_1,$$

или:

$$\zeta = \frac{\mu e}{2\sigma} \cos(\theta + \Gamma_1)$$

$$\frac{2\sigma}{r} = \frac{\mu}{2\sigma} \left(1 + e \cos(\theta + \Gamma_1)\right),$$

гдѣ Γ_1 есть пятая произвольная постоянная.

Выразимъ r въ функціи отъ θ :

$$r = \frac{p}{1 + e \cos(\theta + \Gamma_1)}, \dots \dots \dots (175)$$

гдѣ:

$$p = \frac{4\sigma^2}{\mu} \dots \dots \dots (176)$$

Уравненіе (175) (какъ уже было упомянуто на стр. 42 кинематической части) представляетъ одну изъ кривыхъ линій 2-го порядка, то есть эллипсъ, гиперболу, или параболу; величина эксцентриситета e опредѣляетъ родъ кривой, а именно: кривая есть *гипербола*, если $e > 1$, то есть, если (см. формулу (173)):

$$v_0^2 > \frac{2\mu}{r_0};$$

кривая есть *гипербола*, если $e = 1$, то есть, если:

$$v_0^2 = \frac{2\mu}{r_0};$$

кривая есть эллипс, если $e < 1$, то есть, если:

$$v_0^2 < \frac{2\mu}{r_0}.$$

Величина p есть полупараметръ кривой, то есть длина радіуса вектора, перпендикулярнаго къ большой оси эллипса, къ главной оси параболы, или къ дѣйствительной главной оси гиперболы.

Послѣднее интегрированіе произведёмъ надъ уравненіемъ (144), въ которомъ замѣнимъ r функциею отъ θ : уравненіе это, по отдѣленіи переменныхъ, получить слѣдующій видъ:

$$\frac{p^2}{2a(1+e \cos(\theta + \Gamma_1))} \frac{d\theta}{dt} = dt. \dots \dots \dots (177)$$

Для краткости, означимъ $(\theta + \Gamma_1)$ черезъ ψ ; двучленъ, заключающійся въ знаменателѣ, преобразуемъ слѣдующимъ образомъ:

$$\begin{aligned} 1 + e \cos \psi &= \cos^2\left(\frac{\psi}{2}\right) + \sin^2\left(\frac{\psi}{2}\right) + e \cos^2\left(\frac{\psi}{2}\right) - e \sin^2\left(\frac{\psi}{2}\right) = \\ &= (1 + e) \cos^2\left(\frac{\psi}{2}\right) + (1 - e) \sin^2\left(\frac{\psi}{2}\right), \end{aligned}$$

послѣ чего предыдущее уравненіе можетъ быть написано такъ:

$$\frac{p^2}{2a(1+e)^2} \frac{d\psi}{\left[1 + \frac{1-e}{1+e} \operatorname{tg}^2\left(\frac{\psi}{2}\right)\right]^2 \cos^4\left(\frac{\psi}{2}\right)} = dt. \dots \dots (178)$$

Интегрированіе этого уравненія въ случаѣ движенія точки по эллипсу облегчается при помощи слѣдующей подстановки:

$$\operatorname{tg}\left(\frac{f}{2}\right) = \operatorname{tg}\left(\frac{\psi}{2}\right) \sqrt{\frac{1-e}{1+e}}; \dots \dots \dots (179)$$

изъ этого равенства слѣдуетъ:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\cos^2\left(\frac{\psi}{2}\right)} &= 1 + \operatorname{tg}^2\left(\frac{\psi}{2}\right) = \frac{1 - e \cos f}{(1 - e) \cos^2\left(\frac{f}{2}\right)} \\ \frac{d\psi}{\cos^2\left(\frac{\psi}{2}\right)} &= \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \frac{df}{\cos^2\left(\frac{f}{2}\right)}; \end{aligned}$$

теперь уравнение (178) приметъ слѣдующій видъ:

$$\frac{p^2}{2\sigma(1-e^2)^{\frac{3}{2}}}(f - e \cos f)df = dt.$$

Интегрируя это уравнение, получимъ:

$$\frac{p^2}{2\sigma(1-e^2)^{\frac{3}{2}}}(1 - e \sin f) = t - \tau$$

или:

$$f - e \sin f = (t - \tau) \sqrt{\frac{\mu}{a^3}}, \dots \dots \dots (180)$$

гдѣ τ есть шестая произвольная постоянная, a — длина большой полуоси эллипса:

$$a = \frac{p}{1-e^2} = \frac{4\sigma^2}{\mu(1-e^2)} = -\frac{\mu}{2h} \dots \dots \dots (181)$$

Послѣ этого, рассматриваемая задача для случая движенія по эллиптической траекторіи рѣшена окончательно.

Эта задача играетъ существенную роль въ астрономіи и небесной механикѣ; полученное рѣшеніе выражаетъ движеніе которой либо изъ планетъ вокругъ солнца, если предположить послѣднее неподвижнымъ, массу планеты — сосредоточенною въ одной точкѣ, а притяженіе рассматриваемой планеты прочими — несуществующимъ.

Шесть произвольныхъ постоянныхъ:

$$C_1, C_2, C_3, h, \Gamma_1, \tau$$

нетрудно выразить въ начальныхъ координатахъ и въ проеціяхъ начальной скорости на оси координатъ.

Первыя четыре произвольныя постоянныя опредѣляютъ положеніе плоскости орбиты, эксцентриситетъ ея и длину большой полуоси:

$$\frac{C_3}{\sqrt{C_1^2 + C_2^2 + C_3^2}} = \cos I \dots \dots \dots (182)$$

$$\frac{C_1}{C_2} = -\operatorname{tg} \Omega, \dots \dots \dots (183)$$

$$a = \frac{\mu}{2h}, \dots \dots \dots (181)$$

$$e = \sqrt{1 + \frac{(C^2 + C_2^2 + C_3^2)}{m^2 \mu^2} 2h}, \dots \dots \dots (173)$$

гдѣ I есть уголъ, подъ которымъ плоскость орбиты наклонена въ плоскости XU , Ω - уголъ, составляемый съ осью X линією пересѣченія этихъ плоскостей.

Произвольная постоянная Γ , есть отрицательно взятый аргументъ наименьшаго радіуса вектора; τ — моментъ времени, въ который радіусъ векторъ имѣетъ наименьшую величину.

Въ случаѣ движенія точки по параболѣ, уравненіе (178) принимаетъ слѣдующій видъ:

$$\frac{p^2}{2s} \frac{d\psi}{\cos^4\left(\frac{\psi}{2}\right)} = dt \dots \dots \dots (184)$$

Интегрируя, получимъ:

$$\frac{p^{\frac{3}{2}}}{2\sqrt{\mu}} \left(\operatorname{tg} \frac{(\Theta + \Gamma_1)}{2} + \frac{1}{3} \operatorname{tg}^3 \frac{(\Theta + \Gamma_1)}{2} \right) = (t - \tau) \dots \dots \dots (185)$$

§ 28. Нѣкоторыя другія формы интеграловъ дифференціальныхъ уравненій движенія свободной матерьяльной точки.

Предположимъ, что свободная матерьяльная точка постоянно остается въ одной плоскости, которую мы примемъ за плоскость XU .

Изъ предыдущаго намъ извѣстно, что дифференціальныя уравненія движенія:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = X, \quad m \frac{d^2y}{dt^2} = Y,$$

или замѣняющая ихъ совокупность дифференціальныхъ уравненій перваго порядка:

$$\frac{dx}{dt} = x', \quad \frac{dy}{dt} = y', \quad m \frac{dx'}{dt} = X, \quad m \frac{dy'}{dt} = Y \dots \dots \dots (186)$$

имѣють интегралъ:

$$m(xy' - yx') = C,$$

если сила всегда удовлетворяетъ условію:

$$xY - yX = 0$$

и эти же уравненія имѣютъ интеграль:

$$\frac{m}{2} \left((x')^2 + (y')^2 \right) - U = h,$$

если сила имѣетъ потенциалъ.

Мы считаемъ здѣсь уместнымъ указать на двѣ другія формы интеграловъ дифференціальныхъ уравненій (186), получаемыя черезъ интегрированіе дифференціального уравненія:

$$\frac{d[m(xy' - yx')]}{dt} = (xY - yX),$$

если силы не зависятъ отъ скорости и времени и удовлетворяютъ нижеприведеннымъ условіямъ; эти интегралы найдены Бертраномъ *).

1) Если сила удовлетворяетъ условію:

$$xY - yX = D, \dots\dots\dots (187)$$

гдѣ D — постоянное, то изъ послѣдняго дифференціального уравненія получимъ интеграль:

$$m(xy' - yx') = Dt + C. \dots\dots\dots (188)$$

2) Если сила удовлетворяетъ условію:

$$xY - yX = \frac{1}{x^2} f\left(\frac{y}{x}\right), \dots\dots\dots (189)$$

гдѣ f есть какая бы то ни было функція отъ $(y:x)$, то, помноживъ обѣ части послѣдняго дифференціального уравненія на

$$2(xy' - yx'),$$

получимъ:

$$\frac{d}{dt} [m(xy' - yx')^2] = 2f\left(\frac{y}{x}\right) d\left(\frac{y}{x}\right);$$

*) Bertrand. Mémoire sur les intégrales communes à plusieurs problèmes de Mécanique. Journal de Mathématiques pures et appliquées par J. Liouville. Serie 1, Tome XVII. 1852. p. 121—175.

отсюда интеграль слѣдующаго вида:

$$m(xy' - yx')^2 = \int 2f\left(\frac{y}{x}\right) d\left(\frac{y}{x}\right) + C, \dots\dots\dots (190)$$

Примѣчаніе. Сюда же слѣдуетъ отнести и тѣ случаи, въ которыхъ сила удовлетворяетъ условію:

$$(xY - yX) = \frac{\varphi\left(\frac{y}{x}\right)}{x^2 + y^2}, \dots\dots\dots (191)$$

потому что, если мы положимъ:

$$\frac{\varphi\left(\frac{y}{x}\right)}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} = f\left(\frac{y}{x}\right),$$

то условіе (191) приметъ видъ (189).

Извѣстны еще другія обіи формы интеграловъ дифференціальныхъ уравненій движенія свободной матеріальной точки, подверженной силамъ, удовлетворяющимъ нѣкоторымъ условіямъ; изъ этихъ формъ интеграловъ мы можемъ указать только на слѣдующія.

3) Помножимъ второе изъ дифференціальныхъ уравненій:

$$mx'' = X, \quad my'' = Y, \dots\dots\dots (A)$$

на x' и затѣмъ вычтемъ изъ него первое, помноженное на y' ; получится слѣдующее дифференціальное уравненіе:

$$m(x'y'' - y'x'') = x'Y - y'X, \dots\dots\dots (192)$$

Если сила, приложенная къ матеріальной точкѣ, удовлетворяетъ условію:

$$x'Y - y'X = (x')^2 f\left(x, y, \frac{y'}{x'}\right), \dots\dots\dots (193)$$

гдѣ f есть какая нибудь функція отъ $x, y, (y':x')$, то тогда дифференціальное уравненіе (192) можно представить подъ слѣдующимъ видомъ:

$$m \frac{d\left(\frac{y'}{x'}\right)}{dt} = x' f\left(x, y, \frac{y'}{x'}\right).$$

Предполагая, что y выражено функцией отъ x , можемъ исключить изъ этого уравненія дифференціалъ времени, имѣя въ виду, что:

$$\frac{y'}{x'} = \frac{dy}{dx}, \quad \frac{d\left(\frac{y'}{x'}\right)}{dt} = \frac{d\left(\frac{y'}{x'}\right)}{dx} x' = \frac{d^2y}{dx^2} x';$$

вслѣдствіе этого послѣднее дифференціальное уравненіе получить, по сокращеніи на x' , видъ:

$$m \frac{d^2y}{dx^2} = f\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) \dots \dots \dots (194)$$

обыкновеннаго дифференціальнаго уравненія втораго порядка.

Первые интегралы этого уравненія:

$$\varphi_1\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = C_1, \quad \varphi_2\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = C_2,$$

представлять собою, по замѣщеніи въ нихъ производной $\frac{dy}{dx}$ — отношеніемъ $(y' : x')$, первые интегралы:

$$\varphi_1\left(x, y, \frac{y'}{x'}\right) = C_1, \quad \varphi_2\left(x, y, \frac{y'}{x'}\right) = C_2 \dots \dots \dots (195)$$

дифференціальныхъ уравненій (A) движенія свободной матерьяльной точки.

Условіе (193) выражаетъ, что проэкція силы на нормаль къ траекторіи есть однородная функція второй степени отъ скоростей x' и y' ; функція эта — слѣдующая:

$$(x')^2 \frac{f\left(x, y, \frac{y'}{x'}\right)}{\sqrt{1 + \left(\frac{y'}{x'}\right)^2}} \dots \dots \dots (196)$$

Слѣдовательно, если проэкція силы на нормаль къ траекторіи есть однородная функція (196) второй степени отъ скоростей x' и y' , то дифференціальныя уравненія движенія свободной матерьяльной точки на плоскости имѣютъ два первые интеграла, не зависящіе отъ времени; эти интегралы получаютъ изъ первыхъ интеграловъ обыкновеннаго дифференціальнаго уравненія втораго порядка (194).

Этот случай интегрируемости дифференциальных уравнений движения точки на плоскости был указан проф. А. Н. Коркиным *).

Кроме того, А. Н. Коркин нашел еще несколько случаев интегрируемости дифференциальных уравнений движения материальной точки на плоскости, въ которыхъ получаются два интеграла; изъ этихъ случаевъ мы можемъ здѣсь привести только одинъ, самый простѣйшій.

4) Если сила не зависитъ отъ времени и скоростей и удовлетворяетъ условію:

$$Y - kX = f(y - kx), \dots \dots \dots (197)$$

гдѣ k — постоянное, а f — некоторая функція отъ $(y - kx)$, то тогда составимъ дифференціальное уравненіе:

$$m(y'' - kx'') = Y - kX, \dots \dots \dots (198)$$

которое, на основаніи условія (197), приведетъ къ виду:

$$m(y'' - kx'') = f(y - kx). \dots \dots \dots (199)$$

Означимъ $y - kx$ черезъ ξ , тогда уравненіе (199) получитъ видъ:

$$m\xi'' = f(\xi);$$

интегрированіе дифференціального уравненія такого вида показано въ § 19 (см. случаи 2-го рода).

§ 29. Задачи.

1. *Опредѣлить движеніе матеріальной точки, притягиваемой къ оси X силою обратно пропорціональною квадрату разстоянія отъ нея; начальная скорость точки параллельна той же оси.*

Дифференціальныя уравненія движенія:

$$mx'' = 0, \quad my' = -\frac{\mu m}{y^2};$$

начальныя координаты и скорости:

$$t_0 = 0, \quad x_0 = 0, \quad x'_0 = a, \quad y_0 = b, \quad y'_0 = 0.$$

* Коркинъ. О совокупныхъ уравненіяхъ съ частными производными перваго порядка и некоторыхъ вопросахъ механики. 1867.

Korkine. Sur les intégrales des équations du mouvement d'un point matériel. Mathematische Annalen von Clebsch und Neumann. B. II. 1870. S. 13.

Второй интегралъ движенія параллельно оси X_{012} :

$$x = at \dots \dots \dots (200)$$

Первый интегралъ движенія параллельно оси Y_{012} :

$$(y')^2 = 2\mu \left(\frac{1}{y} - \frac{1}{b} \right).$$

Для того, чтобы интегрировать уравненіе:

$$-\frac{dy}{\sqrt{\frac{1}{y} - \frac{1}{b}}} = dt\sqrt{2\mu},$$

положимъ:

$$y = \frac{b}{2} (1 + \cos \omega), \dots \dots \dots (201)$$

тогда это уравненіе приметъ слѣдующій видъ:

$$\frac{b\sqrt{b}}{2} 2 \cos^2 \frac{\omega}{2} d\omega = dt\sqrt{2\mu};$$

интегрируя получимъ:

$$\frac{b\sqrt{b}}{2} (\omega + \sin \omega) = t\sqrt{2\mu} \dots \dots \dots (202)$$

Три уравненія: (200—202) выражаютъ движеніе точки; траекторія же выражается двумя уравненіями:

$$y = \frac{b}{2} (1 + \cos \omega), \quad x = a\sqrt{\frac{b}{2\mu}} \cdot \frac{b}{2} (\omega + \sin \omega).$$

Предлагаемъ сравнить эти уравненія съ уравненіями циклоиды (см. Кинем. часть, стр. 14).

Время, въ теченіе котораго движущаяся точка придетъ на ось X_{012} , опредѣлится изъ формулы (202), если сдѣлаемъ въ ней $\omega = \pi$:

$$T = \pi \frac{b}{2} \sqrt{\frac{b}{2\mu}}.$$

2. На матерьяльную точку дѣйствуютъ притяженія, обратно пропорціональныя квадратамъ разстояній, со стороны двухъ неподвижныхъ центровъ O и L ; величины этихъ притяженій суть:

$$\varepsilon \frac{Mm}{r_1^2}, \quad \varepsilon \frac{\mu m}{r_2^2},$$

гдѣ: m — масса точки, r_1 — разстояніе матеріальной точки отъ центра O , r_2 — разстояніе ея отъ центра L .

Матеріальная точка, помѣщенная на линіи \overline{OL} , въ разстояніи b отъ точки O , пущена со скоростью a по направленію къ L ; опредѣлить, какъ велика должна быть скорость x для того, чтобы движущаяся точка могла остановиться въ той точкѣ K на линіи \overline{OL} , въ которой притяженія обоихъ центровъ взаимно уравновѣшиваются.

Равнодѣйствующая силъ, приложенныхъ къ матеріальной точкѣ, имѣетъ въ этомъ случаѣ потенціалъ (см. 165):

$$U = \epsilon m \left(\frac{M}{r_1} + \frac{\mu}{r_2} \right),$$

поэтому движеніе матеріальной точки удовлетворяетъ закону живой силы:

$$\frac{v^2}{2} - \frac{a^2}{2} = \epsilon \left(\frac{M}{r_1} + \frac{\mu}{r_2} \right) - \epsilon \left(\frac{M}{b} + \frac{\mu}{D-b} \right), \dots \dots (203)$$

гдѣ D означаетъ разстояніе между центрами O и L .

Такъ какъ точка совершаетъ движеніе по прямой линіи OL между точками O и L , то r_1 и r_2 должны быть замѣнены величинами x и $D-x$, гдѣ x есть разстояніе движущейся точки отъ центра O .

Означимъ черезъ k разстояніе \overline{OK} , такъ какъ въ точкѣ K притяженія обоихъ центровъ должны взаимно уравновѣшиваться, то k должно удовлетворять слѣдующему равенству:

$$\epsilon \frac{Mm}{k^2} = \epsilon \frac{\mu m}{(D-k)^2},$$

изъ котораго слѣдуетъ:

$$k = \frac{D\sqrt{M}}{\sqrt{M} + \sqrt{\mu}}, \quad D-k = \frac{D\sqrt{\mu}}{\sqrt{M} + \sqrt{\mu}} \dots \dots (204)$$

Примѣнимъ уравненіе (203) къ тому моменту, въ который матеріальная точка остановится въ точкѣ K ; тогда будутъ: $v=0$, $r_1=k$, $r_2=D-k$; слѣдовательно:

$$\frac{a^2}{2} = \epsilon \left(\frac{M}{b} + \frac{\mu}{D-b} - \frac{M}{k} - \frac{\mu}{D-k} \right);$$

замѣнивъ здѣсь k и $(D-k)$ выраженіями (204) и произведя надлежащіе преобразованія, получимъ:

$$\frac{a^2}{2} = \epsilon \left(\frac{D-b}{Db} M + \frac{b}{D(D-b)} \mu - \frac{2\sqrt{M\mu}}{D} \right)$$

или:

$$\alpha^2 = \frac{2\epsilon}{D} \left(\sqrt{\frac{D-b}{b}} \sqrt{M} - \sqrt{\frac{b}{D-b}} \sqrt{\mu} \right)^2 \dots \dots (205)$$

Положимъ, что O и L представляютъ центры земли и луны, что M и μ означаютъ массы этихъ планетъ, D — величину разстоянія между ними, b — среднюю величину земнаго радіуса; тогда формула (205) послужитъ для опредѣленія той скорости, съ которою долженъ быть пущенъ снарядъ съ поверхности земли по направленію къ лунѣ, для того, чтобы онъ могъ дойти до той точки, въ которой притяженіе земли уравнивается притяженіемъ луны. Коэффициентъ ϵ , заключающійся въ формулѣ (205), можетъ быть опредѣленъ на основаніи того соображенія, что сила тяжести, приложенная къ массѣ m , находящейся на поверхности земли, выражается двоякимъ образомъ:

$$P = \epsilon \frac{Mm}{b^2}; \quad P = mg,$$

а потому:

$$\epsilon = \frac{gb^2}{M} \dots \dots \dots (205 \text{ bis})$$

Подставивъ это выраженіе для ϵ въ формулу (205), мы найдемъ слѣдующее выраженіе для α :

$$\alpha = \sqrt{2gb} \left(\sqrt{1 - \frac{b}{D}} - \frac{b}{\sqrt{D(D-b)}} \sqrt{\frac{\mu}{M}} \right).$$

Если принять во вниманіе, что D почти въ 60 разъ болѣе b и что масса луны почти въ 81 разъ менѣе массы земли, то можно сказать, что приблизительно:

$$\alpha = \sqrt{2gb}$$

3. Матерьяльная точка притягивается къ началу координатъ силою:

$$F = \frac{m\mu r}{2(2p-x)^3},$$

гдѣ μ и p суть величины постоянныя; опредѣлитъ движеніе матерьяльной точки, предполагая, что начальное положеніе ея на оси X , въ разстояніи p отъ начала координатъ, и что начальная скорость ея β параллельна оси Y .

Дифференціальныя уравненія движенія:

$$x'' = -\frac{\mu x}{2(2p-x)^2}, \quad y'' = -\frac{\mu y}{2(2p-x)^2}.$$

Такъ какъ сила центральная, то здѣсь имѣетъ мѣсто законъ площадей:

$$xy' - yx' = p\beta \dots \dots \dots (206)$$

Далѣе, первое изъ дифференціальныхъ уравненій интегрируется самостоятельно:

$$(x')^2 = C + \mu \frac{p-x}{(2p-x)^2},$$

а такъ какъ при $x=p$, $x'=0$, то $C=0$, поэтому:

$$x' = -\sqrt{\mu} \frac{\sqrt{p-x}}{2p-x} \dots \dots \dots (207)$$

Исключивъ dt изъ уравненій (206) и (207) и интегрируя получившееся дифференціальное уравненіе перваго порядка:

$$x \frac{dy}{dx} - y = -\frac{p\beta}{\sqrt{\mu}} \cdot \frac{2p-x}{\sqrt{p-x}},$$

или:

$$d\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{2p\beta}{\sqrt{\mu}} d\left(\frac{\sqrt{p-x}}{x}\right),$$

получимъ уравненіе траекторіи:

$$y^2 = \frac{4p^2\beta^2}{\mu} (p-x);$$

это — парабола, имѣющая вершину въ точкѣ ($x=p$, $y=0$) и ось — по направленію отрицательной оси Y .

Для окончательнаго рѣшенія вопроса остается только интегрировать уравненіе (207); получимъ:

$$(4p-x)\sqrt{p-x} = \frac{3}{2} t \sqrt{\mu}.$$

4. На материальную точку дѣйствуетъ та же самая сила, что и въ предыдущей задачѣ, но начальныя обстоятельства движенія какія либо другія. Определить видъ траекторіи и движеніе точки.

Для рѣшенія вопроса надо произвести тѣ же самыя дѣйствія, какъ и въ предыдущей задачѣ. Первые интегралы будутъ:

$$xy' - yx' = C_1, \quad (x')^2 = C_2 + \mu \frac{p-x}{(2p-x)^2};$$

вторые:

$$\frac{y}{x} = \Gamma_1 - \frac{2C_1}{(\mu + 4C_2 p)x} \sqrt{\mu(p-x) + C_2(2p-x)^2} \dots (208)$$

$$\frac{\mu}{2\sqrt{C_2}} \log \frac{2C_2(x-2p) - \mu - 2\sqrt{C_2} \sqrt{\mu(p-x) + C_2(2p-x)^2}}{\sqrt{\mu(\mu + 4pC_2)}} -$$

$$- \sqrt{\mu(p-x) + C_2(2p-x)^2} = C_2 t + \Gamma_2.$$

Интегралъ (208) есть уравненіе траекторіи; это — одна изъ кривыхъ втораго порядка. Родъ кривой опредѣляется знакомъ постоянной C_2 , если: C_2 болѣе нуля, то траекторія — гипербола, если C_2 менѣе нуля, то траекторія — эллипсъ, если $C_2 = 0$, то парабола.

5. Опредѣлитъ движеніе матерьяльной точки при дѣйствіи на нее слѣдующей притягательной силы къ началу координатъ:

$$F = \frac{\mu m r}{2(2p - x \cos \omega - y \sin \omega)^3},$$

гдѣ ω — постоянный уголъ.

Траекторія — коническое сѣченіе.

6. Опредѣлитъ движеніе матерьяльной точки при дѣйствіи на нее слѣдующей притягательной силы къ началу координатъ:

$$F = \frac{\mu m r}{\sqrt{x^2 y^2}}.$$

Дифференціальныя уравненія движенія въ этомъ случаѣ суть:

$$x'' = -\frac{\mu x}{\sqrt{x^2 y^2}}, \quad y'' = -\frac{\mu y}{\sqrt{x^2 y^2}}.$$

Одинъ изъ первыхъ интеграловъ выражаетъ законъ площадей:

$$xy' - yx' = C_1, \dots \dots \dots (209)$$

другой получается, интегрируя дифференціальное уравненіе:

$$x''y' + y''x' = -\frac{\mu(xy' + yx')}{\sqrt{x^2y^2}};$$

онъ будетъ:

$$x'y' = C_2 + \frac{2\mu}{\sqrt{xy}} \dots \dots \dots (210)$$

Чтобы произвести дальнѣйшія интегрированія, мы преобразуемъ первые интегралы слѣдующимъ образомъ.

Помножимъ (210) на $4xy$ и замѣнимъ $4xyx'y'$ слѣдующею разностью:

$$4xy'yx' = (xy' + yx')^2 - (xy' - yx')^2 = \left(\frac{d(xy)}{dt}\right)^2 - C_1^2;$$

послѣ этого изъ уравненія (210) получимъ слѣдующее дифференціальное уравненіе:

$$\frac{d(xy)}{dt} = \sqrt{C_1^2 + 4xy \left(C_2 + \frac{2\mu}{\sqrt{xy}}\right)}, \dots \dots \dots (211)$$

интегрируя которое, получимъ выраженіе t въ функціи отъ произведенія xy ; это будетъ одинъ изъ вторыхъ интеграловъ.

Исключимъ dt изъ дифференціального уравненія (211) и изъ интеграла (209):

$$\frac{dy}{y} - \frac{dx}{x} = \frac{C_1}{xy} dt,$$

получимъ дифференціальное уравненіе:

$$d \log \left(\frac{y}{x}\right) = \frac{C_1 d(xy)}{xy \sqrt{C_1^2 + 4xy \left(C_2 + \frac{2\mu}{\sqrt{xy}}\right)}},$$

въ лѣвой части котораго стоитъ полный дифференціалъ, а правая заключаетъ перемѣнную xy ; интегрируя это уравненіе, мы найдемъ:

$$\log \sqrt{\frac{y}{x}} = \log \sqrt{\Gamma_1} - \log(z + \sqrt{z^2 + p}),$$

гдѣ:

$$z = \frac{C_1}{\sqrt{xy}} + \frac{4\mu}{C_1}, \quad p = 4C_2 - \frac{16\mu^2}{C_1^2}.$$

Рѣшивъ полученное уравненіе относительно z , получимъ:

$$2z = \frac{\Gamma_1 x - yp}{\sqrt{\Gamma_1 xy}},$$

или

$$(\Gamma_1 x - py - 2C_1 \sqrt{\Gamma_1})^2 = \frac{64\mu^2 \Gamma_1}{C_1^2} xy. \dots\dots\dots (212)$$

Это есть уравнение кривой второго порядка; родъ кривой опредѣляется знакомъ постоянной C_1 .

7. *Опредѣлить движеніе матеріальной точки при дѣйствіи на нее притягательной силы:*

$$F = \frac{m\mu r}{\sqrt{(ax^2 + bxy + cy^2)^3}},$$

направленной къ началу координатъ.

Траекторія — коническое сѣченіе.

8. *Опредѣлить движеніе тяжелой матеріальной точки, свободно пущенной подъ экваторомъ въ разстояніи b отъ центра земнаго шара; убедиться въ вѣрности формуль (186), приведенныхъ на стр. 168 кинематической части. Центръ земли предполагается неподвижнымъ.*

Если эта матеріальная точка будетъ неизмѣнно связана съ землею, то она, находясь подъ экваторомъ въ разстояніи b отъ центра земли O (черт. 79 кинематической части), будетъ имѣть скорость $b\omega$, перпендикулярную къ радіусу OB и направленную къ востоку; эту же самую скорость будетъ имѣть матеріальная точка въ тотъ моментъ, когда она будетъ пущена свободно, то есть, когда связь, прикрѣпляющая ее къ землѣ, будетъ уничтожена.

Проведемъ изъ центра земли неподвижную ось OY черезъ то положеніе B матеріальной точки, которое она занимаетъ въ пространствѣ въ моментъ освобожденія ея отъ связи съ землею; ось OX проведемъ въ плоскости экватора параллельно направленію скорости $b\omega$; подъ ω мы подразумеваемъ угловую скорость суточного вращенія земли, а подъ b — среднюю величину земнаго радіуса, предполагая, что свободно пущенная точка находилась близъ поверхности земли; поэтому:

$$\omega = 0,0000729 \frac{1}{\text{секунд.}}, \quad b = 6370900 \text{ метр.}$$

Повинуясь притяженію къ центру земли:

$$z = \frac{mM}{r^2}$$

и имѣя начальную скорость:

$$x'_0 = b\omega, \quad y'_0 = 0$$

и начальное положеніе:

$$x_0=0, y_0=b,$$

матеріальная точка начнет совершать движеніе, рассмотрѣнное нами въ § 27 настоящей главы; нетрудно убѣдиться, что въ настоящемъ случаѣ движеніе будетъ совершаться по эллипсу; въ самомъ дѣлѣ:

$$2h=b^2\omega^2-\frac{2\epsilon\dot{M}}{b};$$

изъ формулы же (205 bis) задачи 2-й слѣдуетъ:

$$\epsilon M=g b^2,$$

поэтому:

$$2h=-b(2g-b\omega^2);$$

а такъ какъ:

$$2g=1,96 \frac{\text{метр}}{(\text{секунда})^2}, \quad b\omega^2=0,03385 \frac{\text{метр}}{(\text{секунда})^2},$$

то $2h$ менѣ нуля, слѣдовательно, траекторія эллиптическая.

Элементы этой орбиты слѣдующіе:

$$I=\pi, \quad a=-\frac{\epsilon M}{2h}=\frac{b}{2-b\omega^2}=1+e,$$

$$e=1-\frac{b\omega^2}{g}, \quad \sqrt{\frac{\epsilon M}{a^3}}=-\pi;$$

кроме того, означая через Θ уголъ, составляемый радіусомъ векторомъ съ положительною осью X и отсчитываемый отъ этой оси въ сторону положительной оси Y , будемъ имѣть:

$$\Theta=\frac{3\pi}{2}-\psi,$$

гдѣ ψ есть уголъ, отсчитываемый отъ направленія наименьшаго радіуса вектора въ сторону движенія точки.

Перигелій орбиты находится на отрицательной сторонѣ оси Y и уголъ Θ съ теченіемъ времени уменьшается.

Движеніе пущенной точки выражается слѣдующими формулами:

$$x=r \cos \Theta=-r \sin \psi; \quad y=r \sin \Theta=-r \cos \psi$$

$$\operatorname{tg} \frac{f}{2} = \operatorname{tg} \frac{\psi}{2} \sqrt{\frac{1-e}{1+e}}, \quad f - \pi - e \sin f = t \sqrt{\frac{\epsilon M}{a^3}},$$

$$r = \frac{a\sqrt{1-e^2}}{1+e \cos \psi} = a(1 - e \cos f);$$

поэтому:

$$x = -a\sqrt{1-e^2} \sin f, \quad y = a(e - \cos f) \dots \dots (213)$$

Для того, чтобы разложить x и y въ ряды по возрастающимъ степенямъ t , составимъ сначала подобное разложение для f .

Возьмемъ производную по времени отъ обѣихъ частей равенства:

$$f - \pi - e \sin f = nt, \quad n = \sqrt{\frac{\epsilon M}{a^3}};$$

получимъ:

$$f' (1 - e \cos f) = n;$$

повторяя то же дѣйствіе надъ полученнымъ равенствомъ и такъ продолжая далѣе, будемъ получать равенства:

$$0 = f'' (1 - e \cos f) + e (f')^2 \sin f$$

$$0 = f''' (1 - e \cos f) + 3ef' f'' \sin f + e (f')^2 \cos f$$

.....

.....,

изъ которыхъ опредѣлимъ величины производныхъ:

$$f'_0 = \frac{n}{1+e}, \quad f''_0 = 0, \quad f'''_0 = \frac{en^3}{(1+e)^4},$$

$$f^{(4)}_0 = 0, \quad f^{(5)}_0 = \frac{en^5(9e-1)}{(1+e)^7}, \dots \dots$$

для момента $t=0$.

Подставляя эти величины въ Тайлоровъ рядъ:

$$f = f_0 + f'_0 t + f''_0 \frac{t^2}{1.2} + \dots \dots \dots$$

получимъ:

$$f = \pi + \frac{nt}{1+e} + \frac{n^3 t^3}{(1+e)^3} \frac{e}{1.2.3} + \frac{n^5 t^5}{(1+e)^5} \frac{e(9e-1)}{1.2.3.4.5} + \dots$$

и отсюда:

$$\frac{n}{f'} = 1 + e - \frac{n^3 t^3}{(1+e)^3} \frac{e}{1.2} - \frac{n^5 t^5}{(1+e)^5} \frac{e(3e-1)}{1.2.3.4} - \dots$$

Отсюда легко получатся ряды для $\sin f$ и $\cos f$, такъ какъ:

$$\sin f = \frac{f - \pi - nt}{e}; \quad \cos f = \frac{1}{e} \left(1 - \frac{n}{f'} \right).$$

Затѣмъ, подставивъ полученныя выраженія для $\sin f$ и $\cos f$ въ формулы (213) и принявъ во вниманіе, что:

$$\frac{n^3}{(1+e)^3} = \frac{\varepsilon M}{a^3(1+e)^3} = \frac{g}{b},$$

$$an \sqrt{\frac{1-e}{1+e}} = a \sqrt{\frac{gb^3}{a^3}} \sqrt{\frac{b\omega^2}{g(1+e)}} = b\omega,$$

получимъ слѣдующіе ряды:

$$x = b\omega t \left(1 - \frac{g}{b} \frac{t^2}{1.2.3} - \frac{g^2}{b^2} \frac{\left(8 - 9 \frac{b\omega^2}{g} \right) t^4}{1.2.3.4.5} - \dots \right)$$

$$y = b \left(1 - \frac{g}{b} \frac{t^2}{1.2} - \frac{g^2}{b^2} \frac{\left(2 - 3 \frac{b\omega^2}{g} \right) t^4}{1.2.3.4} - \dots \right)$$

Отношеніе $g : b$ есть весьма малая дробь:

$$\frac{g}{b} = 0,00000153 \frac{1}{(\text{секунда})^2}.$$

9. Решить задачу о движеніи матерьяльной точки, притягиваемой къ началу координатъ силою:

$$F = \frac{\mu m}{r^3}.$$

Поступая, какъ указано въ параграфѣ 27, получимъ слѣдующіе результаты.

а) Когда $2h$ больше нуля.

Радиусъ векторъ измѣняется съ теченіемъ времени по слѣдующему закону:

$$r\sqrt{2h} = \sqrt{(2ht + \Gamma_1)^2 + C^2 - \mu},$$

гдѣ:

$$C = \pm v_0 r_0 \sin(v_0 r_0), \quad 2h = v_0^2 - \frac{\mu}{r_0^2}, \quad \Gamma_1 = v_0 r_0 \cos(v_0 r_0).$$

Уравненіе траекторіи:

1) Если $C^2 - \mu$ больше нуля:

$$r\sqrt{\frac{2h}{C^2}} = \frac{\lambda}{\sin \lambda(\theta + \Gamma_2)}, \quad \lambda^2 = 1 - \frac{\mu}{C^2};$$

2) если $C^2 = \mu$:

$$r(\theta + \Gamma_2) = \frac{C}{\sqrt{2h}};$$

3) если $C^2 - \mu$ меньше нуля:

$$r\sqrt{\frac{2h}{C^2}} = \frac{2x}{e^{x\varphi} - e^{-x\varphi}},$$

$$x^2 = \frac{\mu}{C^2} - 1, \quad \varphi = \theta + \Gamma_2.$$

б) Въ тѣхъ случаяхъ, когда $2h$ равно нулю:

$$v^2 = \frac{\mu}{r^2}, \quad r^2 = r_0^2 + 2t\sqrt{\mu - C^2}$$

Траекторія:

$$r = \Gamma e^{x\theta}, \quad x^2 = \frac{\mu}{C^2} - 1.$$

в) Въ тѣхъ случаяхъ, когда $2h$ меньше нуля:

$$r\sqrt{-2h} = \sqrt{\mu - C^2 - (\Gamma_1 + 2ht)^2}.$$

Уравненіе траекторіи:

$$r\sqrt{\frac{-2h}{C^2}} = \frac{2x}{e^{x\varphi} + e^{-x\varphi}}.$$

10. Такимъ же образомъ могутъ быть рассмотрѣны *все случаи*

движенія матеріальной точки подъ вліянніемъ слѣдующей силы притяженія къ началу координатъ:

$$F = m \left(\frac{\mu}{r^3} + \frac{\nu}{r^2} \right).$$

Напримѣръ, уравненіе траекторіи при $2h$ большею нуля и при $(\nu - C^2)$ меньшею нуля — слѣдующее:

$$r = \frac{p}{1 - e \sin \kappa (\theta + \Gamma)},$$

гдѣ:

$$p = \frac{C^2 \kappa^2}{\mu}, \quad e = \sqrt{1 + \frac{C^2 \kappa^2}{\mu^2} - 2h}, \quad \kappa^2 C^2 = C^2 - \nu.$$

11. Определить движеніе матеріальной точки, къ которой приложена сила

$$F = m \left(\mu^2 r - \frac{\lambda^2}{r^3} \right),$$

состоящая изъ притяженія къ началу координатъ, пропорціональнаго разстоянію отъ него, и изъ отталкивательной силы отъ той же точки, обратно пропорціональной кубу разстоянія.

Если $h^2 - \mu^2(\lambda^2 + C^2)$ болѣе нуля, то уравненіе траекторіи:

$$r^2 = \frac{q}{1 + e \cos 2\kappa (\theta + \Gamma_1)},$$

$$q = \frac{C^2 + \lambda^2}{h}, \quad \kappa^2 = 1 + \frac{\lambda^2}{C^2}, \quad e = \sqrt{1 - \frac{\mu^2 \kappa^2 C^2}{h^2}};$$

законъ измѣненія аргумента θ — слѣдующій:

$$\operatorname{tg} \kappa (\theta + \Gamma_1) = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \operatorname{tg} \mu (\Gamma_2 + t).$$

12. Движеніе тяжелой матеріальной точки въ средѣ, оказывающей движенію сопротивленіе, выражающееся такъ:

$$mg(k + \mu v^n);$$

сопротивленіе это направлено противоположно скорости.

Приводимъ здѣсь то рѣшеніе этой задачи, которое далъ Якоби *).

*) Journal Crelle. B. XXIV.

Движеніе матерьяльной точки совершается, конечно, въ той вертикальной плоскости, въ которой заключается начальная скорость; эту плоскость примемъ за плоскость XU , начальное положеніе движущейся точки примемъ за начало координатъ, ось U направимъ параллельно ускоренію силы тяжести.

Въ этой задачѣ возьмемъ дифференціальныя уравненія движенія вида (39); означивъ черезъ φ уголъ, составляемый направлениемъ скорости съ осью X , будемъ имѣть, по сокращеніи на m :

$$\frac{dv}{dt} = g \sin \varphi - gk - g\mu v^n \dots \dots \dots (214)$$

$$\frac{v^2}{\rho} = \mp g \cos \varphi, \dots \dots \dots (215)$$

гдѣ ρ означаетъ величину радіуса кривизны:

$$\rho = \mp \frac{ds}{d\varphi} = \mp \frac{v dt}{d\varphi} \dots \dots \dots (216)$$

(Знаки \mp въ обоихъ равенствахъ (215) и (216) должны быть одинаковые).

Изъ равенствъ (215) и (216) слѣдуетъ:

$$dt = \frac{v d\varphi}{g \cos \varphi}; \dots \dots \dots (217)$$

исключивъ затѣмъ изъ уравненій (214) и (217) дифференціалъ dt , получимъ дифференціальное уравненіе:

$$\frac{dv}{v d\varphi} = \operatorname{tg} \varphi - \frac{k}{\cos \varphi} - \frac{\mu}{\cos \varphi} v^n,$$

которое можетъ быть обращено въ обыкновенное линейное дифференціальное уравненіе перваго порядка, если сдѣлаемъ слѣдующую подстановку:

$$\frac{1}{v^n} = z;$$

тогда будемъ имѣть:

$$\frac{dz}{d\varphi} = -n \left(\operatorname{tg} \varphi - \frac{k}{\cos \varphi} \right) z + \frac{n\mu}{\cos \varphi}.$$

Интегрируя это линейное дифференціальное уравненіе по известному правилу, мы получимъ слѣдующій результатъ:

$$z = \frac{\cos^n \varphi}{\operatorname{tg}^{kn} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \right)} \left(C^n + \mu n \int \operatorname{tg}^{kn} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \right) \frac{d\varphi}{\cos^{n+1} \varphi} \right);$$

откуда получимъ выраженіе скорости v въ функціи угла φ :

$$v = \frac{\eta^{k-1} (1 + \eta^2)}{2 \left(C^n - \frac{\mu n}{2^n} \int \eta^{nk-n-1} (1 + \eta^2)^n d\eta \right)^{\frac{1}{n}}}, \dots (218)$$

гдѣ:

$$\eta = \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \right).$$

Подставивъ въ уравненіе (217):

$$dt = - \frac{v d\eta}{g\eta} \dots \dots \dots (217 \text{ bis})$$

выѣсто v вторую часть равенства (218) и интегрируя полученное дифференціальное уравненіе, получимъ зависимость между угломъ φ и временемъ.

Координаты x и y могутъ быть выражены въ функціяхъ угла φ ; для этого надо взять равенства:

$$dx = v \cos \varphi dt, \quad dy = v \sin \varphi dt,$$

выразить въ нихъ $\cos \varphi$ и $\sin \varphi$ функціями отъ η , а dt исключить при помощи формулы (217 bis):

$$dx = - \frac{2v^2 d\eta}{g(1 + \eta^2)}, \dots \dots \dots (219)$$

$$dy = - \frac{v^2 (1 - \eta^2) d\eta}{g(1 + \eta^2) \eta}, \dots \dots \dots (220)$$

затѣмъ замѣнить v второю частью равенства (218) и полученныя дифференціальныя уравненія интегрировать.

13. Определить движеніе тяжелой матеріальной точки въ средѣ, оказывающей движенію сопротивленіе постоянной величины kmg .

Рѣшеніе заключается въ формулахъ предыдущей задачи, если въ нихъ сдѣлать μ равнымъ нулю и произвести указанныя интегрированія.

Получимъ:

$$v = \frac{\eta^{k-1}(1+\eta^2)}{2C},$$

$$t + \Gamma_1 = -\frac{1}{2gC} \left(\frac{\eta^{k-1}}{k-1} + \frac{\eta^{k+1}}{k+1} \right),$$

$$x + \Gamma_2 = -\frac{1}{2gC^2} \left(\frac{\eta^{2k-1}}{2k-1} + \frac{\eta^{2k+1}}{2k+1} \right),$$

$$y + \Gamma_3 = -\frac{1}{4gC^2} \left(\frac{\eta^{2k-2}}{2k-2} - \frac{\eta^{2k+2}}{2k+2} \right); \quad \eta = \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \right).$$

Разсматривая эти уравненія, можно убѣдиться, что при $k > 1$ скорость движущейся точки обращается въ нуль въ той точкѣ траекторіи, въ которой уголъ φ дѣлается равнымъ $\frac{\pi}{2}$; координаты этой точки суть: $-\Gamma_2$ и $-\Gamma_3$ и движущаяся точка приходитъ туда въ моментъ $(-\Gamma_1)$.

Если $k < 1$, но не менѣе $\frac{1}{2}$, то скорость не обращается въ нуль и движущаяся точка направляется въ безконечность, приближаясь, асимптотически, къ вертикальной линіи: $x = -\Gamma_2$.

Если $k < \frac{1}{2}$, то движущаяся точка направляется въ безконечность, причемъ траекторія, подобно параболѣ, не имѣетъ асимптоты.

14. Движеніе матерьяльной тяжелой точки въ средѣ, сопротивленіе которой движенію пропорціонально квадрату скорости.

Рѣшеніе получается изъ формулъ задачи 12-й, если сдѣлать въ нихъ k равнымъ нулю и n равнымъ двумъ; такъ, формула (218) даетъ слѣдующее выраженіе скорости въ функціи угла φ :

$$\frac{1}{v \cos \varphi} = \sqrt{\frac{1}{v_1^2} - \mu \left(\log \eta - \frac{\operatorname{tg} \varphi}{\cos \varphi} \right)} \dots \dots \dots (221)$$

$$\eta = \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \right)$$

(гдѣ v_1 есть скорость въ наивысшей точкѣ траекторіи).

Кромѣ того можно найти въ этомъ случаѣ другой первый интегралъ, выражающій проэкцію скорости на ось X въ функціи длины дуги траекторіи; въ самомъ дѣлѣ, изъ дифференціальныхъ уравненій:

$$\frac{dv}{dt} = g \sin \varphi - g\mu v^2, \quad v^2 = g \frac{ds}{d\varphi} \cos \varphi$$

составимъ уравненіе:

$$\frac{dv}{v d\varphi} \cos \varphi = \sin \varphi - g\mu \cos \varphi \frac{ds}{d\varphi},$$

дающее интегралъ:

$$v \cos \varphi = v_1 e^{-g\mu s}; \dots \dots \dots (222)$$

гдѣ s есть длина дуги траекторіи, считаемая отъ самой высшей точки ея въ сторону движенія.

Исключивъ скорость v изъ интеграловъ (221) и (222), получимъ слѣдующую зависимость между длиною дуги s и угломъ φ (или величиною η):

$$\frac{1}{\mu v_1^2} (1 - e^{2g\mu s}) = \log \eta - \frac{1 - \eta^4}{4\eta^3} \dots \dots \dots (223)$$

Эта зависимость показываетъ, что, на сторонѣ положительныхъ дугъ s , касательная къ траекторіи приближается къ параллельности съ осью Y (потому что при $s \rightarrow \infty$ величина η должна обратиться въ нуль, а слѣдовательно φ обращается тогда въ $\frac{\pi}{2}$); на сторонѣ отрицательныхъ дугъ s касательная къ траекторіи приближается къ параллельности съ направлениемъ, составляющимъ съ осью X такой уголъ φ_1 , который удовлетворяетъ уравненію:

$$\frac{1}{\mu v_1^2} = \log \operatorname{tg}^2 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi_1}{2} \right) - \frac{\operatorname{tg} \varphi_1}{\cos \varphi_1}.$$

Чтобы рѣшить вопросъ вполне, надо еще интегрировать уравненія (217 bis), (219) и (220).

15. Составить уравненіе траекторіи, описываемой матеріальною точкою, притягиваемою къ началу координатъ слѣдующею силою:

$$F = m\mu \frac{v^2}{r^3}.$$

Дифференціальныя уравненія движенія въ этомъ случаѣ суть:

$$x'' = -\mu \frac{v^2}{r^3} x, \quad y'' = -\mu \frac{v^2}{r^3} y.$$

Такъ какъ сила направлена къ началу координатъ, то законъ площадей имѣетъ мѣсто; поэтому одинъ изъ первыхъ интеграловъ будетъ:

$$r^2 \theta' = C_1 \dots \dots \dots (224)$$

Другой первый интеграл найдемъ, интегрируя дифференціальное уравненіе:

$$x'x'' + y'y'' = -\mu \frac{v^2}{r^3} (xx' + yy');$$

получимъ:

$$v^2 = \frac{C^2}{r^{2\mu}} \dots \dots \dots (225)$$

Изъ уравненій (224) и (225) составимъ дифференціальное уравненіе:

$$\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 r^{2\mu-4} + r^{2\mu-2} = \frac{C_2}{C_1^2},$$

интегрируя которое, получимъ уравненіе траекторіи:

$$r^{\mu-1} = \frac{\sqrt{C_2}}{C_1} \sin [(\mu-1)(\theta + \Gamma_1)].$$

16. На матерьяльную точку дѣйствуетъ сила:

$$F = m\mu \frac{v^2}{r},$$

перпендикулярная къ радіусу вектору и стремящаяся увеличить уголъ θ ; составимъ уравненіе траекторіи, описываемой матерьяльною точкою.

Въ этомъ случаѣ дифференціальныя уравненія движенія будутъ:

$$x'' = -\mu \frac{v^2}{r^3} y, \quad y'' = \mu \frac{v^2}{r^3} x.$$

Составимъ дифференціальное уравненіе:

$$\frac{x'x'' + y'y''}{(x')^2 + (y')^2} = \mu \frac{xy' - yx'}{x^2 + y^2};$$

интегрируя его, получимъ:

$$\log v^2 = C_1 + 2\mu \arctg \left(\frac{y}{x}\right),$$

или:

$$v^2 = v_0^2 e^{2\mu(\theta - \theta_0)} \dots \dots \dots (226)$$

Другой интегралъ и уравненіе траекторіи получатся при помощи приѣма, указаннаго А. Н. Коркинымъ и приведеннаго здѣсь въ пунктѣ 3-мъ пара-

графа 28; применить этот прием здесь возможно потому, что сила удовлетворяет условию (193):

$$x' Y - y' X = (x')^3 f\left(x, y, \frac{y'}{x'}\right); \dots \dots \dots (193)$$

а именно, в этой задаче:

$$f\left(x, y, \frac{y'}{x'}\right) = m\mu \frac{\left(x + y \frac{y'}{x'}\right)\left(1 + \left(\frac{y'}{x'}\right)^2\right)}{x^2 + y^2}.$$

Составим дифференциальное уравнение:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \mu \frac{x + y \frac{dy}{dx}}{x^2 + y^2} \left(1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right);$$

первый интеграл его будет следующий:

$$\arctg \frac{dy}{dx} = \log C_2 (x^2 + y^2)^{\frac{\mu}{2}}$$

или:

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} \log C_2 r^\mu \dots \dots \dots (227)$$

Выразим производную от y по x в полярных координатах; тогда уравнение (227) можно представить под следующим видом:

$$\frac{dr}{r d\theta} = - \frac{1}{\operatorname{tg} (\theta - \log C_2 r^\mu)},$$

или:

$$\frac{\sin z dz}{\sin z + \mu \cos z} = d\theta, \quad z = \theta - \log C_2 r^\mu;$$

интегрируя это уравнение, получим уравнение траектории:

$$C_2^{\frac{1}{\mu}} r \sin (\theta + \arctg \mu - \log C_2 r^\mu) = \Gamma_1 e^{-\mu \theta} \dots \dots \dots (228)$$

17. К материальной точке приложено две силы: одна перпендикулярна к радиусу вектору, равна:

$$\frac{\mu m}{r}$$

$$\operatorname{tg} \frac{f}{2} = \operatorname{tg} \frac{\psi}{2} \sqrt{\frac{1-e}{1+e}}, \quad f - \pi - e \sin f = t \sqrt{\frac{\epsilon M}{a^3}},$$

$$r = \frac{a\sqrt{1-e^2}}{1+e \cos \psi} = a(1 - e \cos f);$$

поэтому:

$$x = -a\sqrt{1-e^2} \sin f, \quad y = a(e - \cos f) \dots \dots (213)$$

Для того, чтобы разложить x и y въ ряды по возрастающимъ степенямъ t , составимъ сначала подобное разложение для f .

Возьмемъ производную по времени отъ обѣихъ частей равенства:

$$f - \pi - e \sin f = nt, \quad n = \sqrt{\frac{\epsilon M}{a^3}};$$

получимъ:

$$f' (1 - e \cos f) = n;$$

повторяя то же дѣйствіе надъ полученнымъ равенствомъ и такъ продолжая далѣе, будемъ получать равенства:

$$0 = f'' (1 - e \cos f) + e (f')^2 \sin f$$

$$0 = f''' (1 - e \cos f) + 3ef' f'' \sin f + e (f')^3 \cos f$$

.....

.....,

изъ которыхъ опредѣлимъ величины производныхъ:

$$f'_0 = \frac{n}{1+e}, \quad f''_0 = 0, \quad f'''_0 = \frac{en^3}{(1+e)^4},$$

$$f^{(4)}_0 = 0, \quad f^{(5)}_0 = \frac{en^5(9e-1)}{(1+e)^7}, \dots \dots$$

для момента $t=0$.

Подставляя эти величины въ Тайлоровъ рядъ:

$$f = f_0 + f'_0 t + f''_0 \frac{t^2}{1.2} + \dots \dots \dots$$

получимъ:

$$f = \pi + \frac{nt}{1+e} + \frac{n^3 t^3}{(1+e)^4} \frac{e}{1.2.3} + \frac{n^5 t^5}{(1+e)^7} \frac{e(9e-1)}{1.2.3.4.5} + \dots$$

и отсюда:

$$\frac{n}{f'} = 1 + e - \frac{n^3 t^3}{(1+e)^3} \frac{e}{1.2} - \frac{n^5 t^5}{(1+e)^5} \frac{e(3e-1)}{1.2.3.4} - \dots$$

Отсюда легко получатся ряды для $\sin f$ и $\cos f$, такъ какъ:

$$\sin f = \frac{f - \pi - nt}{e}; \quad \cos f = \frac{1}{e} \left(1 - \frac{n}{f'} \right).$$

Затѣмъ, подставивъ полученные выраженія для $\sin f$ и $\cos f$ въ формулы (213) и принявъ во вниманіе, что:

$$\frac{n^3}{(1+e)^3} = \frac{\varepsilon M}{a^3 (1+e)^3} = \frac{g}{b},$$

$$an \sqrt{\frac{1-e}{1+e}} = a \sqrt{\frac{gb^2}{a^3}} \sqrt{\frac{b\omega^2}{g(1+e)}} = b\omega,$$

получимъ слѣдующіе ряды:

$$x = b\omega t \left(1 - \frac{g}{b} \frac{t^2}{1.2.3} - \frac{g^2}{b^2} \frac{\left(8 - 9 \frac{b\omega^2}{g} \right) t^4}{1.2.3.4.5} - \dots \right)$$

$$y = b \left(1 - \frac{g}{b} \frac{t^2}{1.2} - \frac{g^2}{b^2} \frac{\left(2 - 3 \frac{b\omega^2}{g} \right) t^4}{1.2.3.4} - \dots \right)$$

Отношеніе $g : b$ есть весьма малая дробь:

$$\frac{g}{b} = 0,00000153 \frac{1}{(\text{секунда})^2}.$$

9. Рѣшить задачу о движеніи матерьяльной точки, притягиваемой къ началу координатъ силою:

$$F = \frac{\mu m}{r^3}.$$

Поступая, какъ указано въ параграфѣ 27, получимъ слѣдующіе результаты.

и стремится увеличить угол θ , другая сила направлена къ началу координатъ, равна:

$$mr \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2;$$

опредѣлить движеніе.

Въ этомъ случаѣ одинъ изъ первыхъ интеграловъ имѣетъ видъ (188) (см. пунктъ 1-й параграфа 28):

$$r^2 \frac{d\theta}{dt} = \mu t + C_1 \dots \dots \dots (229)$$

Задача рѣшается вполне и уравненіе траекторіи получается слѣдующаго вида:

$$\log r + \frac{p}{r} = \frac{(r'_0)^2}{\mu} (\theta + \gamma), \dots \dots \dots (230)$$

гдѣ p и γ суть постоянныя величины.

18. Къ матеріальной точкѣ приложена сила:

$$F_1 = m\mu \frac{f(\theta)}{r^3},$$

перпендикулярная къ радіусу вектору и стремящаяся увеличить угол θ , и другая сила:

$$F_2 = mr \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2,$$

направленная къ началу координатъ; опредѣлить движеніе.

Здѣсь получается интегралъ вида (190) (см. пунктъ 2-й параграфа 28):

$$r^4 \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 = C_1 + 2\mu\phi(\theta), \dots \dots \dots (231)$$

$$\phi(\theta) = \int f(\theta) d\theta.$$

Задача рѣшается вполне и получается слѣдующее уравненіе траекторіи:

$$\frac{1}{C_2 r} = \Gamma_2 - \int \frac{d\theta}{\sqrt{C_1 + 2\mu\phi(\theta)}} \dots \dots \dots (232)$$

§ 30. Задачи, въ которыхъ требуется опредѣлить относительное движеніе матерьяльной точки по отношенію къ неизмѣняемой средѣ, имѣющей данное движеніе; даны силы, приложенныя къ матерьяльной точкѣ.

Такия задачи можно рѣшать двоякимъ путемъ:

1) Можно опредѣлить абсолютное движеніе матерьяльной точки, а затѣмъ перейти къ относительному движенію ея по отношенію къ данной движущейся неизмѣняемой средѣ, какъ указано въ § 42 кинематической части.

2) Можно составить дифференціальныя уравненія относительнаго движенія матерьяльной точки по отношенію къ данной неизмѣняемой средѣ; интегрируя эти дифференціальныя уравненія, получимъ рѣшеніе задачи.

Обратимъ вниманіе на рѣшеніе такихъ задачъ вторымъ путемъ.

Дифференціальныя уравненія относительнаго движенія матерьяльной точки по отношенію къ данной движущейся неизмѣняемой средѣ получаются изъ равенствъ (347) кинематической части, — стоитъ лишь помножить эти равенства на m и замѣнить произведенія:

$$m\dot{v} \cos(\dot{v}E), m\dot{v} \cos(\dot{v}Y), m\dot{v} \cos(\dot{v}Z)$$

проекціями на оси E, Y, Z равнодѣйствующей силъ, приложенныхъ къ матерьяльной точкѣ; величины этихъ проекцій мы будемъ обозначать буквами: E, Y, Z .

Слѣдовательно, общій видъ дифференціальныхъ уравненій относительнаго движенія матерьяльной точки, подверженной даннымъ силамъ, по отношенію къ неизмѣняемой средѣ движущейся даннымъ образомъ, будетъ таковъ:

$$m \frac{d^2\xi}{dt^2} = E - m\dot{\omega}_\infty \cos(\dot{\omega}_\infty E) - m\zeta \frac{dq}{dt} + m\eta \frac{dr}{dt} - \\ - mp(p\xi + q\eta + r\zeta) + m\xi\Omega^2 - 2m\left(q \frac{d\zeta}{dt} - r \frac{d\eta}{dt}\right), \dots (233, a)$$

$$m \frac{d^2 \eta}{dt^2} = Y - m \dot{\omega}_0 \cos(\dot{\omega}_0 Y) - m \xi \frac{dr}{dt} + m \zeta \frac{dp}{dt} - \\ - m q (p \xi + q \eta + r \zeta) + m \eta \Omega^2 - 2m \left(r \frac{d\xi}{dt} - p \frac{d\zeta}{dt} \right), \dots (233, b)$$

$$m \frac{d^2 \zeta}{dt^2} = Z - m \dot{\omega}_0 \cos(\dot{\omega}_0 Z) - m \eta \frac{dp}{dt} + m \xi \frac{dq}{dt} - \\ - m r (p \xi + q \eta + r \zeta) + m \zeta \Omega^2 - 2m \left(p \frac{d\eta}{dt} - q \frac{d\xi}{dt} \right) \dots (233, c)$$

Для примѣра рѣшенія задачъ вторымъ путемъ возьмемъ слѣдующій вопросъ.

Примѣръ 20-й. Къ матерьяльной точкѣ приложена сила, направленная къ началу координатъ или по продолженію радіуса вектора; проекція этой силы на ось α (продолженіе радіуса вектора) выражается слѣдующею функціею отъ r :

$$F = m \left(\mu r + \frac{\lambda}{r^2} \right),$$

гдѣ μ и λ суть двѣ постоянныя величины. Начальная скорость матерьяльной точки направлена въ плоскости XU ; опредѣлить относительное движеніе точки по отношенію къ неизмѣняемой средѣ, вращающейся съ постоянною угловою скоростью ω вокругъ положительной оси Z .

Предположимъ, что ось Z совпадаетъ съ осью Z , точка $Ю$ — съ началомъ координатъ, тогда дифференціальныя уравненія относительнаго движенія точки по отношенію къ плоскости EY будутъ:

$$\xi'' = \mu \xi + \frac{\lambda}{r^2} \xi + \omega^2 \xi + 2\omega \eta'$$

$$\eta'' = \mu \eta + \frac{\lambda}{r^2} \eta + \omega^2 \eta - 2\omega \xi'.$$

Изъ нихъ составимъ дифференціальныя уравненія:

$$\xi \eta'' - \eta \xi'' = -2\omega (\xi \xi' + \eta \eta'),$$

$$\xi' \xi'' + \eta' \eta'' = \left((\mu + \omega^2) + \frac{\lambda}{r^2} \right) (\xi \xi' + \eta \eta'),$$

первые интегралы которых суть:

$$\xi\eta' - \eta\xi' = D_1 - \omega r^2, \dots\dots\dots (234)$$

$$(\xi')^2 + (\eta')^2 = (\mu + \omega^2)r^2 - \frac{\lambda}{r^2} + 2H, \dots\dots\dots (235)$$

или

$$r^2 \frac{d\varphi}{dt} = D_1 - \omega r^2 \dots\dots\dots (234 \text{ bis})$$

$$u^2 = (\mu + \omega^2)r^2 - \frac{\lambda}{r^2} + 2H, \dots\dots\dots (235 \text{ bis})$$

гдѣ D_1 и H суть произвольныя постоянныя, u — скорость относительнаго движенія точки; φ — уголъ, составленный радіусомъ векторомъ съ положительною осью Ξ .

Во второмъ интегралѣ замѣнимъ u^2 суммою:

$$u^2 = \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2 \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2;$$

Поступая затѣмъ такъ, какъ въ задачахъ 9, 10 и 11-й предыдущаго параграфа, получимъ слѣдующіе вторые интегралы:

$$\int \frac{dr}{R} = t + \Delta_1; \dots\dots\dots (236)$$

$$\int \left(\frac{D_1}{r^2} - \omega\right) \frac{dr}{R} = \varphi + \Delta_2; \dots\dots\dots (237)$$

здѣсь:

$$R = \sqrt{\mu r^2 + 2(H + \omega D_1) - \frac{(\lambda + D_1^2)}{r^2}}.$$

Тѣ же самыя результаты получатся и при рѣшеніи задачи первымъ путемъ; въ самомъ дѣлѣ, первые интегралы абсолютнаго движенія точки суть:

$$r^2 \frac{d\theta}{dt} = C_1, \quad v^2 = \mu r^2 - \frac{\lambda}{r^2} + 2h;$$

а вторые интегралы:

$$\int \frac{dr}{R_1} = t + \Gamma_1, \quad \int \frac{C_1}{r^2} \frac{dr}{R_1} = \theta + \Gamma_2,$$

гдѣ:

$$R_1 = \sqrt{\mu r^2 + 2h - \frac{\lambda + C_1^2}{r^2}};$$

но такъ какъ:

$$\theta = \varphi + \omega t, \quad v^2 = u^2 + 2r^2 \varphi' \omega + \omega^2 r^2,$$

то окажется, что:

$$D_1 = C_1, \quad 2h = 2D_1\omega + 2H, \quad R_1 = R,$$

$$\Delta_1 = \Gamma_1, \quad \Delta_2 = \Gamma_2 - \omega \Gamma_1.$$

Произведя въ дѣйствительности интегрированіе, означенное въ формулѣ (237), мы получимъ уравненіе траекторіи относительнаго движенія; видъ этой кривой можетъ быть весьма разнообразенъ въ зависимости отъ знаковъ постоянныхъ μ и λ и отъ величинъ произвольныхъ постоянныхъ D_1 и h . Обратимъ вниманіе на тѣ случаи, въ которыхъ эта кривая получаетъ видъ логарифмической спирали.

Уравненіе (237) получитъ видъ:

$$\log r = n(\bar{\varphi} + \Delta_2), \dots \dots \dots (237 \text{ bis})$$

гдѣ n — постоянная величина, если при всякомъ r имѣетъ мѣсто слѣдующее равенство:

$$\mu r^2 + 2h - \frac{\lambda + D_1^2}{r^2} = n^2 r^2 \left(\frac{D_1}{r^2} - \omega \right)^2;$$

что можетъ быть только при слѣдующихъ условіяхъ:

$$\mu = n^2 \omega^2, \quad \lambda + D_1^2 = -n^2 D_1^2, \quad 2h = -2n^2 D_1 \omega;$$

то есть:

$$\mu = n^2 \omega^2, \quad \lambda = -(n^2 + 1) D_1^2, \quad H = -(1 + n^2) D_1 \omega;$$

первыя два условія показываютъ, что относительное движеніе по логарифмической спирали возможно тогда, когда сила пропорціональная разстоянію r есть отталкиваніе отъ начала координатъ, а сила обратно-пропорціональная кубу r есть притяженіе къ той же точкѣ.

Возьмемъ теперь другой примѣръ, болѣе сложный.

Примѣръ 21-й. Опредѣлить относительное движеніе (по отношенію къ землѣ) матеріальной тяжелой точки, брошенной въ данномъ мѣстѣ земной поверхности по какому нибудь направленію и съ какою бы то ни было скоростью; принять во вниманіе суточное вращательное движеніе земли вокругъ ея оси и годовое движеніе центра ея вокругъ солнца.

Примемъ за точку $Ю$ (черт. 16) ту точку земной поверхности, изъ которой брошена матеріальная точка; положительную ось Z проведемъ по продолженію земнаго радіуса R (проведеннаго изъ центра земли C въ точку $Ю$); ось $Э$ проведемъ по пересѣченію плоскости горизонта точки $Ю$ съ плоскостью меридіана этой точки и положительную часть этой оси направимъ въ югу; ось $Υ$ будетъ касательною къ параллели точки $Ю$ и положительная часть ея будетъ направлена къ западу горизонта точки $Ю$.

Угловая скорость ω земли направлена параллельно радіусу, идущему изъ центра C земли къ южному полюсу ея S ; если провести угловую скорость черезъ точку $Ю$, то окажется, что она будетъ заключаться въ плоскости $Z Э$ и будетъ составлять съ положительною осью $Э$ уголъ λ , а съ положительною осью Z уголъ $(\frac{\pi}{2} + \lambda)$, гдѣ λ есть сѣверная широта точки $Ю$; поэтому проекціи угловой скорости на оси $Э$, $Υ$, Z имѣютъ слѣдующія величины:

$$p = \omega \cos \lambda, \quad q = 0, \quad r = -\omega \sin \lambda;$$

величина же угловой скорости вращенія земли равна:

$$\omega = 0,0000729 \frac{1}{(\text{секунда})}.$$

Скорость центра C земли направлена по правую руку наблю-

дателя, стоящаго ногами въ C , головою по направленію къ сѣверному полюсу N земли, и смотрящаго на солнце; ускореніе точки C направлено къ солнцу и равно:

$$\frac{\varepsilon M}{\rho^2}; \dots \dots \dots (238)$$

гдѣ M есть масса солнца, а ρ — радіусъ векторъ, проведенный изъ центра солнца къ центру земли.

Скорость точки $Ю$ неизмѣняемой среды, неизмѣнно связанной съ землею, есть геометрическая сумма изъ скорости точки C и изъ вращательной скорости точки $Ю$ вокругъ мгновенной оси, проведенной черезъ точку C .

Ускореніе точки $Ю$ есть геометрическая сумма, составленная изъ ускоренія точки C (направленнаго къ солнцу, т. е. противоположно направленію радіуса вектора ρ) и изъ центростремительнаго ускоренія точки $Ю$, направленнаго по $ЮC_1$ къ центру C_1 (черт. 16 и 17) параллели точки $Ю$ и равнаго $\omega^2 R \cos \lambda$; поэтому проекціи на оси координатъ Ξ , Γ , Z ускоренія \dot{w}_0 точки $Ю$ неизмѣняемой среды равны:

$$\dot{w}_0 \cos(\dot{w}\Xi) = -\frac{\varepsilon M}{\rho^2} \cos(\rho\Xi) - \omega^2 R \cos \lambda \sin \lambda$$

$$\dot{w}_0 \cos(\dot{w}\Gamma) = -\frac{\varepsilon M}{\rho^2} \cos(\rho\Gamma)$$

$$\dot{w}_0 \cos(\dot{w}Z) = -\frac{\varepsilon M}{\rho^2} \cos(\rho Z) - \omega^2 R \cos^2 \lambda.$$

Скорость $(\xi'_0, \eta'_0, \zeta'_0)$, съ которою брошена матерьяльная точка m , есть скорость относительная по отношенію къ средѣ; абсолютная же начальная скорость точки m есть геометрическая сумма изъ выше-сказанной начальной скорости u_0 $(\xi'_0, \eta'_0, \zeta'_0)$ и изъ скорости точки $Ю$.

Абсолютное ускореніе матерьяльной точки сообщается ей равнодѣйствующею изъ силы притяженія ея къ центру земли:

$$\frac{\varepsilon Mm}{((\xi^2 + \eta^2 + (R + \zeta)^2)}$$

(гдѣ M — масса земли) и изъ силъ притяженія ея къ центру солнца,

$$\frac{\epsilon M m}{\rho_1^2} \dots \dots \dots (239)$$

Гдѣ ρ_1 есть длина радіуса вектора, проведеннаго изъ центра солнца къ положенію, занимаемому точкою m .

На основаніи всего сказаннаго, уравненія (233) въ настоящемъ случаѣ будутъ имѣть, по сокращеніи на m , слѣдующій видъ:

$$\xi'' = -\epsilon \frac{M}{\rho^3} \xi + S_1 + (\omega^2 \chi - 2\eta' \omega) \sin \lambda \dots \dots (240, a)$$

$$\eta'' = -\epsilon \frac{M}{\rho^3} \eta + S_2 + \omega^2 \eta + 2\chi' \omega \dots \dots \dots (240, b)$$

$$\zeta'' = -\epsilon \frac{M}{\rho^3} (\zeta + R) + S_3 + (\omega^2 \chi - 2\eta' \omega) \cos \lambda; \dots (240, c)$$

здѣсь введены слѣдующія обозначенія:

$$\rho^2 = \xi^2 + \eta^2 + (\zeta + R)^2, \quad \chi = \xi \sin \lambda + (\zeta + R) \cos \lambda$$

$$S_1 = \epsilon M \left(\frac{\cos(P\xi)}{\rho^3} - \frac{\cos(P_1\xi)}{\rho_1^3} \right),$$

$$S_2 = \epsilon M \left(\frac{\cos(P\eta)}{\rho^3} - \frac{\cos(P_1\eta)}{\rho_1^3} \right),$$

$$S_3 = \epsilon M \left(\frac{\cos(PZ)}{\rho^3} - \frac{\cos(P_1Z)}{\rho_1^3} \right).$$

Начальное положеніе матерьяльной точки предполагается въ точкѣ K , поэтому:

$$\xi_0 = 0, \quad \eta_0 = 0, \quad \zeta_0 = 0.$$

Члены S_1, S_2, S_3 суть проэкція на оси ξ, η, Z геометрической разности между ускореніями, сообщаемыми притяженіемъ солнца матерьяльной точкѣ и центру земли; эти разности представляютъ собою

ускоренія весьма малыя сравнительно съ ускореніемъ силы тяжести, въ чемъ можемъ убѣдиться на основаніи слѣдующаго разсчета.

Положимъ, что матерьяльная точка находится близъ той части поверхности земли, которая обращена къ солнцу, и что солнце находится въ зенитѣ, такъ что центръ земли, матерьяльная точка и центръ солнца находятся на одной прямой линіи; тогда члены S будутъ имѣть слѣдующія значенія:

$$S_1 = 0, S_2 = 0, S_3 = \epsilon M \left(\frac{1}{(P - R)^2} - \frac{1}{P^2} \right).$$

Выразивъ ϵ въ ускореніи силы тяжести на поверхности земли (формула 205 bis) и разложивъ первую дробь, заключающуюся въ большихъ скобкахъ выраженія S_3 , въ рядъ, получимъ:

$$S_3 = 2g \frac{M}{M} \left(\left(\frac{R}{P} \right)^2 + \dots \right).$$

Извѣстно, что масса солнца въ 354020 разъ болѣе массы земли, что средній радіусъ земли равенъ 859,5 географическимъ милямъ и что среднее разстояніе отъ земли до солнца равно 20680000 географическихъ миль: подставивъ эти цифры въ выраженіе S_3 , получимъ:

$$S_3 = g \cdot 0,000000051 = 0,00000049 \frac{\text{метр}}{(\text{секунда})^2}.$$

Слѣдовательно, S_3 составляетъ половину десятиллионной доли ускоренія силы тяжести; если матерьяльная точка будетъ свободно падать въ продолженіи 100 секундъ, то вслѣдствіе ускоренія g она упадетъ на глубину 49000 метровъ, ускореніе же S_3 уменьшитъ этотъ путь на 2,45 миллиметра, то есть на пять стомилліонныхъ долей всего пути.

Если же точка будетъ брошена снизу вверхъ со скоростью 980 метровъ въ секунду, то она вернется назадъ по истеченіи 200 секундъ, ускореніе же S_3 замедлитъ возвращеніе ея на миллионную долю секунды.

При тѣхъ средствахъ наблюдений, которыя намъ извѣстны, мы можемъ измѣрять большія длины съ точностью одной двухсотъ тысячной доли измѣряемой длины, а время можемъ измѣрять съ точностью до одной миллионной доли промежутка времени; поэтому обнаружить существованіе ускореній S_1, S_2, S_3 мы не можемъ.

Съ другой стороны замѣтимъ, что продолжительность полета брошеннаго тѣла не достигаетъ и ста секундъ даже при самыхъ большихъ скоростяхъ, которыя мы можемъ сообщить бросаемому тѣлу; вслѣдствіе всего сказаннаго, мы вправѣ пренебречь членами S_1, S_2, S_3 .

Тогда уравненія (240) получаютъ такой видъ, что интегрируются безъ затрудненій; для того, чтобы убѣдиться въ этомъ, стоитъ лишь, при посредствѣ нижеслѣдующихъ формулъ, ввести абсолютныя координаты x, y, z вмѣсто относительныхъ ξ, η, ζ :

$$\xi = (x \cos \omega t - y \sin \omega t) \sin \lambda - z \cos \lambda$$

$$\eta = x \sin \omega t + y \cos \omega t$$

$$\zeta + R = (x \cos \omega t - y \sin \omega t) \cos \lambda + z \sin \lambda;$$

тогда, вмѣсто уравненій (240), будемъ имѣть слѣдующія:

$$x'' = -g \frac{R^2}{\rho^3} x, \quad y'' = -g \frac{R^2}{\rho^3} y, \quad z'' = -g \frac{R^2}{\rho^3} z,$$

интегрированіе которыхъ произведемъ по правиламъ, указаннымъ въ § 27.

Но такъ какъ относительное движеніе матеріальной точки должно прекратиться вскорѣ послѣ начала его, вслѣдствіе паденія ея на землю, то намъ достаточно будетъ имѣть такія выраженія для координатъ ξ, η, ζ , которыя выражали бы состояніе движенія точки въ первыя минуты послѣ его начала; для этого мы воспользуемся способомъ интегрированія помощію рядовъ, указаннымъ въ началѣ параграфа 18-го.

Примѣняя здѣсь этотъ способъ, мы получимъ выраженія для

ξ , η , ζ въ видѣ рядовъ, расположенныхъ по возрастающимъ степенямъ времени t :

$$\xi = \xi_0' t + \xi_0'' \frac{t^2}{2} + \xi_0''' \frac{t^3}{1.2.3} + \dots \quad (241, a)$$

$$\eta = \eta_0' t + \eta_0'' \frac{t^2}{2} + \eta_0''' \frac{t^3}{1.2.3} + \dots \quad (241, b)$$

$$\zeta = \zeta_0' t + \zeta_0'' \frac{t^2}{2} + \zeta_0''' \frac{t^3}{1.2.3} + \dots \quad (241, c)$$

Выраженія для ξ_0'' , η_0'' , ζ_0'' получимъ изъ уравненій (240), подставивъ во вторыя части ихъ начальныя величины координатъ и скоростей; получимъ:

$$\xi_0'' = R\omega^2 \cos \lambda \sin \lambda - 2\eta_0' \omega \sin \lambda$$

$$\eta_0'' = 2\chi_0' \omega$$

$$\zeta_0'' = -g + R\omega^2 \cos^2 \lambda - 2\eta_0' \omega \cos \lambda.$$

Прежде, чѣмъ идти далѣе, мы измѣнимъ положеніе осей координатъ Ξ и Z такимъ образомъ, чтобы въ выраженіе новой ξ_0'' не входилъ членъ, заключающій $R\omega^2$.

Обратимъ вниманіе на величины:

$$R\omega^2 \cos \lambda \sin \lambda, \quad R\omega^2 \cos^2 \lambda - g;$$

онѣ представляютъ проэкціи на оси Ξ и Z геометрической суммы двухъ ускореній: ускоренія g (черт. 18 линія $ЮК$), направленнаго къ центру C земли, и ускоренія $R\omega^2 \cos \lambda$, направленнаго по продолженію радіуса $C_1Ю$ параллели точки $Ю$. Величину и направленіе геометрической суммы $ЮГ$ этихъ двухъ ускореній $ЮК$ и $ЮЦ$ мы условимся обозначать буквою G ; и такъ:

$$G = \sqrt{g^2 - 2gR\omega^2 \cos^2 \lambda + R^2 \omega^4 \cos^2 \lambda}, \dots \quad (242)$$

$$G \cos(\bar{G}\Xi) = R\omega^2 \cos \lambda \sin \lambda, \quad G \cos(GZ) = -g + R\omega^2 \cos^2 \lambda \quad (242 bis)$$

Возьмемъ за ось \mathcal{Z} (за новую ось Z) направленіе противо-

При тѣхъ средствахъ наблюденій, которыя намъ извѣстны, мы можемъ измѣрять большія длины съ точностью одной двухсотъ тысячной доли измѣряемой длины, а время можемъ измѣрять съ точностью до одной миллионной доли промежутка времени; поэтому обнаружить существованіе ускореній S_1, S_2, S_3 мы не можемъ.

Съ другой стороны замѣтимъ, что продолжительность полета брошеннаго тѣла не достигаетъ и ста секундъ даже при самыхъ большихъ скоростяхъ, которыя мы можемъ сообщить бросаемому тѣлу; вслѣдствіе всего сказаннаго, мы вправѣ пренебречь членами S_1, S_2, S_3 .

Тогда уравненія (240) получаютъ такой видъ, что интегрируются безъ затрудненій; для того, чтобы убѣдиться въ этомъ, стоитъ лишь, при посредствѣ нижеслѣдующихъ формулъ, ввести абсолютныя координаты x, y, z вмѣсто относительныхъ ξ, η, ζ :

$$\xi = (x \cos \omega t - y \sin \omega t) \sin \lambda - z \cos \lambda$$

$$\eta = x \sin \omega t + y \cos \omega t$$

$$\zeta + R = (x \cos \omega t - y \sin \omega t) \cos \lambda + z \sin \lambda;$$

тогда, вмѣсто уравненій (240), будемъ имѣть слѣдующія:

$$x'' = -g \frac{R^2}{\rho^3} x, \quad y'' = -g \frac{R^2}{\rho^3} y, \quad z'' = -g \frac{R^2}{\rho^3} z,$$

интегрированіе которыхъ произведемъ по правиламъ, указаннымъ въ § 27.

Но такъ какъ относительное движеніе матеріальной точки должно прекратиться вскорѣ послѣ начала его, вслѣдствіе паденія ея на землю, то намъ достаточно будетъ имѣть такія выраженія для координатъ ξ, η, ζ , которыя выражали бы состояніе движенія точки въ первыя минуты послѣ его начала; для этого мы воспользуемся способомъ интегрированія помощію рядовъ, указаннымъ въ началѣ параграфа 18-го.

Приимая здѣсь этотъ способъ, мы получимъ выраженія для

ξ , η , ζ въ видѣ рядовъ, расположенныхъ по возрастающимъ степенямъ времени t :

$$\xi = \xi_0' t + \xi_0'' \frac{t^2}{2} + \xi_0''' \frac{t^3}{1.2.3} + \dots \quad (241, a)$$

$$\eta = \eta_0' t + \eta_0'' \frac{t^2}{2} + \eta_0''' \frac{t^3}{1.2.3} + \dots \quad (241, b)$$

$$\zeta = \zeta_0' t + \zeta_0'' \frac{t^2}{2} + \zeta_0''' \frac{t^3}{1.2.3} + \dots \quad (241, c)$$

Выраженія для ξ_0'' , η_0'' , ζ_0'' получимъ изъ уравненій (240), подставивъ во вторыя части ихъ начальныя величины координатъ и скоростей; получимъ:

$$\xi_0'' = R\omega^2 \cos \lambda \sin \lambda - 2\eta_0' \omega \sin \lambda$$

$$\eta_0'' = 2\chi_0' \omega$$

$$\zeta_0'' = -g + R\omega^2 \cos^2 \lambda - 2\eta_0' \omega \cos \lambda.$$

Прежде, чѣмъ идти далѣе, мы измѣнимъ положеніе осей координатъ E и Z такимъ образомъ, чтобы въ выраженіе новой ξ_0'' не входилъ членъ, заключающій $R\omega^2$.

Обратимъ вниманіе на величины:

$$R\omega^2 \cos \lambda \sin \lambda, \quad R\omega^2 \cos^2 \lambda - g;$$

онѣ представляютъ проэкціи на оси E и Z геометрической суммы двухъ ускореній: ускоренія g (черт. 18 линія $ЮК$), направленнаго къ центру C земли, и ускоренія $R\omega^2 \cos \lambda$, направленнаго по продолженію радіуса $C_1Ю$ параллели точки $Ю$. Величину и направленіе геометрической суммы $ЮГ$ этихъ двухъ ускореній $ЮК$ и $ЮЦ$ мы условимся обозначать буквою G ; и такъ:

$$G = \sqrt{g^2 - 2gR\omega^2 \cos^2 \lambda + R^2\omega^4 \cos^2 \lambda}, \dots \quad (242)$$

$$G \cos(GE) = R\omega^2 \cos \lambda \sin \lambda, \quad G \cos(GZ) = -g + R\omega^2 \cos^2 \lambda \quad (242 \text{ bis})$$

Возьмемъ за ось Z (за новую ось Z) направленіе противо-

положное ускоренію G и за ось X (за новую ось Ξ) — направле-
ніе перпендикулярное къ оси Z и идущее къ югу отъ точки $Ю$;
тогда очевидно прожекція G на ось X будетъ нуль.

Назовемъ черезъ Δ уголъ, составляемый осью Z съ эквато-
ромъ; очевидно:

$$\Delta = \lambda + (Z, Z);$$

координаты точки относительно осей X и Z условимся обозначать
буквами x и z .

Координаты центра земли C по отношенію къ новымъ осямъ
будутъ слѣдующія:

$$-R \sin \alpha, \quad -R \cos \alpha,$$

гдѣ α есть уголъ, составляемый осями Z и Z между собою.

При осяхъ координатъ X, Y, Z , дифференціальныя уравненія от-
носительнаго движенія тяжелой точки будутъ имѣть слѣдующій видъ:

$$x'' = -g \frac{R^2}{\rho^3} (x + R \sin \alpha) + (\omega \bar{s} - 2\eta') \omega \sin \Delta \dots \dots (243, a)$$

$$\eta'' = -g \frac{R^2}{\rho^3} \eta + (\omega \eta + 2\bar{s}') \omega, \dots \dots \dots (243, b)$$

$$z'' = -g \frac{R^2}{\rho^3} (z + R \cos \alpha) + (\omega \bar{s} - 2\eta') \omega \cos \Delta; \dots \dots (243, c)$$

гдѣ:

$$\rho^2 = (x + R \sin \alpha)^2 + \eta^2 + (z + R \cos \alpha)^2,$$

$$\bar{s} = (x + R \sin \alpha) \sin \Delta + (z + R \cos \alpha) \cos \Delta.$$

Изъ этихъ уравненій слѣдуетъ:

$$\left. \begin{aligned} x_0'' &= -2\eta_0' \omega \sin \Delta \\ \eta_0'' &= +2(x_0' \sin \Delta + z_0' \cos \Delta) \omega \\ z_0'' &= -2\eta_0' \omega \cos \Delta - G \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (244)$$

ПОТОМУ ЧТО:

$$\begin{aligned} \bar{s}_0 &= R \cos \lambda, \quad \bar{s}_0' = x_0' \sin \Delta + \bar{z}_0' \cos \Delta, \\ -g \sin \alpha + \omega^2 R \cos \lambda \sin \Delta &= G \cos (G\mathcal{X}) = 0 \\ -g \cos \alpha + \omega^2 R \cos \lambda \cos \Delta &= G \cos (G\mathcal{Z}) = -G. \end{aligned}$$

Далѣе, составивъ третьи производныя и подставивъ въ ихъ выраженія начальныя координаты и скорости, получимъ:

$$\begin{aligned} x_0''' &= -g \frac{x_0'}{R} + 3g \frac{\rho_0'}{R} \sin \alpha + (\omega \bar{s}_0' - 2\eta_0'') \omega \sin \Delta \\ \eta_0''' &= -g \frac{\eta_0'}{R} + (\omega \eta_0' + 2\bar{s}_0'') \omega \\ \bar{z}_0''' &= -g \frac{\bar{z}_0'}{R} + 3g \frac{\rho_0'}{R} \cos \alpha + (\omega \bar{s}_0' - 2\eta_0'') \omega \cos \Delta; \end{aligned}$$

СЮДА НАДО ПОДСТАВИТЬ:

$$\begin{aligned} \rho_0' &= x_0' \sin \alpha + \bar{z}_0' \cos \alpha, \quad \omega \bar{s}_0' - 2\eta_0'' = -3\bar{s}_0' \omega, \\ \omega \eta_0' + 2\bar{s}_0'' &= -3\eta_0' \omega - 2G \cos \Delta; \end{aligned}$$

ТОГДА ОКАЖЕТСЯ, ЧТО:

$$\left. \begin{aligned} x_0''' &= -3\omega^2 \bar{s}_0' \sin \Delta - g \frac{x_0'}{R} + 3g \frac{\rho_0'}{R} \sin \alpha \\ \eta_0''' &= -3\omega^2 \eta_0' - g \frac{\eta_0'}{R} - 2G\omega \cos \Delta \\ \bar{z}_0''' &= -3\omega^2 \bar{s}_0' \cos \Delta - g \frac{\bar{z}_0'}{R} + 3g \frac{\rho_0'}{R} \cos \alpha \end{aligned} \right\} \dots \dots (245)$$

Четвертыя производныя координатъ выражаются слѣдующимъ образомъ:

$$\begin{aligned} x^{(4)} &= -g \frac{R^2}{\rho^3} \left(x'' - 6 \frac{x' \rho'}{\rho} + 3(x + R \sin \alpha) \frac{4(\rho')^2 - \rho \rho''}{\rho^2} \right) + \\ &\quad + (\omega \bar{s}'' - 2\eta''') \omega \sin \Delta; \dots \dots \end{aligned}$$

Чтобы составить выражения начальныхъ значенийъ производныхъ четвертаго порядка, составимъ сначала, при помощи предыдущихъ формулъ, выражения слѣдующихъ величинъ:

$$\mathfrak{s}_0''' = -3\omega^2 \mathfrak{s}_0' - \frac{g}{R} \mathfrak{s}_0' + 3 \frac{g}{R} \rho_0' \cos \lambda.$$

$$\omega \mathfrak{s}_0'' - 2\eta_0''' = 4\omega^2 \eta_0' + 2 \frac{g}{R} \eta_0' + 3G\omega \cos \Delta$$

$$\omega \eta_0'' + 2\mathfrak{s}_0''' = -4\omega^2 \mathfrak{s}_0' - 2 \frac{g}{R} \mathfrak{s}_0' + 6 \frac{g}{R} \rho_0' \cos \lambda.$$

Послѣ нѣкоторыхъ преобразованій найдемъ:

$$\begin{aligned} x^{(4)} = & 3G \left(\omega^2 \sin \Delta \cos \Delta - \frac{g}{R} \sin \alpha \cos \alpha \right) + \\ & + 4 \left(\omega^2 + \frac{g}{R} \right) \omega \eta_0' \sin \Delta - 6 \frac{g}{R} \omega \eta_0' \sin \alpha \cos \lambda + \\ & + 3 \frac{g}{R^2} \left((\eta_0')^2 - 5(\rho_0')^2 \right) \sin \alpha + 3 \frac{g}{R^2} (3x_0' \rho_0' - \mathfrak{s}_0' x); \dots (246, a) \end{aligned}$$

$$\eta_0^{(4)} = -4 \left(\omega^2 + \frac{g}{R} \right) \omega \mathfrak{s}_0' + 6 \frac{g}{R} \omega \rho_0' \cos \lambda + 6 \frac{g}{R^2} \eta_0' \rho_0'; \dots (246, b)$$

$$\begin{aligned} \mathfrak{s}_0^{(4)} = & 3G \left(\omega^2 \cos^2 \Delta - \frac{g}{R} \cos^2 \alpha \right) + \frac{g}{R} G + \\ & + 4 \left(\omega^2 + \frac{g}{R} \right) \omega \eta_0' \cos \Delta - 6 \frac{g}{R} \omega \eta_0' \cos \alpha \cos \lambda + \\ & + 3 \frac{g}{R^2} \left((\eta_0')^2 - 5(\rho_0')^2 \right) \cos \alpha + 3 \frac{g}{R^2} (3\mathfrak{s}_0' \rho_0' + x_0' x) \dots \dots \dots (246, c) \end{aligned}$$

$$x = x_0' \cos \alpha - \mathfrak{s}_0' \sin \alpha.$$

Принявъ во вниманіе равенства:

$$\left. \begin{aligned} G \cos \alpha &= g - R\omega^2 \cos^2 \lambda, & G \sin \alpha &= R\omega^2 \sin \lambda \cos \lambda, \\ G \cos \Delta &= (g - R\omega^2) \cos \lambda, & G \sin \Delta &= g \sin \lambda, \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (247)$$

можемъ упростить выраженіе перваго члена второй части равенства (246, a); а именно мы найдемъ, что онъ равенъ:

$$-3 \frac{g}{G} R\omega^4 \sin^3 \lambda \cos \lambda.$$

Составимъ ряды для слѣдующихъ случаевъ:

А) Матерьяльная точка пущена свободно, безъ начальной относительной скорости, то есть:

$$\xi_0' = 0, \quad \eta_0' = 0, \quad \zeta_0' = 0;$$

тогда выраженія для координатъ будутъ слѣдующія:

$$\xi = -\frac{g}{G} R \omega^4 \frac{t^4}{8} \sin^3 \lambda \cos \lambda + \dots \dots \dots (248, a)$$

$$\eta = -G \omega \frac{t^3}{3} \cos \Delta + \dots \dots \dots (248, b)$$

$$\zeta = -G \frac{t^2}{2} + G \left(\frac{g}{3R} + \omega^2 \cos^2 \Delta - \frac{g}{R} \cos^2 \alpha \right) \frac{t^4}{8} + \dots \dots (248, c)$$

Второе выраженіе показываетъ, что точка уклоняется въ отрицательную сторону оси Υ (то есть къ *востоку*) отъ плоскости меридіана точки Ю ; величина этого отклоненія пропорціональна косинусу истинной широты Δ точки Ю .

Взявъ $G = 9,8$ единицъ ускоренія, Δ равнымъ 51° и $t = 5,687$ секунды, получимъ приблизительно:

$$\zeta = 158,5 \text{ метра, } \eta = -27,56 \text{ миллиметра;}$$

то есть, при паденіи точки съ высоты 158,5 метровъ подъ широтою въ 51° (сѣверной широты), отклоненіе къ востоку получается въ 27 съ половиною миллиметровъ; по опытамъ, произведеннымъ Рейхомъ въ Фрейбургѣ (находящимся подъ широтою 51 градуса) оказалось, что при паденіи съ этой высоты получается отклоненіе въ 28,3 миллиметра къ востоку; кромѣ того, при тѣхъ же опытахъ, наблюдалось еще нѣкоторое отклоненіе къ югу.

Формула (248, а) даетъ, напротивъ, отклоненіе къ сѣверу и притомъ совершенно ничтожное: для $t = 6$ секундамъ, получается 8 миллионныхъ долей миллиметра; поэтому можно сказать, что, по формуламъ (248), движеніе падающей точки совершается приблизительно въ плоскости $\text{З}\Upsilon$.

При $t=6$ секундах, второй членъ ряда (248, с) представляетъ длину въ 2,6 миллиметра; если пренебречь этимъ членомъ, а также всѣми членами, заключающими степени t выше 3-й, то движеніе свободно падающей точки выразится такъ:

$$\xi=0, \quad \eta=-\frac{1}{2}g\omega\frac{t^3}{3}\cos\Lambda, \quad \zeta=-G\frac{t^2}{2};$$

а траекторія окажется полукубическою параболою, заключающеюся въ плоскости 3Γ .

В) Если начальная относительная скорость направлена по оси 3 , то есть, если точка брошена вертикально снизу вверхъ, то выраженія относительныхъ координатъ будутъ имѣть слѣдующій видъ:

$$\xi=\frac{g t^3}{2G^2}\omega'R\omega^4\sin^3\Lambda\cos\Lambda,$$

$$\eta=\left(\omega_0' - \frac{1}{2}g\frac{t^2}{3}\right)t^2\omega\cos\Lambda,$$

$$\zeta=\omega_0't - G\frac{t^2}{2} - \omega_0'\frac{t^3}{6}\left[3\left(\omega^2\cos^2\Lambda - \frac{g}{R}\cos^2\alpha\right) + \frac{g}{R}\right],$$

если пренебречь членами, заключающими четвертыя и высшія степени времени.

Чтобы составить себѣ хотя приблизительное понятіе о видѣ этого движенія, пренебрежемъ членами, заключающими величины:

$$R\omega^4, \quad \omega_0'\omega^2, \quad \frac{g}{R};$$

тогда получимъ:

$$\left. \begin{aligned} \xi=0, \quad \eta &= \left(\omega_0' - G\frac{t^2}{3}\right)t^2\omega\cos\Lambda \\ \zeta &= \omega_0't - G\frac{t^2}{2} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (249)$$

Изъ этихъ выраженій видно, что въ тотъ моментъ t_1 , въ который точка достигаетъ наибольшей высоты, она будетъ отклонена къ западу отъ вертикальной плоскости на длину:

$$\eta_1 = \frac{2(\omega_0')^3}{3G^2}\omega\cos\Lambda;$$

въ моментъ $t_2 = 2t$ точка вернется на ось Υ и будетъ отклонена отъ точки $Ю$ въ *западъ* на длину:

$$\eta_2 = \frac{4(\xi_0')^3}{3G^2} \omega \cos \Lambda = 2\eta_1.$$

Вся та часть относительной траекторіи, которая пробѣгается точкою въ теченіе промежутка времени отъ $t=0$ до $t=t_2$, находится въ квадрантѣ положительныхъ осей Υ и \mathcal{Z} .

С. Чтобы составить себѣ приблизительное понятіе о видѣ движенія матерьяльной точки, брошенной съ начальною скоростью u_0 подъ угломъ α къ истинному горизонту точки $Ю$ и въ вертикальной плоскости, составляющей азимутъ β съ плоскостью меридіана, мы пренебрежемъ членами, заключающими величины:

$$\omega^2 \xi_0', \quad \omega^2 \eta_0', \quad \omega^2 \xi_0', \quad \frac{g}{R},$$

и всѣми членами высшаго порядка малости; тогда получимъ слѣдующія выраженія:

$$\left. \begin{aligned} \xi &= \xi_0' t - \eta_0' t^2 \omega \sin \Lambda \\ \eta &= \eta_0' t + (\xi_0' \sin \Lambda + \xi_0' \cos \Lambda) t^2 \omega - G \frac{t^3}{3} \omega \cos \Lambda \\ \xi &= \xi_0' t - \eta_0' t^2 \omega \cos \Lambda - G \frac{t^2}{2} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (250)$$

$$\xi_0' = u_0 \cos \alpha \cos \beta, \quad \eta_0' = u_0 \cos \alpha \sin \beta, \quad \xi_0' = u_0 \sin \alpha.$$

Сравнивъ эти выраженія съ тѣми, которыя получились бы при неподвижности земли (при $\omega=0$) и при дѣйствіи на точку ускоренія G , направленнаго по отрицательной оси \mathcal{Z} , мы увидимъ, что вращеніе земли оказываетъ слѣдующее вліяніе на полетъ брошеннаго тяжелаго тѣла.

а) Движеніе параллельно оси \mathcal{Z} совершается не съ ускореніемъ G , но съ ускореніемъ

$$G + 2u_0 \omega \cos \Lambda \cos \alpha \sin \beta,$$

добавочный членъ котораго пропорціоналенъ косинусу истинной широты Δ и синусу азимута β ; поэтому, при одной и той же скорости u_0 и при томъ же углѣ α , брошенное тѣло поднимется на бѣльшую высоту при восточномъ азимутѣ ($\beta < 0$), чѣмъ при западномъ ($\beta > 0$).

б) Траекторія не заключается въ вертикальной плоскости:

$$\eta = x \operatorname{tg} \beta,$$

какъ было бы при неподвижности земли, но имѣетъ видъ витой кривой линіи; если представить себѣ подвижную вертикальную плоскость, заключающую въ себѣ движущуюся точку, то законъ измѣненія азимута B этой плоскости выразится слѣдующею формулою:

$$\operatorname{tg} B = \frac{\operatorname{tg} \beta + t\omega \sin \Delta}{1 - t\omega \sin \Delta \operatorname{tg} \beta} + \frac{(\beta_0' - \beta_3')}{\eta_0' - \eta_0' t\omega \sin \Delta} t\omega \cos \Delta \dots (251)$$

Изъ этой формулы видно, что брошенное тѣло отклоняется, на сѣверномъ полушаріи, *вправо* отъ первоначальнаго направленія; въ самомъ дѣлѣ второй членъ суммы (251) сохраняетъ положительную величину въ теченіи времени отъ $t=0$ до $t = \frac{3u_0 \sin \alpha}{G}$; поэтому:

$$B > (\beta + \operatorname{arctg}(t\omega \sin \Delta)).$$

Если тѣло брошено горизонтально, и начальная скорость его настолько велика, что можно пренебречь вторымъ членомъ суммы (251), то тогда:

$$\operatorname{tg}(B - \beta) = t\omega \sin \Delta;$$

то есть уголъ $(B - \beta)$ возрастаетъ пропорціонально времени и синусу широты Δ , и притомъ это отклоненіе не зависитъ отъ первоначальнаго азимута β .

с) Можно показать, что вращеніе земли увеличиваетъ дальность полета при западномъ азимутѣ β и уменьшаетъ при восточномъ.

Выраженія (250) могутъ быть получены также при помощи слѣдующихъ дѣйствій.

Пренебрежемъ въ дифференціальньхъ уравненіяхъ движенія (243) членами:

$$\omega^2 \xi, \omega^2 \eta, \omega^2 \zeta$$

и, замѣнивъ ρ черезъ R , пренебрежемъ отношеніями:

$$\frac{x}{R}, \frac{\eta}{R}, \frac{\zeta}{R};$$

тогда получимъ дифференціальныя уравненія слѣдующаго вида:

$$\left. \begin{aligned} \xi'' &= -2\eta'\omega \sin \Lambda \\ \eta'' &= +2(\xi' \sin \Lambda + \zeta' \cos \Lambda) \omega \\ \zeta'' &= -2\eta'\omega \cos \Lambda - G \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (252)$$

Первые интегралы этихъ уравненій будутъ:

$$\begin{aligned} \bar{\xi}' &= \xi_0' - 2\eta\omega \sin \Lambda \\ \eta' &= \eta_0' + 2(\xi \sin \Lambda + \zeta \cos \Lambda) \omega \\ \zeta' &= \zeta_0' - 2\eta\omega \cos \Lambda - Gt; \end{aligned}$$

они даютъ намъ выраженія проэкцій скорости въ функціяхъ времени и координатъ; подставивъ эти выраженія въ уравненія (252) и отбросивъ члены, содержащіе:

$$\omega^2 \xi, \omega^2 \eta, \omega^2 \zeta,$$

будемъ имѣть дифференціальныя уравненія:

$$\begin{aligned} \xi'' &= -2\eta_0'\omega \sin \Lambda \\ \eta'' &= 2(\xi_0' \sin \Lambda + \zeta_0' \cos \Lambda) \omega - 2tG\omega \cos \Lambda \\ \zeta'' &= -2\eta_0'\omega \cos \Lambda - G; \end{aligned}$$

двукратное интегрированіе этихъ уравненій приведетъ насъ къ выраженіямъ (250).

§ 31. Положенія равновѣсія свободной матерьяльной точки. Условія устойчивости.

А. Свободная матерьяльная точка, подверженная дѣйствію какихъ либо силъ, можетъ оставаться въ покоѣ въ тѣхъ точкахъ пространства, въ которыхъ силы, приложенныя къ покоящейся точкѣ, взаимно уравновѣшиваются; такія положенія матерьяльной точки называются *положеніями равновѣсія* ея.

Напримѣръ, матерьяльная точка, подверженная притяженію, направленному къ неподвижному центру C и прямопропорціональному разстоянію отъ C , будетъ имѣть положеніе равновѣсія въ этомъ центрѣ C .

Тотъ же центръ будетъ положеніемъ равновѣсія даже и тогда, когда, кромѣ притяженія къ нему, на точку будетъ дѣйствовать сопротивленіе среды, пропорціональное первой степени скорости; въ самомъ дѣлѣ, если матерьяльная точка будетъ помѣщена въ центръ C безъ начальной скорости, то обѣ силы будутъ равны нулю, и матерьяльная точка останется въ покоѣ.

Тотъ же центръ будетъ положеніемъ равновѣсія и въ томъ случаѣ, когда, вмѣсто притяженія, на точку дѣйствуетъ сила отталкивающая ее отъ центра и пропорціональная разстоянію отъ него.

Матерьяльная точка, помѣщенная въ положеніи равновѣсія безъ начальной скорости, будетъ оставаться въ покоѣ до тѣхъ поръ, пока какая либо посторонняя сила или причина не выведетъ ее изъ этого положенія.

Положимъ, что дѣйствіемъ нѣкоторой временной причины, матерьяльная точка будетъ отклонена изъ положенія равновѣсія M , въ одну изъ близлежащихъ точекъ пространства и будетъ выпущена изъ этой точки M , съ начальной скоростью v_0 ; послѣ этого, дѣйствіе временной причины прекращается, и матерьяльной точкѣ предоставляется совершать движеніе подъ вліяніемъ тѣхъ силъ, которыя взаимно уравновѣшиваются въ точкѣ M , но не уравновѣшиваются въ близлежащихъ частяхъ пространства.

Движеніе это можетъ быть различнаго характера, смотря по расположенію силъ въ сосѣдствѣ съ точкою M , смотря по величинѣ

и направленію начальнаго отклоненія M, \bar{M}_0 и смотря по величинѣ и направленію начальной скорости v_0 .

При нѣкоторыхъ силахъ матеріальная точка совершаетъ движеніе, не выходя изъ предѣловъ нѣкотораго объема, окружающаго точку M ; притомъ размѣры этого объема тѣмъ менѣе, чѣмъ менѣе отклоненіе M, \bar{M}_0 и скорость v_0 , а если послѣднія (то есть M, \bar{M}_0 и v_0) бесконечно-малы, то движеніе совершается въ бесконечно-малыхъ предѣлахъ около положенія равновѣсія M .

Если движеніе имѣетъ такой характеръ при весьма малыхъ начальныхъ отклоненіяхъ по всевозможнымъ направленіямъ изъ положенія равновѣсія и при всевозможныхъ направленіяхъ весьма малыхъ начальныхъ скоростей, то положеніе равновѣсія называютъ устойчивымъ.

При другихъ же силахъ матеріальная точка въ своемъ движеніи все болѣе и болѣе удаляется отъ положенія равновѣсія, даже вслѣдствіе самыхъ незначительныхъ начальныхъ отклоненій и скоростей; такое положеніе равновѣсія называютъ неустойчивымъ.

Напримѣръ, центръ C есть положеніе устойчиваго равновѣсія матеріальной точки, притягиваемой къ нему силою, пропорціональною разстоянію; потому что матеріальная точка, по отклоненіи ея на разстояніе конечной величины отъ центра C и по сообщеніи ей начальной скорости конечной величины, будетъ совершать движеніе вокругъ C по эллипу конечныхъ размѣровъ (см. примѣръ 5 на стр. 82).

Напротивъ, тотъ же центръ будетъ положеніемъ неустойчиваго равновѣсія, если онъ отталкиваетъ отъ себя матеріальную точку силою, пропорціональною разстоянію; потому что движущаяся точка уходитъ въ бесконечность даже вслѣдствіе самыхъ незначительныхъ отклоненій изъ центра C , какъ это видно изъ слѣдующихъ формулъ:

$$x = x_0 \left(\frac{e^{xt} + e^{-xt}}{2} \right), \quad y = y_0 \left(\frac{e^{xt} - e^{-xt}}{2} \right),$$

при составленіи которыхъ предполагалось, что центръ C взять за начало координатъ, и что начальная скорость равна нулю; изъ этихъ формулъ видно, что, даже при весьма малыхъ началь-

ныхъ состояній x_0, y_0 , координаты x и y получаютъ безконечно большія значенія при $t = \infty$.

Устойчивость равновѣсія матеріальной точки въ центрѣ C , притягивающемъ ее силою, пропорціональною разстоянію, проявляется довольно наглядно въ средѣ, оказывающей движению матеріальной точки сопротивление, пропорціональное скорости; тогда движущаяся точка будетъ постепенно приближаться къ притягивающему центру, описывая вокругъ него спираль, все болѣе и болѣе суживающуюся (см. стр. 83, черт. 6).

Положенія равновѣсія матеріальной точки, на которую дѣйствуютъ силы, имѣющія потенціалъ U , суть всѣ тѣ точки пространства, координаты которыхъ удовлетворяютъ тремъ уравненіямъ:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial U}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial U}{\partial z} = 0; \dots \dots \dots (253)$$

это могутъ быть: или изолированныя точки, или сплошныя линіи, поверхности и объемы, напримѣръ:

Примѣръ 22. Силы, приложенныя къ матеріальной точкѣ, суть: силы притяженія, пропорціональныя разстояніямъ, къ двумъ центрамъ, находящимся на оси X въ точкахъ $(x_1 = a)$ и $(x_2 = -a)$, и сила, параллельная положительной оси Z и пропорціональная квадрату разстоянія матеріальной точки отъ плоскости XU ; величины этихъ трехъ силъ — слѣдующія:

$$\mu^2 r_1, \quad \mu'^2 r_2, \quad \lambda^2 z^2,$$

гдѣ r_1 и r_2 означаютъ разстоянія матеріальной точки отъ притягивающихъ центровъ.

Въ этомъ случаѣ потенціальная функція будетъ:

$$U = \frac{\mu^2}{2} z^2 - \frac{\mu'}{2} ((x-a)^2 + y^2 + z^2) - \frac{\lambda^2}{2} ((x+a)^2 + y^2 + z^2)$$

Уравненія (253) будутъ слѣдующаго вида:

$$-2\mu^2 x = 0, \quad -2\mu'^2 y = 0, \quad \lambda^2 z^2 - 2\mu'^2 z = 0;$$

изъ нихъ находимъ, что равновѣсіе силъ возможно въ двухъ точкахъ пространства:

- 1) $x=0, y=0, z=0$;
- 2) $x=0, y=0, z=\frac{2\mu^2}{\lambda^2}$.

Примѣръ 23. Притяженія тѣ же, какъ и въ предыдущемъ примѣрѣ, но вмѣсто силы, параллельной оси Z , дѣйствуетъ сила, отталкивающая матерьяльную точку отъ оси X пропорціонально квадрату разстоянія точки отъ этой оси; величина этой силы:

$$\lambda^2(y^2 + z^2).$$

Потенціальная функція здѣсь будетъ слѣдующая:

$$U = \frac{\lambda^2}{3}(y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}} - \frac{\mu^2}{2}r_1^2 - \frac{\mu^2}{2}r_2^2;$$

приравнявъ нулю первыя производныя ея, получимъ уравненія:

$$-2\mu^2x=0, \quad (\lambda^2\sqrt{y^2+z^2} - 2\mu^2)y=0, \quad (\lambda^2\sqrt{y^2+z^2} - 2\mu^2)z=0,$$

изъ которыхъ слѣдуетъ, что положенія равновѣсія суть:

- 1) начало координатъ: $x=0, y=0, z=0$,
- 2) каждая изъ точекъ круга:

$$x=0, \quad y^2 + z^2 = \frac{4\mu^4}{\lambda^4}.$$

Примѣръ 24. При дѣйствіи силъ, имѣющихъ потенциалъ:

$$U = \mu^2\left(r^2 + \frac{\lambda^4}{r^2}\right),$$

положенія равновѣсія матерьяльной точки суть всѣ точки поверхности сферы, имѣющей радіусъ λ .

Въ каждой такой точкѣ пространства, координаты которой удовлетворяютъ тремъ уравненіямъ (253), равновѣсіе будетъ устойчивымъ или неустойчивымъ, смотря потому, имѣетъ ли потенциальная функція U въ этой точкѣ максимумъ, или минимумъ.

Пусть M_0 есть одна из точек равновѣсія, U_0 — численное значеніе, получаемое потенциальною функціею въ этой точкѣ; x_0 , y_0 , z_0 — координаты этой точки, удовлетворяющія тремъ уравненіямъ (253).

Въ точкѣ $M(x_0 + \delta x, y_0 + \delta y, z_0 + \delta z)$, бесконечно-близкой къ точкѣ M_0 , потенциальная функція имѣетъ слѣдующее численное значеніе:

$$U_0 + \delta^2 U;$$

$$\begin{aligned} \delta^2 U = & \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} (\delta x)^2 + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} (\delta y)^2 + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} (\delta z)^2 + 2 \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial z} \delta y \delta z + \\ & + 2 \frac{\partial^2 U}{\partial z \partial x} \delta z \delta x + 2 \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} \delta x \delta y; \end{aligned}$$

гдѣ во вторыхъ производныхъ должны быть подставлены координаты точки M_0 .

Функція U имѣетъ максимумъ въ точкѣ M_0 , если $\delta^2 U$ имѣетъ отрицательныя величины при вслкихъ знакахъ бесконечно-малыхъ величинъ δx , δy , δz и при вслкихъ отношеніяхъ между ними; какъ извѣстно, это можетъ быть только тогда, когда вторыя производныя удовлетворяютъ условіямъ:

$$\left. \begin{aligned} U_{xx} < 0, \quad U_{yy} U_{xx} - U_{xy}^2 > 0, \\ (U_{yy} U_{xx} - U_{xy}^2)(U_{zz} U_{xx} - U_{xz}^2) - (U_{xz} U_{yz} - U_{zx} U_{xy})^2 > 0; \end{aligned} \right\} (254)$$

(здѣсь вторыя производныя обозначены для сокращенія объема формулъ особыми символами; такъ

$$U_{yz} = \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial z}).$$

Если условія (254) удовлетворены, то, въ непосредственномъ сосѣдствѣ съ точкою M_0 , поверхности уровня имѣютъ видъ эллипсоидовъ съ бесконечно-малыми осями, имѣющихъ центры въ точкѣ M_0 ; параметръ такой поверхности уровня есть: $U_0 - k^2$; а уравненіе ея:

$$-k^2 = U_{xx} x^2 + U_{yy} y^2 + U_{zz} z^2 + 2 U_{yz} yz + 2 U_{zx} zx + 2 U_{xy} xy; (255)$$

k есть весьма малая постоянная, имѣющая тѣмъ бѣльшую величину, чѣмъ поверхность уровня далѣе отъ точки M_e .

Положимъ, что матерьяльная точка отклонена изъ положенія равновѣсія M_e въ весьма близкую къ нему точку M_0 , и здѣсь ей сообщена весьма малая начальная скорость v_0 ; пусть:

$$U_e - k_0^2$$

есть параметръ той поверхности уровня, на которой находится точка M_0 .

Движеніе, совершаемое матерьяльною точкою, должно удовлетворять закону живой силы:

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = U_e - k^2 - (U_e - k_0^2),$$

или:

$$m.e. \text{ все да } k^2 \leq \frac{mv_0^2}{2} + k_0^2; \quad \frac{mv^2}{2} = \frac{mv_0^2}{2} + k_0^2 - k^2;$$

изъ этого уравненія видно, что точка не можетъ выйти внаружу той поверхности уровня, для которой

$$k^2 = \frac{mv_0^2}{2} + k_0^2,$$

потому что живая сила не можетъ быть отрицательною; поэтому точка M_e , въ которой потенціальная функція имѣетъ максимумъ, есть положеніе устойчиваго равновѣсія.

Такъ, въ примѣрахъ 22-мъ и 23-мъ начало координатъ есть положеніе устойчиваго равновѣсія.

ГЛАВА IV.

Механика несвободной материальной точки.

§ 32. Материальная точка несвободна, если существуют преграды, не позволяющія ей имѣть какую угодно скорость по какому угодно направленію изъ той точки пространства, въ которой она находится.

Всякія преграды могутъ быть разсматриваемы: одні — какъ поверхности тѣлъ непроницаемыхъ материальною точкою, другія — какъ поверхности, удерживающія на себѣ точку.

Каждая преграда перваго рода не позволяетъ материальной точкѣ, находящейся на преграждающей поверхности, сойти съ нея въ сторону непроницаемаго тѣла, дѣйствительнаго или воображаемаго, ограниченаго этою поверхностью; точка можетъ двигаться вдоль по поверхности или сойти съ нея въ свободную сторону; поэтому такая преграда называется *поверхностью, не удерживающею материальной точки*.

Напримеръ, материальная точка, прикрѣпленная къ одному концу гибкой, прастяжимой и неимѣющей массы нити, другой конецъ которой прикрѣпленъ въ началѣ координатъ, имѣетъ преградою поверхность сферы, радіусъ которой равенъ длинѣ нити, а центръ находится въ началѣ координатъ. Пока нить неотянута, — материальная точка находится внутри сферы, гдѣ она совершенно свободна; если же нить пятапута, то точка, находясь на поверхности сферы, можетъ имѣть движеніе вдоль по сферѣ или внутрь ея; внаружу же сферы ея движеніе приграждено прастяжимостью нити. Эта сфера есть очевидно поверхность, не удерживающая точку отъ перемѣщеній направленныхъ внутрь ея.

Каждая преграда втораго рода не позволяетъ материальной точкѣ сойти съ нѣкоторой поверхности, ни въ ту, ни въ другую сторону ея, такъ что точка можетъ двигаться только вдоль по

поверхности; такую преграду называют *поверхностью, удерживающею на себѣ матерьяльную точку*.

Примѣромъ такой поверхности можетъ служить поверхность сферы, на которой должна оставаться матерьяльная точка, прикрѣпленная къ одному концу бесконечно-тонкаго, вполнѣ твердаго стержня, другой конецъ котораго постоянно находится въ началѣ координатъ; предполагается, что стержень можетъ совершать какое бы то ни было вращательное движеніе вокругъ этой неподвижной точки.

§ 33. Ограниченіе свободы движенія точки поверхностью, удерживающею ее на себѣ.

Координаты матерьяльной точки должны постоянно удовлетворять уравненію поверхности, удерживающей ее на себѣ.

Если эта поверхность неподвижна, то уравненіе ея заключаетъ въ себѣ координаты и постоянные параметры.

Если же поверхность движется или измѣняетъ съ теченіемъ времени свой видъ или размѣры, то уравненіе ея будетъ заключать: координаты, постоянные параметры и время t .

Напримѣръ, поверхность сферы, центръ которой движется равномерно со скоростью k по оси X , а радіусъ возрастаетъ равномерно со скоростью A , выразится слѣдующимъ уравненіемъ:

$$(x - x_0 - kt)^2 + y^2 + z^2 - (R + At)^2 = 0.$$

гдѣ x_0 есть абцисса центра, а R — величина радіуса, въ моментъ $t=0$.

Если матерьяльная точка движется по поверхности, выражаемой уравненіемъ:

$$f(x, y, z, t) = 0, \dots \dots \dots (256)$$

то скорость ея должна удовлетворять слѣдующему уравненію:

$$\frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{dz}{dt} + \frac{\partial f}{\partial t} = 0, \dots \dots \dots (257)$$

или

$$\frac{\partial x}{\partial f} \cdot \frac{df}{V} + \frac{\partial y}{\partial f} \cdot \frac{df}{V} + \frac{\partial z}{\partial f} \cdot \frac{df}{V} + \frac{\partial t}{\partial f} \cdot \frac{df}{V} = 0$$

18-32

— 175 —

К2 § 33.

$$\frac{\partial f}{\partial z} = 0$$

Ур. кривой $f(x, y, z) = 0$ Ур. касательной плоскости в точке x, y, z этой кривой

$$X \frac{1}{\frac{\partial f}{\partial x}} + Y \frac{1}{\frac{\partial f}{\partial y}} + Z \frac{1}{\frac{\partial f}{\partial z}} = 0$$

Ур. нормали в точке x, y, z этой кривой

$$X \cdot \frac{\partial f}{\partial x} = Y \cdot \frac{\partial f}{\partial y} = Z \cdot \frac{\partial f}{\partial z}$$

Поэтому все углы между нормалью и осями координат

$$\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\Delta f}, \frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{\Delta f}, \frac{\frac{\partial f}{\partial z}}{\Delta f}$$

$$\text{или } \Delta f = + \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2}$$

Значит, если по нормали отсчитывать от начала координат

$$\Delta f = + \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2}$$

то проекции ее на оси координат дадут

$$\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}$$

Разделив эти проекции на нормаль, получим косинусы углов, которые образует нормаль с осями координат

нормаль
мб.

должна удовлетворять тому же уравненію (258), которому удовлетворяетъ и v , потому что матеріальная точка имѣла бы ее (т.-е. скорость w), если бы оставалась въ постоянномъ совпаденіи съ точкою M , а не двигалась бы вдоль по поверхности; и такъ:

$$\Delta f w \cos(w, N) + \frac{df}{dt} = 0 \dots\dots\dots (261)$$

Вычтя уравненіе (261) изъ уравненія (258), получимъ:

$$\Delta f (v \cos(v, N) - w \cos(w, N)) = 0,$$

или:

$$\Delta f \cdot u \cos(u, N) = 0, \dots\dots\dots (262)$$

гдѣ u есть скорость относительнаго движенія матеріальной точки по отношенію къ той неизмѣняемой средѣ, съ которою движущаяся поверхность неизмѣяемо связана; уравненіе (262) выражаетъ, что относительная скорость u должна заключаться въ касательной плоскости къ поверхности.

Если поверхность деформируется, то можно представить себѣ, что она принадлежитъ въ некоторой деформирующейся средѣ, такъ что всѣ точки поверхности суть точки этой среды. Разсуждая такъ же, какъ выше, придемъ къ такому же заключенію, а именно, что скорость относительнаго движенія матеріальной точки по отношенію къ средѣ должна заключаться въ касательной плоскости къ поверхности.

§ 34. Ограниченіе свободы движенія точки поверхности, не удерживающею ее съ одной стороны.

Условимся писать уравненіе каждой не удерживающей поверхности такимъ образомъ, чтобы во второй части уравненія былъ нуль, и чтобы первая часть дѣлалась большею нуля при подстановленіи въ нее координатъ точекъ той части пространства вѣдь поверхности, въ которую матеріальная точка можетъ сойти съ поверхности.

Такъ, напримѣръ, уравненіе поверхности сферы радіуса R , имѣющей центръ въ началѣ координатъ, будемъ писать такъ:

$$R^2 - (x^2 + y^2 + z^2) = 0. \dots\dots\dots (263)$$

которое можно представить подъ такимъ видомъ:

$$\Delta f \cdot v \cos(v, N) + \frac{df}{dt} = 0, \dots \dots \dots (258)$$

гдѣ N есть направление положительной нормали, возстановленной къ поверхности (256) изъ той точки ея, въ которой движущаяся материальная точка находится въ моментъ t ; косинусы угловъ, составляемыхъ этою нормалью съ осями координатъ, выражаются такъ:

$$\left. \begin{aligned} \cos(N, X) &= \frac{1}{\Delta f} \frac{df}{dx}, \\ \cos(N, Y) &= \frac{1}{\Delta f} \frac{df}{dy}, \\ \cos(N, Z) &= \frac{1}{\Delta f} \frac{df}{dz}, \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (259)$$

$$\Delta f = +1 \sqrt{\left(\frac{df}{dx}\right)^2 + \left(\frac{df}{dy}\right)^2 + \left(\frac{df}{dz}\right)^2} \dots \dots \dots (259 \text{ bis})$$

Уравненіе (258) выражаетъ, что проеція скорости v на направление положительной нормали должна имѣть величину:

$$-\frac{1}{\Delta f} \frac{df}{dt} \dots \dots \dots (260)$$

Проеція скорости на касательную плоскость къ поверхности можетъ быть какая угодно.

Частная производная отъ f по t равна нулю, *если поверхность неподвижна*; тогда уравненіе (258) будетъ выражать, что *скорость должна заключаться въ касательной плоскости*, что понятно и само собою.

Если поверхность, не измѣняя ни своего вида, ни размѣровъ, имѣть какое либо движеніе, то можно представить себѣ, что она принадлежитъ нѣкоторой движущейся неизмѣняемой средѣ, такъ что всѣ точки поверхности суть точки этой среды. Означимъ черезъ w скорость той точки M поверхности и среды, съ которою материальная точка въ моментъ t совпадаетъ; эта скорость

должна удовлетворять тому же уравненію (258), которому удовлетворяет и v , потому что матерьяльная точка имѣла бы ее (т.-е. скорость w), если бы оставалась въ постоянномъ совпаденіи съ точкою M , а не двигалась бы вдоль по поверхности; и такъ:

$$\Delta f w \cos(w, N) + \frac{\partial f}{\partial t} = 0 \dots\dots\dots (261)$$

*— абсолютная скорость
— абсолютная скорость
среды, въ которой находится
поверхности.* Вычтя уравненіе (261) изъ уравненія (258), получимъ:

$$\Delta f (v \cos(v, N) - w \cos(w, N)) = 0,$$

$$\text{или: } v \cos(v, N) - w \cos(w, N) = u \cos(u, N),$$

$$\Delta f \cdot u \cos(u, N) = 0, \dots\dots\dots (262)$$

гдѣ u есть скорость относительнаго движенія матерьяльной точки по отношенію къ той неизмѣняемой средѣ, съ которою движущаяся поверхность неизмѣняемо связана; уравненіе (262) выражаетъ, что относительная скорость u должна заключаться въ касательной плоскости къ поверхности.

Если поверхность деформируется, то можно представить себѣ, что она принадлежит нѣкоторой деформирующейся средѣ, такъ что всѣ точки поверхности суть точки этой среды. Разсуждая такъ же, какъ выше, придемъ къ такому же заключенію, а именно, *что скорость относительнаго движенія матерьяльной точки по отношенію къ средѣ должна заключаться въ касательной плоскости къ поверхности.* (примечаніе § 35.)

§ 34. Ограниченіе свободы движенія точки поверхностью, не удерживающею ее съ одной стороны.

Условимся писать уравненіе каждой недерживающей поверхности такимъ образомъ, чтобы во второй части уравненія былъ нуль, и чтобы первая часть дѣлалась большою нуля при подстановленіи въ нее координатъ точекъ той части пространства внѣ поверхности, въ которую матерьяльная точка можетъ сойти съ поверхности.

Такъ, напримѣръ, уравненіе поверхности сферы радіуса R , имѣющей центръ въ началѣ координатъ, будемъ писать такъ:

$$R^2 - (x^2 + y^2 + z^2) = 0 \dots\dots\dots (263)$$

если поверхность эта не удерживаетъ матеріальную точку, находящуюся на ней, отъ перемѣщеній внутрь ея; потому что координаты точекъ, находящихся внутри сферы, дѣлаютъ первую часть этого уравненія болѣе нуля и обращаютъ его въ неравенство:

$$R^2 - (x^2 + y^2 + z^2) > 0.$$

Если же та же самая сфера не удерживаетъ матеріальную точку отъ перемѣщеній внаружу ея, то уравненіе ея ставемъ писать такъ:

$$(x^2 + y^2 + z^2) - R^2 = 0 \dots\dots\dots (264)$$

для того, чтобы первая часть его дѣлалась болѣею нуля при подстановленіи въ нее координатъ точекъ, находящихся внѣ сферы.

При соблюденіи этого условія, въ свободную сторону поверхности будутъ направлены положительныя нормали, возстановленныя изъ точекъ поверхности; въ самомъ дѣлѣ, если близъ точки $M(x, y, z)$ поверхности:

$$f(x, y, z, t) = 0 \dots\dots\dots (265)$$

возьмемъ другую точку $M_1(x + \delta x, y + \delta y, z + \delta z)$, такую, чтобы направленіе $\overline{MM_1}$ составляло острый уголъ съ направленіемъ положительной нормали N (259, 259 bis), возстановленной изъ точки M , то можемъ утверждать, что произведеніе:

$$\Delta f \cdot \overline{MM_1} \cos(\overline{MM_1}, N)$$

или равный ему тричленъ:

$$\frac{\partial f}{\partial x} \delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \delta y + \frac{\partial f}{\partial z} \delta z$$

болѣе нуля; знакъ же этого тричлена, при безконечной малости величинъ $\delta x, \delta y, \delta z$, опредѣляетъ собою знакъ величины:

$$f(x + \delta x, y + \delta y, z + \delta z, t);$$

значить эта величина также болѣе нуля, а слѣдовательно точка M_1 находится внѣ поверхности съ свободной стороны ея. *Значитъ нормаль направлена въ свободную часть пространства.*
Матерьяльная точка свободна, когда находится внѣ поверхности (265); тогда координаты ея удовлетворяютъ неравенству:

$$f(x, y, z, t) > 0,$$

а скорость ея можетъ имѣть какую угодно величину и какое угодно направлеіе.

Если въ какой либо моментъ t матерьяльная точка находится на поверхности (265), то въ моментъ $(t + dt)$ координаты ея:

$$x + Dx = x + x' dt + x'' \frac{(dt)^2}{1.2} + \dots$$

$$y + Dy = y + y' dt + y'' \frac{(dt)^2}{1.2} + \dots$$

$$z + Dz = z + z' dt + z'' \frac{(dt)^2}{1.2} + \dots$$

должны удовлетворять, или равенству:

$$f(x + Dx, y + Dy, z + Dz, t + dt) = 0, \dots \quad (266)$$

или неравенству:

$$f(x + Dx, y + Dy, z + Dz, t + dt) > 0, \dots \quad (267)$$

смотря потому, осталась ли точка на поверхности, или сошла съ нея.

Разложимъ первую часть равенства (266) или неравенства (267) по восходящимъ степенямъ дифференціала dt ; припавъ во вниманіе уравненіе (265), получимъ:

$$f(x + Dx, y + Dy, z + Dz, t + dt) = \frac{df}{dt} dt + \frac{d^2 f}{dt^2} \frac{(dt)^2}{1.2} + \dots \quad (268)$$

гдѣ:

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} x' + \frac{\partial f}{\partial y} y' + \frac{\partial f}{\partial z} z' + \frac{\partial f}{\partial t} \dots \quad (269)$$

$$\frac{d^2 f}{dt^2} = \frac{\partial f}{\partial x} x'' + \frac{\partial f}{\partial y} y'' + \frac{\partial f}{\partial z} z'' + Kf \dots \dots \dots (270)$$

$$Kf = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} (x')^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} (y')^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} (z')^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} +$$

$$+ 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} x' y' + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} x' z' + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial t} x' +$$

$$+ 2 \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} y' z' + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial t} y' + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial t} z' \dots \dots \dots (271)$$

Послѣ этого можемъ сказать, что если матеріальная точка въ моментъ t находится на поверхности (265), то координаты ея, скорость и ускорения должны удовлетворять равенству

$$\frac{df}{dt} dt + \frac{d^2 f (dt)^2}{dt^2} + \dots = 0, \dots \dots \dots (272)$$

или неравенству:

$$\frac{df}{dt} dt + \frac{d^2 f (dt)^2}{dt^2} + \dots > 0, \dots \dots \dots (273)$$

смотря потому, остается ли точка къ концу бесконечно-малаго промежутка времени dt на той же поверхности, или сходять съ нея.

Отсюда слѣдуетъ, что первая полная производная отъ f по t не можетъ быть отрицательною, такъ какъ знакъ ея (при положительномъ dt) опредѣляетъ знакъ всего ряда; а потому скорость матеріальной точки находящейся на неудерживающей поверхности (265), должна удовлетворять слѣдующему условію:

$$\frac{\partial f}{\partial x} x' + \frac{\partial f}{\partial y} y' + \frac{\partial f}{\partial z} z' + \frac{\partial f}{\partial t} \geq 0, \dots \dots \dots (274)$$

то есть:

$$v \cos(v, N) \geq - \frac{1}{\Delta f} \frac{\partial f}{\partial t} \dots \dots \dots (275)$$

Если поверхность неподвижна, то условіе (275) принимаетъ слѣдующій видъ:

$$v \cos(v, N) \geq 0; \dots \dots \dots (276)$$

это значить, что скорость материальной точки, находящейся на неподвижной неупругой поверхности, можетъ имѣть какую угодно величину и какое угодно направленіе, составляющее съ положительною нормалью острый или прямой уголъ, это, конечно, понятно само собою.

Если поверхность движется или деформируется, то мы можемъ себѣ представить нѣкоторую среду (какъ объяснено въ предыдущемъ параграфѣ), переносящую эту поверхность въ пространство; означимъ черезъ M ту точку поверхности и среды, съ которою материальная точка совпадаетъ въ моментъ t .

Такъ какъ точка M всегда остается принадлежащею поверхности, то скорость ея w удовлетворяетъ уравненію:

$$w \cos(w, N) = - \frac{1}{\Delta f} \frac{df}{dt}; \dots \dots \dots (261)$$

изъ условія (275) и равенства (261) слѣдуетъ:

$$w \cos(w, N) \geq 0; \dots \dots \dots (277)$$

это значить, что скорость относительнаго движенія точки по отношенію къ средѣ должна составлять острый или прямой уголъ съ положительною нормалью къ поверхности.

§ 35. Условіе, которому должно удовлетворять ускореніе точки, движущейся по данной удерживающей поверхности.

Кромѣ вышеприведенныхъ условий, ограничивающихъ произвольность скорости движущейся точки, существуютъ еще условія, которымъ должны подчиняться ускоренія ея.

Для точки, остающейся на данной поверхности, условія эти выражаются равенствами:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 0, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = 0, \quad \frac{d^2z}{dt^2} = 0, \dots \dots$$

Разсмотримъ значеніе перваго изъ нихъ.

Оно будетъ имѣть слѣдующій видъ при неподвижности поверхности:

$$\frac{\partial f}{\partial x} x'' + \frac{\partial f}{\partial y} y'' + \frac{\partial f}{\partial z} z'' + f_2(x', y', z') = 0, \dots \dots \dots (278)$$

гдѣ f_2 есть слѣдующая однородная функція второй степени отъ скоростей x' , y' , z' :

$$f_2(x', y', z') = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} (x')^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} (y')^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} (z')^2 + \\ + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} y' z' + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} z' x' + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} x' y'.$$

Равенство (278) можетъ быть представлено еще такъ:

$$\Delta f \cdot \dot{v} \cos(\dot{v}, N) + f_2(x', y', z') = 0, \dots \dots \dots (279)$$

или:

$$\Delta f \cdot \frac{dv}{dt} \cos(v, N) + \Delta f \cdot \frac{v^2}{\rho} \cos(\rho, N) + f_2 = 0, \left| \begin{array}{l} \text{...} \\ \text{...} \end{array} \right.$$

гдѣ ρ означаетъ величину и направленіе радіуса кривизны траекторіи, описываемой матеріальною точкою на неподвижной поверхности.

Принявъ во вниманіе, что скорость перпендикулярна въ нормали N , мы найдемъ, что рассматриваемое нами условіе можетъ быть выражено также слѣдующимъ равенствомъ:

$$\frac{1}{\rho} \cos(\rho, N) = - \frac{f_1(a_x, a_y, a_z)}{\Delta f}, \dots \dots \dots (280)$$

гдѣ a_x , a_y , a_z означаютъ косинусы угловъ, составляемыхъ направленіемъ скорости съ осями координатъ X , Y , Z *).

4. Равенство (279), или равенство:

$$\dot{v} \cos(\dot{v}, N) = - \frac{v^2 f_1(a_x, a_y, a_z)}{\Delta f} \dots \dots \dots (279 \text{ bis})$$

опредѣляетъ величину проэкціи ускоренія на нормаль N въ каждой точкѣ поверхности; величина эта зависитъ отъ величины и направленія скорости, такъ что *въ каждой точкѣ поверхности*,

*) Косинусы эти должны удовлетворять равенству:

$$\frac{\partial f}{\partial x} a_x + \frac{\partial f}{\partial y} a_y + \frac{\partial f}{\partial z} a_z = 0.$$

при определенных величинах v^2 , a_x , a_y , a_z , проекция ускорения на нормаль к поверхности должна иметь вполне определенное значение для того, чтобы движущаяся точка не оставила поверхности.

2. Равенство (280) определяет величину радиуса кривизны траектории в зависимости от направления скорости и от угла, составленного плоскостью кривизны траектории с нормалью к поверхности.

Б. Подвижную поверхность:

$$f(x, y, z, t) = 0$$

неизменяемого вида мы представляемъ себѣ принадлежащую нѣкоторой движущейся неизменяемой средѣ.

Выразимъ абсолютныя координаты x, y, z въ координатахъ ξ, η, ζ относительно нѣкоторыхъ осей Ξ, Υ, Z , неизмѣнно-связанныхъ со средою; тогда первая часть уравненія поверхности должна будетъ выразиться нѣкоторою функциею координатъ ξ, η, ζ , не заключающею времени явнымъ образомъ, потому что поверхность находится въ относительномъ покоѣ по отношенію къ средѣ.

Положимъ:

$$f(x, y, z, t) = \Phi(\xi, \eta, \zeta).$$

Вслѣдствіе такой перемѣны координатъ, равенство:

$$\frac{d^2 f}{dt^2} = \frac{\partial f}{\partial x} x'' + \frac{\partial f}{\partial y} y'' + \frac{\partial f}{\partial z} z'' + Kf = 0,$$

(гдѣ Kf выражается формулою (271)) принимаетъ видъ:

$$\frac{d^2 \Phi}{dt^2} = \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} \xi'' + \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} \eta'' + \frac{\partial \Phi}{\partial \zeta} \zeta'' + \Phi_2(\xi', \eta', \zeta') = 0, \dots (281)$$

аналогичный виду равенства (278).

Отсюда, также какъ и для неподвижной поверхности, получимъ:

$$i \cos(i, N) = - \frac{u^2 \Phi_2(x\xi, a_\eta, a_\zeta)}{\Delta \Phi}, \dots \dots \dots (282)$$

гдѣ $\alpha_\xi, \alpha_\eta, \alpha_z$ суть косинусы угловъ, составляемыхъ направлениемъ относительной скорости u съ осями Ξ, Υ, Z ; эти косинусы должны удовлетворять равенству:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \xi} \alpha_\xi + \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} \alpha_\eta + \frac{\partial \Phi}{\partial z} \alpha_z = 0.$$

Подъ Φ , и $\Delta \Phi$ мы подразумеваемъ

$$\Delta \Phi = + \sqrt{\left(\frac{\partial \Phi}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \eta}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z}\right)^2}, \dots \dots (283)$$

$$\Phi_2(\xi', \eta', z') = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \xi^2} (\xi')^2 + \dots + 2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \xi \partial \eta} \xi' \eta' \dots (284)$$

Равенство (282) опредѣляетъ величину проекціи на нормаль относительнаго ускоренія движущейся точки по отношенію къ неизмѣняемой средѣ; въ каждой точкѣ поверхности, при опредѣленныхъ величинахъ $u, \alpha_\xi, \alpha_\eta, \alpha_z$, проекція относительнаго ускоренія u на нормаль къ поверхности должна имѣть вполнѣ опредѣленное значеніе для того, чтобы движущаяся точка не оставила поверхности.

Деформирующуюся поверхность:

$$f(x, y, z, t) = 0 \dots \dots \dots (285)$$

мы представляемъ себѣ принадлежащую нѣкоторой деформирующейся средѣ, такъ что во все время движенія поверхность состоитъ изъ однихъ и тѣхъ же точекъ этой среды.

Буквами x, y, z мы будемъ теперь обозначать координаты матерьяльной точки; координаты же точекъ среды и поверхности мы будемъ обозначать такъ, какъ въ V-й главѣ кинематической части, а именно a, b, c будутъ означать координаты какой либо точки среды въ моментъ $t = 0$, а ξ, η, z — координаты той же самой точки среды въ моментъ t .

Положимъ, что движеніе среды, а съ нею и поверхности, выражается слѣдующими функціями:

$$\xi = \mathfrak{F}_1(a, b, c, t), \quad \eta = \mathfrak{F}_2(a, b, c, t), \quad z = \mathfrak{F}_3(a, b, c, t) \dots (286)$$

Если въ уравненіе:

$$f(\xi, \eta, z, t) = 0 \dots \dots \dots (287)$$

вмѣсто x, y, z подставить функціи $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \mathfrak{F}_3$, то должны будемъ получить уравненіе, удовлетворяемое начальными координатами всѣхъ тѣхъ точекъ среды, которыя находятся на разматриваемой поверхности; говоря иначе, по исключеніи величинъ x, y, z изъ равенствъ (286) и (287), мы должны получить уравненіе начального положенія поверхности:

$$f(a, b, c, 0) = 0, \dots \dots \dots (288)$$

то есть, уравненіе, не заключающее времени явнымъ образомъ.

Уравненіе (285) должно удовлетворяться тождественно функціями времени:

$$x = f_1(t), \quad y = f_2(t), \quad z = f_3(t),$$

выражающими абсолютное движеніе точки, движущейся по разсматриваемой поверхности; точно также уравненіе (288) должно удовлетворяться тождественно функціями времени:

$$a = \varphi_1(t), \quad b = \varphi_2(t), \quad c = \varphi_3(t),$$

выражающими относительное движеніе той же точки по отношенію къ деформирующейся средѣ (Кинем. часть, стр. 197, строки 15—22 сверху).

Если функція f будетъ приведена къ виду (288), то условія:

$$\frac{df}{dt} = 0, \quad \frac{d^2f}{dt^2} = 0$$

выразятся слѣдующими равенствами:

$$\frac{\partial f}{\partial a} a' + \frac{\partial f}{\partial b} b' + \frac{\partial f}{\partial c} c' = 0 \dots \dots \dots (289)$$

$$\frac{\partial f}{\partial a} a'' + \frac{\partial f}{\partial b} b'' + \frac{\partial f}{\partial c} c'' + \frac{\partial^2 f}{\partial a^2} (a')^2 + \dots + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial a \partial b} a' b' = 0; \quad (290)$$

съ другой стороны производныя отъ f по a, b, c могутъ быть получены, разсматривая f какъ функцію отъ x, y, z и t , а x, y, z — какъ функціи (286) отъ a, b, c, t ; такъ что:

$$\frac{\partial f}{\partial a} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial a} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial a} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial a}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial a^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \left(\frac{\partial x}{\partial a} \right)^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \left(\frac{\partial y}{\partial a} \right)^2 + \dots + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \frac{\partial x}{\partial a} \frac{\partial y}{\partial a} +$$

$$+\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial^2 x}{\partial a^2}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial^2 y}{\partial a^2}+\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial^2 z}{\partial a^2};$$

Вследствие этого, равенства (289) и (290) получают такой вид:

$$u\left(\frac{\partial f}{\partial x}\cos(u,X)+\frac{\partial f}{\partial y}\cos(u,Y)+\frac{\partial f}{\partial z}\cos(u,Z)\right)=0$$

$$\Delta f \cdot u \cos(u,N) + u^2 f_2(c_1, c_2, c_3) = 0, \dots \dots (291)$$

где u есть скорость относительнаго движениа (проекция которой на оси координат выражается формулами (240) кинематической части); c_1, c_2, c_3 — косинусы углов, составляемых направлением этой скорости съ осями координат, Δ — ускорение относительнаго движениа точки по отношению къ деформирующейся поверхности; проекция этого ускорения на ось X выражается такъ:

$$\ddot{u} \cos(u,X) = \frac{\partial^2 x}{\partial a} a'' + \frac{\partial^2 x}{\partial b} b'' + \frac{\partial^2 x}{\partial c} c'' + \frac{\partial^2 x}{\partial a^2} (a')^2 + \frac{\partial^2 x}{\partial b^2} (b')^2 +$$

$$+ \frac{\partial^2 x}{\partial c^2} (c')^2 + 2 \frac{\partial^2 x}{\partial b \partial c} b' c' + 2 \frac{\partial^2 x}{\partial c \partial a} c' a' + 2 \frac{\partial^2 x}{\partial a \partial b} a' b' *). \dots (292)$$

Равенство (291) аналогично равенству (279).

*). Въ дополненіе къ сказанному въ ^X §-й главѣ кинематической части слѣдуетъ прибавить, что у кореня абсолютнаго движениа точки M въ какой либо моментъ t есть геометрическая сумма, составленная.

1) изъ ускоренія \dot{w} той точки измѣняемой среды, съ которою точка M въ этотъ моментъ совпадаетъ,

$$\dot{w} \cos(w,X) = \frac{\partial^2 x}{\partial t^2},$$

2) изъ ускоренія \ddot{u} относительнаго движениа

и 3) изъ добавочнаго ускоренія проекція котораго на ось X выражается такъ:

$$2\left(\frac{\partial^2 x}{\partial t \partial a} a' + \frac{\partial^2 x}{\partial t \partial b} b' + \frac{\partial^2 x}{\partial t \partial c} c'\right).$$

Если среда неизмѣняема, то добавочное ускореніе есть противоположное обратному

§ 36. О кривизнѣ линій, проведенныхъ по поверхности и о кривизнѣ поверхностей.

Формула (280) выражаетъ кривизну линіи, проведенной по поверхности, въ функціи слѣдующихъ величинъ: $x, y, z, a_x, a_y, a_z, \cos(\rho, N)$; первые три суть координаты той точки, въ которой опредѣляется кривизна кривой, слѣдующія три: a_x, a_y, a_z суть косинусы угловъ, составляемыхъ съ осями координатъ касательною къ кривой въ этой точкѣ; послѣдняя величина есть косинусъ угла, составляемаго плоскостью кривизны кривой съ нормалію къ поверхности въ той же точкѣ.

Изъ формулы этой можно видѣть слѣдующее.

1. Различныя кривыя линіи, проведенныя по поверхности черезъ одну точку ея, имѣющія въ этой точкѣ общую касательную и общую плоскость кривизны, имѣютъ въ ней одинаковый радіусъ кривизны.

2. Различныя кривыя линіи, проведенныя по поверхности черезъ одну точку ея, и имѣющія въ этой точкѣ общую касательную, но различныя плоскости кривизны, имѣютъ въ этой точкѣ такіе радіусы кривизны, что отношеніе:

$$\frac{\cos(\rho, N)}{\rho} \dots \dots \dots (293)$$

для всѣхъ ихъ одинаково.

Означимъ черезъ \mathfrak{R} величину радіуса кривизны линіи пересѣченія поверхности плоскостью, проведенною черезъ нормаль N и черезъ общую касательную ко всѣмъ кривымъ; такая кривая называется *нормальнымъ сѣченіемъ* поверхности.

Предыдущее отношеніе (293) равняется единицѣ, дѣленной на \mathfrak{R} , если радіусъ кривизны нормальнаго сѣченія направленъ по N ; въ противномъ же случаѣ отношеніе (293) равняется минусъ единицѣ, дѣленной на \mathfrak{R} .

Слѣдовательно:

$$\rho = \pm \mathfrak{R} \cos(\rho, N),$$

то есть *радіусъ кривизны какой либо кривой, проведенной по поверхности, равенъ проэкціи на плоскость ея кривизны радіуса кривизны нормальнаго сѣченія, проведеннаго черезъ касательную къ кривой.*

Для того, чтобы формулы не заключали явнымъ образомъ двойственнаго знака, условимся считать кривизну нормальнаго сѣченія отрицательною, если радіусъ кривизны его направленъ въ сторону отрицательной нормали; обозначать ее будемъ знакомъ \mathfrak{R} .

затѣмъ приведемъ коэффициенты у косинуса и синуса къ слѣдующему виду:

$$\frac{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}}{2 \frac{\partial f}{\partial z}} = \frac{\mathfrak{D}}{2} \cos 2\varphi_0, \quad \frac{\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)}{\frac{\partial f}{\partial z}} = \frac{\mathfrak{D}}{2} \sin 2\varphi_0,$$

тогда получимъ слѣдующее выраженіе кривизны нормального сѣченія:

$$\mathfrak{K} = - \frac{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}}{2 \frac{\partial f}{\partial z}} - \frac{\mathfrak{D}}{2} \cos 2(\varphi - \varphi_0), \dots \dots \dots (297)$$

гдѣ:

$$\frac{\partial f}{\partial z} \mathfrak{D} = \sqrt{\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)^2 + 4 \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)^2} \dots \dots \dots (298)$$

Изъ формулы (297) хорошо видно, какъ измѣняется кривизна нормального сѣченія при вращеніи сѣкущей плоскости вокругъ нормали. Наименьшую кривизну имѣетъ сѣченіе плоскостью, составляющею уголъ φ_0 съ плоскостью ZX ; наибольшую — сѣченіе плоскостью перпендикулярною къ первой и составляющею уголъ $\left(\varphi_0 + \frac{\pi}{2}\right)$ съ плоскостью ZX . Эти нормальныя сѣченія называются *главными*, а кривизны ихъ — *главными кривизнами поверхности* въ рассматриваемой точкѣ.

Обозначимъ наибольшую кривизну знакомъ \mathfrak{K}_M , наименьшую — знакомъ \mathfrak{K}_m ; изъ предыдущихъ формулъ найдемъ слѣдующія выраженія для суммы и произведенія этихъ кривизнъ:

$$\mathfrak{K}_M + \mathfrak{K}_m = - \frac{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}}{\frac{\partial f}{\partial z}} \dots \dots \dots (299)$$

$$\mathfrak{K}_M \mathfrak{K}_m = \frac{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)^2}{\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2} \dots \dots \dots (300)$$

8. Изъ формулы (297) видно также, что сумма кривизнъ двухъ взаимно-ортогональных нормальныхъ сѣченій въ каждой точкѣ поверхности есть величина постоянная, независящая отъ угла φ , опредѣляющаго положеніе сѣченій; формула (299) выражаетъ величину этой суммы.

9. Подобно тому, как средняя кривизна какой либо дуги измѣряется отношеніемъ, некотораго угла къ длинѣ дуги, аналогично этому средняя кривизна какой либо плоской площади измѣрится отношеніемъ некотораго тѣлеснаго угла къ величинѣ площади.

Пусть S величина некоторой площади, взятой на кривой поверхности и ограниченной замкнутой контуромъ.

Представимъ себѣ коническую поверхность, имѣющую вершиною начало координатъ, а произвольными — линии параллельныя нормальямъ къ поверхности, проведеннымъ черезъ точки контура площади S .

Представимъ себѣ, кромѣ того, сферу радиуса равнаго единицѣ, имѣющую центръ также въ началѣ координатъ.

Пусть Σ есть величина площади той части поверхности сферы, которая заключается внутри вышеозначенной конической поверхности.

Величина тѣлеснаго угла, образуемаго конической поверхностью при ея вершинѣ, измѣряется отношеніемъ площади Σ въ единицѣ площади.

Отношеніе

$$\frac{\Sigma}{S \text{ (един. длины)}^2}$$

называется *среднею кривизною* площади S .

Кривизна поверхности въ какой либо точкѣ ея A есть величина средней кривизны бесконечно-малой площади, заключающей въ себѣ (или на своемъ контурѣ) точку A .

Обозначимъ черезъ ν_x, ν_y, ν_z косинусы угловъ, составляемыхъ нормалью къ поверхности съ осями координатъ; координаты точки, находящейся на поверхности вышеозначенной сферы, выразятся величинами

$$(\text{един. длины}) \nu_x = \frac{(\text{един. длины}) \partial f}{\Delta f} \cdot \frac{\partial f}{\partial x}$$

$$(\text{един. длины}) \nu_y = \frac{(\text{един. длины}) \partial f}{\Delta f} \cdot \frac{\partial f}{\partial y}$$

$$(\text{един. длины}) \nu_z = \frac{(\text{един. длины}) \partial f}{\Delta f} \cdot \frac{\partial f}{\partial z}.$$

Площади Σ и S выражаются слѣдующими интегралами:

$$\Sigma = (\text{един. длины})^2 \int \int \frac{dx dy}{\nu_z}; \quad S = \int \int \frac{dx dy}{\nu_z}.$$

Косинусы ν_x и ν_y могут быть выражены функциями отъ x и y ; поэтому:

$$\Sigma = (\text{един. длины})^2 \iint \left(\frac{\partial \nu_x}{\partial x} \frac{\partial \nu_y}{\partial y} - \frac{\partial \nu_x}{\partial y} \frac{\partial \nu_y}{\partial x} \right) \frac{dx dy}{\nu_z}.$$

Изъ этого слѣдуетъ, что кривизна поверхности въ какой либо точкѣ ея выразится такъ:

$$\text{кривизна поверхности} = \frac{\partial \nu_x}{\partial x} \frac{\partial \nu_y}{\partial y} - \frac{\partial \nu_x}{\partial y} \frac{\partial \nu_y}{\partial x}.$$

Если ось Z параллельна нормали, возстановленной изъ точки A поверхности, то, для этой точки:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \nu_x}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial \nu_y}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \dots$$

а поэтому кривизна въ точкѣ A выразится второю частью равенства (300); изъ этого слѣдуетъ, что во всякой точкѣ поверхности:

$$(\text{кривизна поверхности}) = \mathcal{R}_M \mathcal{R}_m \dots \dots \dots (301)$$

10. Нетрудно составить для суммы кривизнъ ортогональныхъ сѣченій и для кривизны поверхности болѣе общія выраженія, чѣмъ тѣ, которыя приведены выше (формулы (299) (300)); а именно, легко убѣдиться, что:

$$\mathcal{R}_M + \mathcal{R}_m = -\frac{\Delta_2 f}{\Delta f} + \frac{f_2 \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right)}{(\Delta f)^3}, \dots \dots \dots (302)$$

$$\mathcal{R}_M \mathcal{R}_m = -\frac{1}{(\Delta f)^4} \begin{vmatrix} 0, & f_x, & f_y, & f_z \\ f_x, & f_{xx}, & f_{xy}, & f_{xz} \\ f_y, & f_{xy}, & f_{yy}, & f_{yz} \\ f_z, & f_{xz}, & f_{yz}, & f_{zz} \end{vmatrix}; \dots \dots (303)$$

здѣсь, въ опредѣлителѣ, производныя означены сокращенными знаками; въ выраженіи же (302):

$$\Delta_2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}.$$

11. Если уравнение поверхности будет рѣшено относительно x и мы пожелаемъ выразить вышесказанныя величины въ p, q, r, s, t , то получимъ:

$$\mathfrak{K}_M + \mathfrak{K}_m = - \frac{r(1+q^2) - 2pqs + t(1+p^2)}{(1+p^2+q^2)^{\frac{3}{2}}}, \dots \dots (304)$$

$$\mathfrak{K}_M \mathfrak{K}_m = \frac{rt - s^2}{(1+p^2+q^2)^2} \dots \dots \dots (305)$$

§ 37. Условіе, которому должно удовлетворять ускореніе точки, движущейся по данной неудерживающей поверхности.

Когда точка сходитъ съ поверхности, тогда та изъ ряда производныхъ:

$$\frac{df}{dt}, \frac{d^2f}{dt^2}, \frac{d^3f}{dt^3}, \dots \dots$$

которая первая не обращается въ нуль, получаетъ значеніе положительное.

Слѣдовательно, если

$$\frac{df}{dt} = 0,$$

то ускореніе точки, находящейся на данной неудерживающей поверхности, должно удовлетворять условію:

$$\frac{d^2f}{dt^2} \geq 0. \dots \dots \dots (306)$$

Это условіе при неподвижной поверхности принимаетъ слѣдующій видъ:

$$\dot{v} \cos(\dot{v}, N) \geq - \frac{v^2 f_2(a_x, a_y, a_z)}{\Delta f}, \dots \dots \dots (307)$$

при подвижной поверхности неизмѣняемой формы — слѣдующій:

$$\dot{u} \cos(\dot{u}, N) \geq - \frac{u^2 \Phi_2(a_\xi, a_\eta, a_\zeta)}{\Delta \Phi}, \dots \dots \dots (308)$$

а при деформирующейся поверхности — слѣдующій:

291.

$$\dot{u} \cos(\dot{u}, N) \geq - \frac{u^2 f_2(c_1, c_2, c_3)}{\Delta f} \dots \dots \dots (309)$$

Если же скорость точки составляет острый уголъ съ нормалью, то есть, если

272.

$$\frac{df}{dt} > 0,$$

то ускореніе ея не подлежитъ никакому ограниченію.

§ 38. Итакъ, абсолютная скорость и абсолютное ускореніе матерьяльной точки, стѣсненной въ своемъ движеніи поверхностью:

$$f(x, y, z, t) = 0,$$

должны удовлетворять слѣдующимъ условіямъ.

1. Если поверхность удерживаетъ на себѣ точку:

258

$$\Delta f \cdot v \cos(v, N) = - \frac{\partial f}{\partial t} \dots \dots \dots (258)$$

$$\Delta f \cdot \dot{v} \cos(\dot{v}, N) = - Kf, \dots \dots \dots (310)$$

гдѣ Kf есть сокращенное обозначеніе слѣдующаго выраженія:

278 613 111 132-1212

$$v^2 f_2(a_x, a_y, a_z) + 2 \left(\frac{\partial^2 f}{\partial t \partial x} x' + \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial y} y' + \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial z} z' \right) + \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} \dots (271)$$

$$v^2 f_2(a_x, a_y, a_z) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} (x')^2 + \dots + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} x' y'.$$

2. Если точка находится на поверхности неудерживающей, то абсолютная скорость должна удовлетворять условію:

275

$$\Delta f \cdot v \cos(v, N) \geq - \frac{\partial f}{\partial t}; \dots \dots \dots (275)$$

а) если скорость удовлетворяетъ равенству:

$$\Delta f \cdot v \cos(v, N) = - \frac{\partial f}{\partial t},$$

278 613 111 132-1212

то абсолютное ускорение точки должно удовлетворять условию:

$$\Delta f \cdot \dot{v} \cos(\dot{v}, N) \geq -Kf; \dots\dots\dots (311)$$

б) если же скорость удовлетворяет неравенству:

$$\Delta f \cdot v \cos(v, N) > -\frac{\partial f}{\partial t},$$

то абсолютное ускорение точки не подлежит никакому ограничению.

3. Если точка находится въ неудерживающей поверхности, то ни скорость, ни ускорения ея не подлежат никакимъ ограниченіямъ.

§ 39. Реакція поверхности.

Три основныя начала (§ 14), положенныя въ основаніе механики свободной точки, составляютъ также основаніе механики несвободной материальной точки.

На основаніи этихъ началъ, абсолютное ускореніе, сообщаемое несвободной материальной точкѣ всѣми силами, одновременно приложенными къ ней, имѣетъ направленіе равнодѣйствующей этихъ силъ и равно величинѣ равнодѣйствующей, дѣленной на массу точки.

Въ силу тѣхъ же началъ, зная абсолютное ускореніе несвободной материальной точки, мы дѣлаемъ заключеніе о величинѣ и направленіи равнодѣйствующей всѣхъ силъ, приложенныхъ къ точкѣ.

Изъ этого и изъ условий, приведенныхъ въ предыдущемъ параграфѣ, слѣдуетъ, что равнодѣйствующая всѣхъ силъ, приложенныхъ къ материальной точкѣ, стѣсненной въ своихъ движеніяхъ поверхностью:

$$f(x, y, z, t) = 0,$$

удовлетворяетъ слѣдующимъ условіямъ:

1. Если поверхность удерживаетъ на себѣ точку, то проэкція на нормаль къ поверхности *равнодѣйствующей всѣхъ силъ, приложенныхъ къ точкѣ, равна*

$$-m \frac{Kf}{\Delta f} \dots\dots\dots (312)$$

2. Если поверхность неудерживающая и точка находится на ней и если

а) скорость точки перпендикулярна къ нормали, то проекція вышесказанной равнодѣйствующей на нормаль

$$\text{не} < -m \frac{K_f}{\Delta f}, \dots \dots \dots (313)$$

б) если же скорость точки составляет острый уголъ съ нормалью, то вышесказанная равнодѣйствующая не подлежитъ никакому ограниченію.

Разсматриваемая поверхность преграждаетъ всякія движенія матерьяльной точки, неогласныя съ существованіемъ преграды.

Причина такого дѣйствія преграды должна заключаться въ образованіи силы, приложенной къ матерьяльной точкѣ, и появляющейся только тогда, когда прочія причины движенія побуждаютъ матерьяльную точку преодолѣть преграду *); такая сила называется *реакціею преграды*.

Реакція преграды развивается до такой величины и получаетъ такое направленіе, что равнодѣйствующая, составленная изъ нея и изъ всѣхъ *прочихъ* силъ, приложенныхъ къ точкѣ, удовлетворяетъ тому изъ условій (312), (313), которое свойственно имѣющейся преградѣ.

Эти *прочія* силы мы условимся называть *задаваемыми силами*.

Итакъ, равнодѣйствующая изъ задаваемой силы F , приложенной къ матерьяльной точкѣ, находящейся на удерживающей поверхности:

$$f(x, y, z, t) = 0,$$

и изъ реакціи R этой преграды, должна удовлетворять условію (312), то есть:

$$F \cos(F, N) + R \cos(R, N) = -m \frac{K_f}{\Delta f} \dots \dots \dots (312)$$

*) Причинами движенія, побуждающими къ этому матерьяльную точку, могутъ быть не только всѣ прочія (за исключеніемъ реакціи преграды) силы, приложенныя къ матерьяльной точкѣ, но также и инерція ея.

Это равенство опредѣляетъ только величину проекціи реакціи на нормаль; проекція же реакціи на касательную плоскость остается неопредѣленною, какъ по величинѣ, такъ и по направленію.

Такой результатъ получили мы, рассматривая преграду, какъ кинематическое условіе, стѣсняющее свободу движенія точки нѣкоторою поверхностью, и не дѣлая никакихъ предположеній, ни относительно вида и физической природы тѣлъ, образующихъ преграду, ни относительно природы вещества матерьяльной точки; поэтому то мы получили вполне опредѣленную величину для той части реакціи, которая существенно необходима для удовлетворенія условію, положенному преградою.

Вслѣдствіе этого мы впрямъ принять, что сила $R \cos (R, N)$, направленная по нормали къ поверхности, есть собственно *реакція поверхности*; составляющую же $R \sin (R, N)$, дѣйствующую въ касательной плоскости, мы отнесемъ къ числу силъ, зависящихъ отъ физическихъ свойствъ тѣлъ, образующихъ преграду; объ этой составляющей будемъ говорить ниже.

Въ силу вышесказаннаго, мы будемъ принимать, что реакція поверхности на матерьяльную точку, находящуюся на этой поверхности, направлена по нормали къ поверхности.

Реакція удерживающей поверхности можетъ быть направлена по положительной или по отрицательной нормали; въ первомъ случаѣ величина ея \mathfrak{R} , опредѣляемая по формулѣ:

$$\mathfrak{R} = -m \frac{K_f}{\Delta f} - F \cos (F, N), \dots \dots \dots (312)$$

выразится числомъ положительнымъ, во второмъ — отрицательнымъ; сообразно съ этимъ, мы будемъ называть реакцію, направленную по положительной нормали — *положительною*, а направленную по отрицательной нормали — *отрицательною*.

Если движеніе матерьяльной точки по данной удерживающей поверхности будетъ извѣстно, то формула (312) дастъ намъ величину реакціи во всякій моментъ движенія.

§ 40. Дифференціальныя уравненія движенія матерьяльной точки по данной, удерживающей поверхности при дѣйствіи заданныхъ силъ.

Пусть

$$f(x, y, z, t) = 0$$

есть уравненіе поверхности, m — масса матерьяльной точки, X , Y , Z — проэкція на оси координатъ равнодѣйствующей приложенныхъ къ ней задаваемыхъ силъ.

Проекція реакціи на оси координатъ будутъ:

$$\frac{\Re}{\Delta f} \frac{\partial f}{\partial x}, \quad \frac{\Re}{\Delta f} \frac{\partial f}{\partial y}, \quad \frac{\Re}{\Delta f} \frac{\partial f}{\partial z}.$$

Въ силу основныхъ началъ (§ 14), дифференціальныя уравненія движенія этой точки (въ прямолинейныхъ прямоугольныхъ координатахъ) будутъ слѣдующія:

$$\left. \begin{aligned} m \frac{d^2 x}{dt^2} &= X + \lambda \frac{\partial f}{\partial x} \\ m \frac{d^2 y}{dt^2} &= Y + \lambda \frac{\partial f}{\partial y} \\ m \frac{d^2 z}{dt^2} &= Z + \lambda \frac{\partial f}{\partial z} \end{aligned} \right\}, \dots\dots\dots (314)$$

гдѣ

$$\lambda = \frac{\Re}{\Delta f}, \dots\dots\dots (315)$$

$$\Delta f = + \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2}$$

и гдѣ координаты x , y , z связаны уравненіемъ поверхности:

$$f(x, y, z, t) = 0 \dots\dots\dots (316)$$

Для опредѣленія движенія точки можно поступить слѣдующимъ образомъ: исключить λ изъ уравненій (314), вслѣдствіе чего получатся два дифференціальныя уравненія, не заключающія λ ; эти уравненія интегрировать, принимая во вниманіе, что x , y , z и t связаны уравненіемъ (316).

Для опредѣленія же λ имѣемъ формулу:

$$\lambda = - \frac{(mKf' + X \frac{\partial f}{\partial x} + Y \frac{\partial f}{\partial y} + Z \frac{\partial f}{\partial z})}{(\Delta f)^2}, \dots\dots (317)$$

$$\mathcal{H} \cdot \lambda \Delta f = -$$

или же можно опредѣлить λ изъ котораго либо изъ уравненій (314).

§ 41. Законъ живой силы для точки, движущейся по поверхности.

Изъ дифференціальныхъ уравненій (314) можно составить уравненіе:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{m}{2} v^2 \right) = Xx' + Yy' + Zz' + \lambda \left(\frac{\partial f}{\partial x} x' + \frac{\partial f}{\partial y} y' + \frac{\partial f}{\partial z} z' \right),$$

если поступить такъ, какъ во второй половинѣ параграфа 21-го.

Это уравненіе получить видъ уравненія (111) того же параграфа, если поверхность неподвижна, потому что тогда при всякомъ положеніи точки имѣетъ мѣсто слѣдующее равенство:

$$\frac{\partial f}{\partial x} x' + \frac{\partial f}{\partial y} y' + \frac{\partial f}{\partial z} z' = 0.$$

Разсуждая затѣмъ такъ же, какъ въ § 26, мы придемъ къ слѣдующему заключенію:

Если матеріальная точка находится на неподвижной поверхности неизмѣняемаго вида и если приложенныя къ ней задаваемыя силы имѣютъ потенциалъ, то движеніе точки подчиняется закону живой силы, выражаемому интеграломъ:

$$\frac{mv^2}{2} - U = h \dots\dots\dots (150)$$

§ 42. Геодезическая линія.

Положимъ, что данная поверхность неподвижна и что приложенныя къ матеріальной точкѣ задаваемыя силы взаимно уравновѣшиваются во все время движенія ея, тогда единственная

сила, приложенная къ точкѣ, будетъ реакція поверхности, величина и знакъ которой опредѣляется по формулѣ:

$$\mathfrak{N} = \lambda \Delta f = -m \frac{v^2 f_2(a_x, a_y, a_z)}{\Delta f}, \dots \dots \dots (318)$$

или (см. формулу 294):

$$\mathfrak{N} = mv^2 \mathfrak{K},$$

гдѣ \mathfrak{K} есть величина кривизны нормального сѣченія, проведеннаго черезъ направленіе скорости точки.

Дифференціальныя уравненія (314) получаютъ, въ этихъ случаяхъ, слѣдующій общій видъ:

$$mx'' = \lambda \frac{\partial f}{\partial x}, \quad my'' = \lambda \frac{\partial f}{\partial y}, \quad mz'' = \lambda \frac{\partial f}{\partial z}; \dots \dots \dots (319)$$

интеграль, выражающій законъ живой силы, будетъ:

$$\frac{mv^2}{2} = h,$$

или

$$v^2 = v_0^2;$$

это означаетъ, что *скорость материальной точки сохраняетъ постоянную величину.*

Такъ какъ скорость постоянна, то проэкція ускоренія на касательную къ траекторіи равна нулю, а потому проэкціи ускоренія на оси координатъ могутъ быть выражены слѣдующимъ образомъ:

$$x'' = v_0^2 \frac{d^2 x}{ds^2} = \frac{v_0^2}{\rho} \cos(\rho X)$$

$$y'' = v_0^2 \frac{d^2 y}{ds^2} = \frac{v_0^2}{\rho} \cos(\rho Y)$$

$$z'' = v_0^2 \frac{d^2 z}{ds^2} = \frac{v_0^2}{\rho} \cos(\rho Z).$$

Подставивъ эти выраженія въ дифференціальныя уравненія (319), найдемъ, что они получаютъ слѣдующій видъ:

$$\frac{d^2x}{ds^2} = \frac{\lambda}{mc_0^2} \frac{df}{dx}, \quad \frac{d^2y}{ds^2} = \frac{\lambda}{mc_0^2} \frac{df}{dy}, \quad \frac{d^2z}{ds^2} = \frac{\lambda}{mc_0^2} \frac{df}{dz}; \quad (320)$$

изъ нихъ слѣдуетъ:

$$\frac{\cos(p, X)}{\cos(N, X)} = \frac{\cos(p, Y)}{\cos(N, Y)} = \frac{\cos(p, Z)}{\cos(N, Z)},$$

то есть, что *радіусъ кривизны траекторіи направленъ по нормали къ поверхности, а, слѣдовательно, плоскость кривизны ея проходитъ черезъ нормаль.*

Кривая линія, проведенная по поверхности такимъ образомъ, чтобы плоскость кривизны во всякой точкѣ ея заключала въ себѣ нормаль къ поверхности, восстановленную въ той же точкѣ, называется *геодезическою линіею.*

Слѣдовательно, если къ материальной точкѣ, удерживаемой неподвижною поверхностью, не приложено никакихъ задаваемыхъ силъ, то точка, или находится въ покое, или движется съ постоянною скоростью, описывая геодезическую линію; эта линія проходитъ черезъ начальное положеніе точки и касается къ направленію начальной скорости.

Такимъ образомъ, каждая задача этого рода сводится на задачу о проведеніи по данной поверхности геодезической линіи черезъ данную точку и по данному направленію, проведенному изъ этой точки.

При рѣшеніи какъ этихъ, такъ и многихъ другихъ задачъ о движеніи точки по поверхности, выборъ системы координатъ, наиболее подходящей къ вопросу, играетъ весьма существенную роль, такъ какъ очень часто, при удачномъ выборѣ координатъ, формулы не только упрощаются, но и получаютъ большую наглядность.

Конечно, слѣдуетъ отдавать предпочтеніе такой системѣ координатъ, при которой заданная поверхность есть одна изъ координатныхъ поверхностей; напримѣръ, при движеніи точки по цилиндрической поверхности съ круговымъ сѣченіемъ, перпендикулярнымъ къ оси, слѣдуетъ отдать предпочтеніе кругово-цилиндрической системѣ координатъ, ось которой совпадаетъ съ осью данной поверхности; движе-

ніе же точки по поверхности шара или по поверхности прямого круговаго конуса удобнѣе разматривать въ сферическихъ координатахъ.

Примѣръ 25. Опредѣлимъ движеніе матерьяльной точки по боковой поверхности прямого круговаго конуса, предполагая, что къ ней не приложено никакихъ задаваемыхъ силъ.

Возьмемъ вершину и ось конуса за полюсь и за полярную ось сферической системы координатъ; пусть φ_0 есть уголъ между производящими и осью конической поверхности.

Нормалью къ поверхности будетъ служить координатная ось β ; реакція \mathfrak{R} будетъ направлена вдоль по β или по ея продолженію.

Дифференціальныя уравненія движенія будутъ:

$$\begin{aligned} r'' - r \sin^2 \varphi_0 \cdot (\psi')^2 &= 0, \\ - r \sin \varphi_0 \cos \varphi_0 \cdot (\psi')^2 &= \frac{\mathfrak{R}}{m}, \\ \frac{1}{r \sin \varphi_0} \frac{d(r^2 \sin^2 \varphi_0 \cdot \psi')}{dt} &= 0. \end{aligned}$$

(Проекціи ускоренія на координатныя оси сферическихъ координатъ: см. стр. 255, формулы (203) кинематической части).

Третье изъ этихъ уравненій дастъ интеграль:

$$r^2 \psi' = C_1 = r_0 \frac{v_0 \cos(v_0 \gamma)}{\sin \varphi_0},$$

второе служить для опредѣленія величины и знака реакціи:

$$\mathfrak{R} = - \frac{m C_1^2}{r^3} \sin \varphi_0 \cos \varphi_0,$$

первымъ же мы не воспользуемся теперь вовсе, такъ какъ уже имѣемъ еще одинъ интеграль:

$$v^2 = (r')^2 + r^2 \sin^2 \varphi_0 (\psi')^2 = v_0^2.$$

Изъ этихъ первыхъ интеграловъ, слѣдуя обычному приему, получимъ слѣдующее уравненіе траекторіи:

$$r \cos(\psi \sin \varphi_0 + \Gamma_1) = \frac{C_1 \sin \varphi_0}{v_0}, \dots \dots \dots (321)$$

гдѣ Γ_1 — произвольная постоянная.

Если коническая поверхность будет развернута на плоскость, положеніе точекъ на которой будетъ выражено въ полярныхъ координатахъ:

$$\rho = r, \quad \Theta = \psi \sin \varphi_0,$$

то геодезическая кривая (321) обратится въ прямую линію:

$$\rho \cos (\Theta + \Gamma_1) = \frac{C_1 \sin \varphi_1}{r_0}.$$

Величина завитія *) геодезической линіи въ какой либо точкѣ ея можетъ быть выражена произведеніемъ изъ полуразности главныхъ кривизнъ поверхности въ этой точкѣ и синуса удвоеннаго угла, составленнаго плоскостью кривизны геодезической линіи съ плоскостью одного изъ главныхъ нормальныхъ сѣченій, для вывода этой формулы, возьмемъ общее выраженіе завитія какой либо кривой, приведенное на стр. 260 кинематической части, (формулы (311) и (312)), и примѣнимъ его къ геодезической линіи, для которой:

$$\rho \frac{d^2x}{ds^2} = \cos (N, X); \quad \rho \frac{d^2y}{ds^2} = \cos (N, Y); \quad \rho \frac{d^2z}{ds^2} = \cos (N, Z).$$

Положимъ, что плоскость XU параллельна касательной плоскости къ поверхности въ той точкѣ, къ которой относится нашъ выводъ; тогда, въ этой точкѣ:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 0, \quad \cos (\rho, X) = 0, \quad \cos (\rho, Y) = 0,$$

$$\frac{dx_b}{ds} = 0, \quad \frac{dy_b}{ds} = 0;$$

(последнія два равенства слѣдуютъ изъ формулъ (313), стр. 261 кинематической части).

*) См. стр. 259 кинематической части.

Кромѣ того, замѣтимъ, что между тремя радіусами кривизны: ρ , \mathfrak{R} , g существуетъ слѣдующая зависимость:

$$\frac{1}{\rho^2} = \frac{1}{\mathfrak{R}^2} + \frac{1}{g^2} \dots \dots \dots (325)$$

§ 44. Примѣры рѣшенія вопросовъ о движеніи по данной удерживающей поверхности матерьяльной точки, подверженной заданнымъ силамъ.

Примѣръ 26-й. На боковой поверхности прямого круговаго конуса находится матерьяльная точка, притягиваемая къ оси конуса силою, пропорціональною разстоянію отъ нея; опредѣлить движеніе точки.

Воспользуемся сферическими координатами также, какъ и въ примѣрѣ 25-мъ.

Разстояніе точки до полярной оси выразится произведеніемъ изъ r на синусъ угла φ_0 ; очевидно, что потенциалъ данной притягивающей силы будетъ:

$$- m \frac{\mu^2}{2} r^2 \sin^2 \varphi_0,$$

гдѣ μ^2 есть постоянный коэффициентъ.

По закону живой силы:

$$(r')^2 + r^2 \sin^2 \varphi_0 (\psi')^2 = 2h - \mu^2 r^2 \sin^2 \varphi_0 \dots \dots \dots (326)$$

Другой интегралъ, такой же, какъ въ примѣрѣ 25-мъ, получается изъ дифференціального уравненія, выражающаго, что проэкція ускоренія на ось γ равна нулю; этотъ интегралъ:

$$r^2 \sin^2 \varphi_0 \cdot \psi' = C_1 \dots \dots \dots (327)$$

Такъ какъ проэкція силы на ось β равна отрицательно-взятой величинѣ ея, помноженной на $\cos \varphi_0$, то реакція по положительной оси β выразится слѣдующею формулою:

$$\mathfrak{R} = - m r \sin \varphi_0 \cos \varphi_0 ((\psi')^2 - \mu^2),$$

то есть слѣдующею функціею отъ r :

$$\mathfrak{R} = - m \cos \varphi_0 \left(\frac{C_1^2}{(r \sin \varphi_0)^3} - \mu^2 r \sin \varphi_0 \right) \dots \dots \dots (328)$$

Изъ интеграловъ (326) и (327), при помощи обычнаго приема, получимъ уравненіе траекторіи и опредѣлимъ движеніе точки по ней.

Слѣдуетъ замѣтить, что, если развернуть боковую поверхность конуса на плоскость, то точка на поверхности конуса, имѣющая сферическія координаты r, ψ , изобразится на плоскости точкою, имѣющею полярныя координаты $r, \theta = \psi \sin \varphi_0$; для того же, чтобы всякая неразрывная линія, падающая на поверхности конуса, изобразилась неразрывною же линіею на плоскости, необходимо представить себѣ, что боковая поверхность конуса состоитъ изъ безчисленнаго множества безконечно-тонкихъ слоевъ, составляющихъ цѣлую поверхность, навернутую на боковую поверхность конуса безчисленное число разъ.

Введя θ въ интегралы (326) и (327), приведемъ ихъ въ слѣдующему виду

$$(r')^2 + r^2(\theta')^2 = 2h - (\mu \sin \varphi_0)^2 r^2, \dots \dots \dots (329)$$

$$r^2 \theta' = \frac{C_1}{\sin \varphi_0}; \dots \dots \dots (330)$$

а это суть первые интегралы движенія на плоскости материальной точки, подверженной притяженію:

$$(\mu \sin \varphi_0)^2 \cdot r = \mu^2 (r \sin \varphi_0) \sin \varphi_0$$

къ началу координатъ *).

Отсюда видно, что рѣшеніе данной задачи сводится на рѣшеніе другой задачи о движеніи материальной точки той же массы на плоскости подъ вліяніемъ силы, направленной по радіусу вектору и равной проекціи заданной силы на производящую конической поверхности.

Эту вторую точку мы назовемъ изображеніемъ данной. При рѣшеніи задачъ о движеніи этого изображенія на плоскости, надо имѣть въ виду, что начальное положеніе его имѣетъ слѣдующія координаты. r_0 и $(\psi_0 \sin \varphi_0)$, гдѣ r_0 и ψ_0 суть начальныя координаты данной точки; кромѣ того, данная точка и ея изображеніе имѣютъ начальныя скорости одинаковой величины и составляющія одинаковые углы съ производящею.

Рѣшивъ задачу о движеніи изображенія на плоскости, можемъ перейти къ рѣшенію данной задачи, представивъ себѣ, что плоскость, съ движущимся по ней изображеніемъ, снова павернута на поверхность конуса;

*) Эта сила есть проекція заданной силы на производящую конуса.

тогда изображеніе будетъ совершать на поверхности конуса то самое движеніе, которое совершаетъ данная точка.

Въ настоящемъ случаѣ изображеніе движется на плоскости по эллипсу, имѣющему центръ въ началѣ координатъ.

Примѣчаніе. Такимъ же образомъ могутъ быть рѣшены и многіе другіе вопросы о движеніи матерьяльной точки по развѣтываемой на плоскость линейчатой поверхности подѣ вліяніемъ заданной силы, направленной вдоль по той производящей, на которой точка находится. Каждая такая задача сводится на задачу о движеніи изображенія точки по поверхности, развернутой на плоскость, и при дѣйствіи той же силы, направленной по той прямой линіи, которою производящая изобразится.

Предлагаемъ читателю рѣшить, на примѣръ, вопросъ о движеніи по данной конической поверхности матерьяльной точки, притягиваемой къ вершинѣ поверхности силою, обратно пропорціональною квадрату разстоянія отъ нея.

Примѣръ 27-й. Движеніе тяжелой матерьяльной точки по поверхности неподвижной сферы.

Возьмемъ полюсъ сферическихъ координатъ въ центрѣ сферы, полярную ось направимъ параллельно направленію силы тяжести.

Такъ какъ сила тяжести имѣетъ потенціалъ mgz , поверхность же неподвижна, то движеніе точки удовлетворяетъ закону живой силы:

$\frac{mv^2}{2} = 2gh + \frac{mv_0^2}{2}$ (331)

$v^2 = 2gz + v_0^2 - 2gz_0$ (332)

Проекція силы тяжести на координатную ось γ равна нулю; поэтому:

$R^2 \sin^2 \varphi \cdot \frac{d\psi}{dt} = C = Rv_0 \sin \varphi_0 \cos(v_0 \gamma); \dots \dots \dots (333)$

(332) и (333) суть первые интегралы движенія.

Реакція, направленная по координатной оси α или противоположно ей, выразится формулою:

$\frac{R}{m} = -g \cos \varphi - \frac{v^2}{R} = -\frac{(gz + v^2)}{R} \dots \dots \dots (334)$

Далѣе, для опредѣленія движенія точки, произведемъ слѣдующія дѣйствія:

Исключив ψ изъ интеграла (331):

$$R^2(\varphi')^2 + R^2 \sin^2 \varphi (\psi')^2 = 2h + 2gz$$

изъ интеграла (333); получим: $R^2 \sin^2 \varphi (\psi')^2 = \frac{2h + 2gz}{R^2 \cos^2 \varphi}$

$$(R \sin \varphi \cdot \psi')^2 = \frac{2g}{R^2} U, \dots \dots \dots (335)$$

гдѣ U есть слѣдующій многочленъ третьей степени отъ z :

$$U = \left(\frac{h}{g} + z \right) (R^2 - z^2) - \frac{C^2}{2g}, \dots \dots \dots (336)$$

а координата z равняется $R \cos \varphi$.

Изъ дифференціального уравненія (335) видно, что координата z движущейся точки не можетъ сдѣлать многочленъ U отрицательнымъ, такъ какъ это противорѣчило бы знаку первой части этого уравненія.

Отсюда слѣдуетъ, что движущаяся точка не можетъ пройти ни черезъ нижнюю, ни черезъ верхнюю точку сферы, потому что въ нихъ $z^2 = R^2$ и многочленъ (336) получаетъ отрицательное значеніе.

При $z = z_0$ многочленъ получаетъ положительное значеніе, а именно:

$$U_0 = \frac{v_0^2}{2g} R^2 \sin^2 \varphi_0 \sin^2 (v_0 \gamma).$$

Изъ этого видно, что U должно имѣть одинъ дѣйствительный корень гдѣ либо между $z = -R$ и $z = z_0$ и одинъ дѣйствительный корень гдѣ либо между z_0 и $z = +R$; первый корень означимъ черезъ z_1 или $R \cos \alpha$, второй — чрезъ z_2 или $R \cos \beta$.

Многочленъ U получаетъ положительныя значенія для всякихъ z , заключающихся между предѣлами z_1 и z_2 , а потому траекторія движенія расположена между параллельными кругами: нижнимъ $\varphi_1 = \beta$ и верхнимъ $\varphi_2 = \alpha^*)$.

Третій корень z_3 многочлена U имѣетъ величину отрицательную, меньшую ($-R$); это видно изъ того, что при $z = -\infty$ многочленъ обращается въ $+\infty$, а при $z = -R$ получаетъ отрицательное значеніе.

Изъ двухъ параллельныхъ круговъ, служащихъ предѣлами траекторіи,

*) При $\cos (v_0 \gamma) = 1$ можетъ быть три случая:

1) $z_0 = z_1$, 2) $z_0 = z_2$, 3) $z_1 = z_2 = z_0$.

верхній можетъ находиться на верхней или на нижней полусферѣ (т.-е. z , можетъ быть положительнымъ или отрицательнымъ), нижній же параллельный кругъ ни въ какомъ случаѣ не можетъ быть на верхней полусферѣ, что сейчасъ докажемъ.

Между коэффициентами многочлена U и корнями уравненія $U=0$ существуетъ зависимость, выражаемая тремя равенствами:

$$z_1 + z_2 + z_3 = -\frac{h}{g}$$

$$z_1 z_2 + (z_1 + z_2) z_3 = -R^2$$

$$z_1 z_2 z_3 = \frac{h}{g} R^2 - \frac{C^2}{2g}.$$

Изъ втораго получимъ:

$$z_3 = -\frac{z_1 z_2 + R^2}{z_1 + z_2} \dots \dots \dots (337)$$

исключивъ же изъ всѣхъ трехъ, какъ z_3 , такъ и $\frac{h}{g}$, найдемъ слѣдующее равенство:

$$-\frac{(z_1 z_2 + R^2)^2}{z_1 + z_2} + (z_1 + z_2) R^2 = -\frac{C^2}{2g},$$

или:

$$\frac{(R^2 - z_1^2)(R^2 - z_2^2)}{z_1 + z_2} = \frac{R^4 \sin^2 \beta \sin^2 \alpha}{z_1 + z_2} = \frac{C^2}{2g} \dots \dots \dots (338)$$

Отсюда видно, что сумма $(z_1 + z_2)$ должна быть непременно величиною положительною; а такъ какъ и разность $(z_1 - z_2)$ болѣе нуля, то z_1 не можетъ быть величиною отрицательною.

Такъ какъ z , находящееся въ уравненіи (335), должно быть не болѣе z_1 и не менѣе z_2 , то выразимъ его слѣдующимъ образомъ:

$$z = z_1 \cos^2 \eta + z_2 \sin^2 \eta = z_1 - (z_1 - z_2) \sin^2 \eta; \dots (339)$$

тогда будутъ:

$$z - z_1 = -(z_1 - z_2) \sin^2 \eta, \quad z - z_2 = (z_1 - z_2) \cos^2 \eta,$$

$$z - z_3 = \frac{R^2 + 2z_1 z_2 + z_1^2}{z_1 + z_2} (1 - k^2 \sin^2 \eta),$$

$$-R \sin \varphi d\varphi = dz = -2(z_1 - z_2) \sin \eta \cos \eta d\eta, \dots (340)$$

гдѣ:

$$k^2 = \frac{z_1^2 - z_2^2}{R^2 + 2z_1 z_2 + z_1^2}; \dots \dots \dots (341)$$

поэтому дифференціальное уравненіе (335) получить такой видъ:

$$\left(\frac{d\eta}{dt}\right)^2 = \frac{g}{R} \left(\frac{R^2 + 2z_1 z_2 + z_1^2}{2R(z_1 + z_2)} \right) (1 - k^2 \sin^2 \eta),$$

откуда:

$$\frac{d\eta}{dt} = \pm \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \eta} \sqrt{\frac{g}{R} \cdot \frac{(R^2 + 2z_1 z_2 + z_1^2)}{2R(z_1 + z_2)}} \dots \dots (342)$$

Разность $(1 - k^2 \sin^2 \eta)$ не можетъ обратиться въ нуль ни при какомъ дѣйствительномъ η , потому что, какъ сейчасъ покажемъ, k^2 менѣе единицы, если только корни z_1 и z_2 равны.

Въ самомъ дѣлѣ, составивъ выраженіе для $(1 - k^2)$:

$$1 - k^2 = \frac{R^2 + 2z_1 z_2 + z_2^2}{R^2 + 2z_1 z_2 + z_1^2} = \frac{R^2 - z_1^2 + (z_1 + z_2)^2}{R^2 - z_1^2 + (z_1 + z_2)^2}$$

и принявъ во вниманіе, что z_1^2 болѣе z_2^2 , мы заключимъ, что k^2 менѣе единицы.

Такъ какъ вторая часть уравненія (342) не можетъ обратиться въ нуль, то производная η' не можетъ измѣнить своего знака ни разу во все время движенія; такъ что знакъ начальнаго значенія ея η_0 опредѣляетъ знакъ корня второй части уравненія (342).

Начальное значеніе производной η' выражается формулою:

$$\eta_0' = \frac{-z_0'}{2(z_1 - z_2) \sin \eta_0 \cos \eta_0},$$

а начальная величина z_0 опредѣляетъ величину квадрата синуса η_0 :

$$\sin^2 \eta_0 = \frac{z_1 - z_0}{z_1 - z_2}; \dots \dots \dots (343)$$

знаки же величинъ $\sin \eta_0$ и $\cos \eta_0$ предыдущими формулами не опредѣляются и могутъ быть выбраны по нашему произволу; если мы условимся, что:

$$\left. \begin{aligned} 0 < \eta_0 < \frac{\pi}{2} \text{ при } z_0' > 0, \\ 0 < \eta_0 < \frac{\pi}{2} \text{ при } z_0' < 0, \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (344)$$

то η'_0 будетъ во всякомъ случаѣ болѣе нуля, а потому корню второй части уравненія (342) должны будемъ приписать знакъ положительный.

Слѣдовательно, при соблюденіи условій (344), уголъ η будетъ непрерывно возрастать вмѣстѣ съ временемъ по закону, выражаемому формулою:

$$t = \sqrt{\frac{R}{g} \cdot \frac{2R(z_1 + z_2)}{R^2 + 2z_1 z_2 + z_1^2}} (F(\eta, k) - F(\eta_0, k)), \dots (345)$$

гдѣ $F(\eta, k)$ означаетъ слѣдующій интегралъ:

$$F(\eta, k) = \int_0^\eta \frac{d\eta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \eta}}, \dots (346)$$

$F(\eta_0, k)$ — такой же интегралъ, имѣющій η_0 верхнимъ предѣломъ.

Интегралъ $F(\eta, k)$, называемый эллиптическимъ интеграломъ перваго рода, выражаетъ нѣкоторую трансцендентную функцію отъ η ; намъ должно ознакомиться съ нѣкоторыми свойствами этого интеграла.

1) Во первыхъ, очевидно:

$$F(-\eta, k) = -F(\eta, k) \dots (347)$$

2) Во вторыхъ, замѣнивъ, подъ интеграломъ (346), η черезъ $(\zeta - \pi)$ получимъ слѣдующее равенство:

$$\dots \int_0^\eta \frac{d\eta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \eta}} = \int_\pi^{\eta + \pi} \frac{d\zeta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \zeta}},$$

или:

$$F(\eta, k) = \int_0^{\eta + \pi} \frac{d\zeta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \zeta}} - \int_0^\pi \frac{d\zeta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \zeta}},$$

то есть:

$$F(\eta, k) = F(\eta + \pi, k) - F(\pi, k)$$

$$F(\eta + \pi, k) = F(\eta, k) + F(\pi, k) \dots (348)$$

3) Положивъ въ послѣдней формулѣ η равнымъ $\left(-\frac{\pi}{2}\right)$ и принявъ во вниманіе, что на основаніи формулы (347):

$$F\left(-\frac{\pi}{2}, k\right) = -F\left(\frac{\pi}{2}, k\right),$$

получимъ:

$$F\left(\frac{\pi}{2}, k\right) = \frac{1}{2} F(\pi, k) \dots \dots \dots (349)$$

4) Далѣе, изъ формулъ (348) и (349) найдемъ:

$$F\left(\frac{3\pi}{2}, k\right) = 3F\left(\frac{\pi}{2}, k\right)$$

и такъ далѣе; такъ что, если n есть цѣлое число, то:

$$F\left(\frac{n\pi}{2}, k\right) = nF\left(\frac{\pi}{2}, k\right) \dots \dots \dots (350)$$

5) Пусть $\eta = n\pi + \lambda\pi$, гдѣ n есть цѣлое число, а λ — дробь, меньшая единицы; применяя n разъ формулу (348), найдемъ:

$$F(\eta, k) = F(\lambda\pi, k) + nF(\pi, k) \dots \dots \dots (351)$$

6) Наконецъ, положимъ въ формулѣ (348) $\eta = -\lambda\pi$, гдѣ λ — дробь, меньшая половины:

$$F(\pi - \lambda\pi, k) = F(-\lambda\pi, k) + F(\pi, k);$$

отсюда, на основаніи равенствъ (347) и (349), получимъ:

$$F\left(\frac{\pi}{2}, k\right) - F(\lambda\pi, k) = F(\pi - \lambda\pi, k) - F\left(\frac{\pi}{2}, k\right) \dots \dots (352)$$

Знаніе этихъ свойствъ интеграла (346) позволяетъ намъ вывести слѣдующіи заключенія изъ равенствъ (346) и (339).

Назовемъ черезъ τ тотъ моментъ времени, въ который, при отрицательномъ η_0 , уголъ η обращается въ нуль; при положительномъ η_0 моментъ τ будетъ отрицательнымъ.

Проекція скорости движущейся точки на ось β будетъ обращаться въ нуль каждый разъ, какъ она приходитъ на одну изъ крайнихъ параллелей; это будетъ въ слѣдующіе моменты:

$$t = \tau, \tau + \frac{T}{2}, \tau + T, \tau + \frac{3}{2}T, \tau + 2T, \tau + \frac{5}{2}T, \dots$$

гдѣ:

$$T = \sqrt{\frac{R}{g} \cdot \frac{2R(s_1 + s_2)}{R^2 + 2s_1s_2 + s_1^2}} F\left(\frac{\pi}{2}, k\right);$$

въ эти моменты уголъ φ получаетъ слѣдующія значенія:

$$\varphi = \beta, \quad \alpha, \quad \beta, \quad \alpha, \quad \beta, \quad \alpha, \dots$$

такъ что переходъ точки отъ нижняго круга къ верхнему совершается всегда въ теченіи промежутка времени $\frac{T}{2}$ и такое же время требуется для обратнаго движенія.

Пусть η_1 есть нѣкоторый уголъ, меньшій $\frac{\pi}{2}$, которому соотвѣтствуетъ уголъ φ_1 , опредѣляемый по формулѣ:

$$\cos \varphi_1 = \cos \beta - (\cos \beta - \cos \alpha) \sin^2 \eta_1; \dots, \quad (353)$$

наконецъ, пусть t_1 есть соотвѣтствующій моментъ времени. (Этотъ моментъ заключается въ промежуткѣ между моментами τ и $\tau + \frac{T}{2}$).

Въ дальнѣйшемъ своемъ движеніи матерьяльная точка поднимется до параллели α , гдѣ будетъ въ моментъ $\left(\tau + \frac{T}{2}\right)$, затѣмъ начнетъ опускаться и снова придетъ на параллель φ_1 въ тотъ моментъ t_2 , въ который η возрастетъ до величины $\eta_2 = (\pi - \eta_1)$, такъ какъ тогда будетъ: $\sin \eta_2 = \sin \eta_1$; на основаніи свойства (352) интеграла F мы заключимъ, что:

$$\left(\tau + \frac{T}{2}\right) - t_1 = t_2 - \left(\tau + \frac{T}{2}\right),$$

то есть, что поднятіе точки отъ параллели φ_1 до параллели α и обратное нисхожденіе ея отъ α до φ_1 совершаются въ теченіи равныхъ промежутковъ времени.

Затѣмъ точка, коснувшись нижней параллели $\varphi = \beta$, снова начнетъ подыматься и снова достигнетъ параллели φ_1 въ такой моментъ t_3 , въ который η возрастетъ до величины $\eta_3 = \pi + \eta_1$, потому что тогда тоже $\sin \eta_3 = \sin \eta_1$; изъ равенства (348) заключимъ, что:

$$t_3 - t_1 = T.$$

Чтобы опредѣлить законъ измѣненія угла ψ , возьмемъ дифференціальное уравненіе (333) и подставимъ въ него вмѣсто C его выраженіе (338); получимъ:

$$\frac{d\psi}{dt} = \pm \frac{R^2 \sqrt{2g} \sin \beta \sin \alpha}{(R^2 - z^2) \sqrt{z_1 + z_2}}, \dots \quad (354)$$

гдѣ верхній знакъ соответствуетъ тѣмъ случаямъ, въ которыхъ $\cos(\psi_0)$ больше нуля, нижній — тѣмъ, въ которыхъ этотъ косинусъ менѣе нуля.

Исключивъ dt изъ (342) и (354), будемъ имѣть слѣдующее дифференціальное уравненіе:

$$d\psi = \pm \frac{R^2 \sin \beta \sin \alpha}{\sqrt{R^2 + 2z_1 z_2 + z_1^2}} \left(\frac{2R d\eta}{(R^2 - z_1^2) \Delta \eta} \right) \dots \dots (355)$$

гдѣ, для краткости, пріпято временно обозначеніе:

$$\Delta \eta = \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \eta};$$

(этотъ знакъ не слѣдуетъ смѣшивать съ такимъ же знакомъ, служившимъ намъ для обозначенія величины, встрѣчавшейся въ предыдущихъ параграфахъ).

Въ полученномъ дифференціалномъ уравненіи (355) произведемъ слѣдующее разложеніе:

$$\frac{2R}{R^2 - z^2} = \frac{1}{R+z} + \frac{1}{R-z}, \dots \dots \dots (355 \text{ bis})$$

затѣмъ, выразимъ z въ η по формулѣ (339) и наконецъ произведемъ интегрированіе въ предѣлахъ отъ $\eta=0$ до η ; получимъ:

$$\begin{aligned} \psi - \Psi = \pm \frac{R^2 \sin \beta \sin \alpha}{\sqrt{R^2 + 2z_1 z_2 + z_1^2}} & \left[\frac{1}{(R+z_1)} \int_0^\eta \frac{d\eta}{(1+n_1 \sin^2 \eta) \Delta \eta} + \right. \\ & \left. + \frac{1}{(R-z_1)} \int_0^\eta \frac{d\eta}{(1+n_2 \sin^2 \eta) \Delta \eta} \right], \dots \dots \dots (356) \end{aligned}$$

гдѣ:

$$n_1 = -\frac{z_1 z_2}{R+z_1}, \quad n_2 = \frac{z_1 - z_2}{R-z_1},$$

а Ψ есть координата той меридіональной плоскости, въ которой движущаяся точка заключается въ моментъ τ .

Входящіе въ это выраженіе интегралы, называемые эллиптическими интегралами третьяго рода, обладаютъ, подобно интегралу F , свойствами, выражаемыми формулами:

$$L(-\eta) = -L(\eta); \quad L(\eta + \pi) = L(\eta) + L(\pi), \quad L(\pi) = 2L\left(\frac{\pi}{2}\right),$$

гдѣ L означаетъ такой интегралъ третьяго рода.

въ эти моменты уголъ φ получаетъ слѣдующія значенія:

$$\varphi = \beta, \quad \alpha, \quad \beta, \quad \alpha, \quad \beta, \quad \alpha, \dots$$

такъ что переходъ точки отъ нижняго круга къ верхнему совершается всегда въ теченіи промежутка времени $\frac{T}{2}$ и такое же время требуется для обратнаго движенія.

Пусть η_1 есть нѣкоторый уголъ, меньшій $\frac{\pi}{2}$, которому соотвѣтствуетъ уголъ φ_1 , опредѣляемый по формулѣ:

$$\cos \varphi_1 = \cos \beta - (\cos \beta - \cos \alpha) \sin^2 \eta_1; \dots, \quad (353)$$

наконецъ, пусть t_1 есть соотвѣтствующій моментъ времени. (Этотъ моментъ заключается въ промежуткѣ между моментами τ и $\tau + \frac{T}{2}$).

Въ дальнѣйшемъ своемъ движеніи матерьяльная точка поднимется до параллели α , гдѣ будетъ въ моментъ $\left(\tau + \frac{T}{2}\right)$, затѣмъ начнетъ опускаться и снова придетъ на параллель φ_1 въ тотъ моментъ t_2 , въ который η возрастетъ до величины $\eta_2 = (\pi - \eta_1)$, такъ какъ тогда будетъ: $\sin \eta_2 = \sin \eta_1$; на основаніи свойства (352) интеграла F мы заключимъ, что:

$$\left(\tau + \frac{T}{2}\right) - t_1 = t_2 - \left(\tau + \frac{T}{2}\right),$$

то есть, что поднятіе точки отъ параллели φ_1 до параллели α и обратное нисхожденіе ея отъ α до φ_1 совершаются въ теченіи равныхъ промежутковъ времени.

Затѣмъ точка, коснувшись нижней параллели $\varphi = \beta$, снова начнетъ подыматься и снова достигнетъ параллели φ_1 въ такой моментъ t_3 , въ который η возрастетъ до величины $\eta_3 = \pi + \eta_1$, потому что тогда тоже $\sin \eta_3 = \sin \eta_1$; изъ равенства (348) заключимъ, что:

$$t_3 - t_1 = T.$$

Чтобы опредѣлить законъ измѣненія угла ψ , возьмемъ дифференціальное уравненіе (333) и подставимъ въ него вмѣсто C его выраженіе (338); получимъ:

$$\frac{d\psi}{dt} = \pm \frac{R^2 \sqrt{2g} \sin \beta \sin \alpha}{(R^2 - z^2) \sqrt{z_1 + z_2}}, \dots \quad (354)$$

гдѣ верхній знакъ соответствуетъ тѣмъ случаямъ, въ которыхъ $\cos(\varphi, \gamma)$ больше нуля, нижній — тѣмъ, въ которыхъ этотъ косинусъ менѣе нуля.

Исключивъ dt изъ (342) и (354), будемъ имѣть слѣдующее дифференціальное уравненіе:

$$d\psi = \pm \frac{R^2 \sin \beta \sin \alpha}{\sqrt{R^2 + 2\epsilon_2 z_2 + \epsilon_1^2}} \left(\frac{2R d\eta}{(R^2 - z_1^2) \Delta \eta} \right) \dots \dots (355)$$

гдѣ, для краткости, принято временно обозначеніе:

$$\Delta \eta = \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \eta};$$

(этотъ знакъ не слѣдуетъ смѣшивать съ такимъ же знакомъ, служившимъ намъ для обозначенія величины, встречающейся въ предыдущихъ параграфахъ).

Въ полученномъ дифференціальномъ уравненіи (355) произведемъ слѣдующее разложеніе:

$$\frac{2R}{R^2 - z_1^2} = \frac{1}{R + z_1} + \frac{1}{R - z_1}, \dots \dots \dots (355 \text{ bis})$$

затѣмъ, выразимъ z въ η по формулѣ (339) и наконецъ произведемъ интегрированіе въ предѣлахъ отъ $\eta=0$ до η ; получимъ:

$$\begin{aligned} \psi - \psi' = \pm \frac{R^2 \sin \beta \sin \alpha}{\sqrt{R^2 + 2\epsilon_2 z_2 + \epsilon_1^2}} & \left[\frac{1}{(R + z_1)} \int_0^\eta \frac{d\eta}{(1 + n_1 \sin^2 \eta) \Delta \eta} + \right. \\ & \left. + \frac{1}{(R - z_1)} \int_0^\eta \frac{d\eta}{(1 + n_2 \sin^2 \eta) \Delta \eta} \right], \dots \dots \dots (356) \end{aligned}$$

гдѣ:

$$n_1 = -\frac{\epsilon_1 - \epsilon_2}{R + z_1}, \quad n_2 = \frac{\epsilon_1 - \epsilon_2}{R - z_1},$$

а ψ есть координата той меридіональной плоскости, въ которой движущаяся точка заключается въ моментъ t .

Входяще въ это выраженіе интегралы, называемые эллиптическими интегралами третьяго рода, обладаютъ, подобно интегралу F , свойствами, выражаемыми формулами:

$$L(-\eta) = -L(\eta); \quad L(\eta + \pi) = L(\eta) + L(\pi), \quad L(\pi) = 2L\left(\frac{\pi}{2}\right),$$

гдѣ L означаетъ такой интегралъ третьяго рода.

На основаніи этихъ свойствъ, можемъ вывести изъ предыдущихъ уравненій слѣдующее заключеніе относительно закона измѣненія угла ψ .

Во время каждаго перехода точки отъ одной изъ крайнихъ параллелей до другой, уголъ ψ возрастаетъ на одну и ту же величину ω , выражаемую опредѣленнымъ интеграломъ:

$$\omega = + \frac{R^2 \sin \beta \sin \alpha}{\sqrt{R^2 + 2z_1 z_2 + z_1^2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2R d\eta}{(R^2 - z^2) \Delta \eta} \cdot \dots \dots (357)$$

Можно показать, что абсолютная величина угла ω болѣе прямого угла.

Для того, чтобы доказать это, мы примемъ во вниманіе, что:

$$\frac{2R}{R^2 \sin^2 \varphi} \cdot \frac{1}{\Delta \eta} > \frac{2R}{R^2 \sin^2 \varphi},$$

такъ какъ $\Delta \eta$ менѣе единицы; поэтому:

$$+ \sqrt{\omega^2} > \frac{R^2 \sin \beta \sin \alpha}{\sqrt{R^2 + 2z_1 z_2 + z_1^2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2R d\eta}{R^2 - z^2};$$

примѣнивъ, къ подынтегральной функціи этого интеграла, разложеніе (355 bis) и выразивъ z функціею отъ η по формулѣ (339), мы легко опредѣлимъ величину каждаго изъ получившихся интеграловъ и найдемъ слѣдующее:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2R d\eta}{R^2 - z^2} = \frac{\pi}{R} \frac{\cos \left(\frac{\beta - \alpha}{2} \right)}{\sin \alpha \cos \beta},$$

поэтому:

$$+ \sqrt{\omega^2} > \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{2R^2 + 2z_1 z_2 + 2R^2 \sin \alpha \sin \beta}{2R^2 + 2z_1 z_2 - R^2 \sin^2 \beta}},$$

но этотъ корень, очевидно, болѣе единицы, такъ какъ $(+2 \sin \alpha)$ болѣе, чѣмъ $(- \sin \beta)$, а потому и подавно абсолютная величина угла ω болѣе, чѣмъ $\frac{\pi}{2}$.

На чертежѣ 19-мъ представлена проекція на горизонтальную плоскость траектории, описываемой точкою въ одномъ изъ такихъ движеній; наружный и внутренній круги суть проекціи предѣльныхъ параллелей; углы a_1Ob_1 , b_1Oa_2 , a_2Ob_2 , . . . равны ϕ .

Реакція \mathfrak{R} по координатной оси z (т.-е. по продолженію радіуса вектора) выразится функциею одного z , если v^2 , заключающееся въ формулѣ (334), будетъ исключено изъ нея при помощи выраженія (331); тогда получимъ:

$$\mathfrak{R} = -m \frac{(3gz + 2h)}{R} \dots \dots \dots (358)$$

Обратимъ вниманіе на слѣдующіе случаи движеній точекъ.

Если корни z_1 и z_2 равны другъ другу, то многочленъ U можетъ быть представленъ подъ слѣдующимъ видомъ:

$$U = -(z - z_1)^2 \frac{(R^2 - z^2 + (z + z_1)^2)}{2z_1},$$

а такъ какъ z_1 болѣе нуля, то при всякихъ z , относящихся къ точкамъ поверхности сферы, многочленъ U получаетъ отрицательныя значенія; исключеніе составляютъ лишь точки параллельнаго круга $z = z_1$, для которыхъ U обращается въ нуль.

Такъ какъ изъ уравненія (335) слѣдуетъ, что тогда (при $z = z_1$) производная φ' равна нулю, то точка будетъ двигаться по параллельному кругу и уголъ φ будетъ постоянно равенъ своей начальной величинѣ $\varphi_0 (z_1 = R \cos \varphi_0)$.

Изъ выраженія (338) слѣдуетъ тогда:

$$C^2 = gR^3 \frac{\sin^4 \varphi_0}{\cos \varphi_0},$$

съ другой же стороны, такъ какъ начальная скорость должна быть касательною къ кругу параллели $\varphi = \varphi_0$, изъ выраженія (333) получимъ

$$C^2 = v_0^2 R^2 \sin^2 \varphi_0;$$

изъ сравненія этихъ выраженій найдемъ, что квадратъ начальной скорости долженъ имѣть слѣдующую величину:

$$v_0^2 = gR \frac{\sin^2 \varphi_0}{\cos \varphi_0};$$

эта скорость остается постоянною во все время движенія.

Движеніе по углу ψ опредѣлится изъ уравненій:

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{C}{R^2 \sin^2 \varphi_0} = \sqrt{\frac{g}{R \cos \varphi_0}};$$

сѣдовательно, движеніе равномерно и продолжительность одного полного оборота по окружности равна:

$$2\pi \sqrt{\frac{R \cos \varphi_0}{g}} \dots \dots \dots (359)$$

§ 45. Реакція удерживающей поверхности. Мѣсто схода движущейся точки съ такой поверхности.

Реакція удерживающей поверхности можетъ быть направлена какъ по положительной, такъ и по отрицательной нормали.

1. Реакція направлена по положительной нормали тогда, когда:

$$F \cos (F, N) + m \frac{Kf}{\Delta f} < 0; \dots \dots \dots (360)$$

она есть противодѣйствіе сходу точки съ поверхности по отрицательную сторону ея; а точка сошла бы въ эту сторону, если бы приняла ускореніе, сообщаемое ей силою F , такъ какъ это ускореніе удовлетворяло бы слѣдующему неравенству:

$$\Delta f \cdot \dot{\psi} \cos (\dot{\psi}, N) + Kf < 0,$$

то есть:

$$\frac{d^2 f}{dt^2} < 0.$$

2. Реакція направлена по отрицательной нормали тогда, когда:

$$F \cos (F, N) + m \frac{Kf}{\Delta f} > 0; \dots \dots \dots (361)$$

она есть противодѣйствіе сходу точки съ поверхности по положительную сторону ея; точка сошла бы въ эту сторону, если бы приняла ускореніе, сообщаемое ей силою F , такъ какъ это ускореніе удовлетворяло бы неравенству:

$$\Delta f \cdot \dot{\psi} \cos (\dot{\psi}, N) + Kf > 0,$$

то есть:

$$\frac{d^2f}{dt^2} > 0,$$

Неудерживающая поверхность не оказывает никакого противодѣйствія причинамъ, побуждающимъ точку сойти съ поверхности по положительную сторону ея; а потому, если скорость точки, находящейся на поверхности, удовлетворяетъ равенству (258) (§ 38), а задаваемые силы — неравенству (361), то реакція будетъ равна нулю.

Слѣдовательно, *неудерживающая поверхность не оказываетъ реакціи, направленной по отрицательной нормали; реакція ея можетъ быть направлена только по положительной нормали.*

3 Если скорость точки удовлетворяетъ равенству (258), а задаваемые силы — неравенству (360), то неудерживающая поверхность оказываетъ реакцію по положительной нормали, противодѣйствуя точкѣ сойти внутрь непроницаемаго тѣла (дѣйствительнаго или воображаемаго), ограниченаго этою поверхностью; величина реакціи, выражаемая формулою:

$$\mathfrak{M} = -F \cos(F, N) - m_{\Delta f} \frac{Kf}{\Delta f}, \dots \dots \dots (342)$$

такова, что ускореніе точки, сообщаемое ей равнодѣйствующею силы F и реакціи \mathfrak{M} , удовлетворяетъ равенству:

$$\frac{d^2f}{dt^2} = 0.$$

Точка движется по неудерживающей поверхности до тѣхъ поръ, пока задаваемые силы удовлетворяютъ неравенству (360); въ той точкѣ A поверхности, въ которой скорость точки и задаваемые силы удовлетворяютъ равенству:

$$F \cos(F, N) + m_{\Delta f} \frac{Kf}{\Delta f} = 0,$$

реакція обращается въ нуль.

Если, при дальнейшем движении точки по поверхности, сумма

$$R \cos (F, N) + m \frac{Kf}{\Delta f}$$

становится положительною, то движение точки по поверхности возможно только при существовании реакціи, направленной по отрицательной нормали; но такой реакціи удерживающая поверхность оказать не можетъ, а потому точка должна сойти съ поверхности.

Она сходитъ съ поверхности въ точку A и движется далѣе свободно внѣ поверхности подъ вліяніемъ приложенныхъ къ ней заданныхъ силъ; начальною скоростью на этомъ свободномъ движеніи материальной точки служить та скорость, съ которою она пришла въ точку A .

Такое движение продолжается до встрѣчи точки съ поверхностью.

Положимъ, что сфера, по которой движется тяжелая материальная точка (примѣръ 27-й), не удерживаетъ точку отъ перемѣщеній внутрь ея полости; по условію, сдѣланному въ началѣ параграфа 34-го, положительная нормаль въ этомъ случаѣ должна быть направлена къ центру сферы, то есть противоположно направленію положительной координатной оси x ; въ примѣрѣ 27-мъ мы получили выраженіе (334) для реакціи по этой оси, поэтому реакція R_N по положительной нормали къ сферѣ:

$$R^2 - (x^2 + y^2 + z^2) = 0$$

выразится слѣдующею формулою:

$$R_N = \frac{m}{R} (v^2 + gz) \dots \dots \dots (362)$$

Изъ этой формулы видно, что движущаяся точка можетъ сойти съ поверхности сферы только въ тѣхъ точкахъ ея, въ которыхъ сумма $(v^2 + gz)$ обращается въ нуль, и послѣ того становится отрицательною.

Поэтому, если $z_2 > 0$, такъ что все движеніе точки совершается по нижней полусферѣ, то точка не оставитъ сферы

Если же $z_2 < 0$ и притомъ сумма $(v^2 + gz_2)$ тоже менѣе нуля, то движущаяся точка должна будетъ оставить поверхность, еще не дойдя до этой верхней параллели.

§ 46. Трение материальной точки о поверхность.

При движении одного тѣла по другому, будетъ ли это скольженіе или катаніе, является сопротивленіе движенію, называемое треніемъ.

Свѣдѣнія наши о законахъ тренія почерпнуты изъ наблюденій.

Разсматривая материальную точку, находящуюся на данной поверхности, какъ неизмѣримо-малое тѣло, а поверхность — какъ поверхность реальнаго тѣла, и примѣняя къ нимъ законы тренія, найденныя изъ наблюденій, можемъ высказать эти законы въ слѣдующемъ видѣ.

1) Трение есть сопротивленіе движенію материальной точки по поверхности, приложенное къ точкѣ и направленное противоположно относительной скорости точки по отношенію къ поверхности.

2) Трение можетъ дѣйствовать и на точку, покоящуюся на поверхности, если проекція на касательную плоскость равнодѣйствующей всѣхъ прочихъ задаваемыхъ силъ не равна нулю; тогда трение противоположно этой проекціи.

3) Величина тренія, приложеннаго къ движущейся точкѣ, пропорціональна абсолютной величинѣ нормальной реакціи

$$\Pi = k\sqrt{N^2} = k\Delta f \cdot \sqrt{\lambda^2}, \dots \dots \dots (363)$$

гдѣ квадратные корни предполагаются положительными.

Коэффициентъ k есть отвлеченное число, величина котораго зависитъ отъ физической природы трущихся тѣлъ.

4) Величина тренія, приложеннаго къ материальной точкѣ, находящейся въ относительномъ покоѣ по отношенію къ данной поверхности, выражается тою же формулою (363), но численный коэффициентъ можетъ принимать всякія величины, отъ нуля до нѣкотораго числа k_1 , большаго k ; такъ что трение между взаимно-покоющимися тѣлами можетъ достигать бѣльшей величины, чѣмъ трение между тѣми же тѣлами, находящимися въ относительномъ движеніи.

Предположивъ существованіе тренія, опредѣляемаго этими выводами изъ опыта законами, можемъ составить слѣдующія диффе-

ренциальныя уравненія (365) движенія материальной точки, находящейся на неподвижной поверхности, выражаемой уравненіемъ:

$$f(x, y, z) = 0, \dots \dots \dots (364)$$

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = X + \lambda \frac{\partial f}{\partial x} - k\sqrt{\lambda^2} \cdot \frac{\Delta f}{v} \frac{dx}{dt} \dots \dots \dots (365, a)$$

$$m \frac{d^2y}{dt^2} = Y + \lambda \frac{\partial f}{\partial y} - k\sqrt{\lambda^2} \cdot \frac{\Delta f}{v} \frac{dy}{dt} \dots \dots \dots (365, b)$$

$$m \frac{d^2z}{dt^2} = Z + \lambda \frac{\partial f}{\partial z} - k\sqrt{\lambda^2} \cdot \frac{\Delta f}{v} \frac{dz}{dt}, \dots \dots \dots (365, c)$$

гдѣ X, Y, Z суть проеціи на оси координатъ равнодѣйствующихъ изъ приложенныхъ къ материальной точкѣ задаваемыхъ силъ.

Нормальная реакція выразится здѣсь тою же самою формулою (317)*, какъ и для точки, неподверженной тренію; чтобы получить эту формулу изъ дифференціальныхъ уравненій, помножимъ каждое на ту частную производную отъ f , которая заключается во второмъ членѣ второй части этого уравненія, по сложеніи, воспользуемся равенствами:

$$\frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{dz}{dt} = 0$$

и (270); тогда получимъ:

$$-mf_z(x', y', z') = X \frac{\partial f}{\partial x} + Y \frac{\partial f}{\partial y} + Z \frac{\partial f}{\partial z} + \lambda(\Delta f)^2,$$

откуда слѣдуетъ такое выраженіе для реакціи по положительной нормали (въ случаѣ поверхности неподвижной):

$$R = \lambda \Delta f = - \frac{X \frac{\partial f}{\partial x} + Y \frac{\partial f}{\partial y} + Z \frac{\partial f}{\partial z} + mf_z(x', y', z')}{\Delta f} \dots \dots (366)$$

Если поверхность находится въ движеніи, или деформируется,

*) Приложенною къ неподвижной поверхности.

то трение будетъ противоположно относительной скорости материальной точки по отношенію къ той средѣ, которой принадлежитъ поверхность; поэтому тогда въ дифференціальныя уравненія (365), выѣсто отношеній:

$$\frac{x'}{v}, \frac{y'}{v}, \frac{z'}{v}$$

должны входить косинусы угловъ, составляемыхъ направлениемъ относительной скорости съ неподвижными осями координатъ.

Примѣръ 28. По наклонной неподвижной плоскости движется тяжелая материальная точка; опредѣлить движеніе, принимая въ расчетъ треніе между точкою и плоскостью.

Пусть J есть уголъ наклоненія плоскости къ горизонту; расположимъ оси X^{000} и Y^{000} въ наклонной плоскости, ось X^{000} — горизонтально, положительную ось Y^{000} по линіи наибольшаго ската внизъ, положительную ось Z^{000} направимъ перпендикулярно къ наклонной плоскости и притомъ вверхъ.

Здѣсь:

$$X=0, \quad Y=mg \sin J, \quad Z=-mg \cos J,$$

а уравненіе поверхности есть $z=0$; поэтому формула (366) дастъ слѣдующую величину для реакціи по положительной оси Z^{000} .

$$R=\lambda=mg \cos J.$$

Дифференціальныя уравненія движенія будутъ слѣдующія:

$$x''=-\frac{kg \cos J}{v} x', \quad y''=g \sin J - \frac{kg \cos J}{v} y';$$

они тождественны съ дифференціальными уравненіями движенія свободной тяжелой материальной точки въ вертикальной плоскости, если ускореніе силы тяжести равно $g \sin J$ и если движеніе происходитъ въ средѣ, оказывающей сопротивленіе постоянной величины $mk g \cos J$. Рѣшеніе такой задачи приведено на страницахъ 143—144 этой книги; применяя это рѣшеніе къ нашему примѣру, надо замѣнить: g — черезъ $g \sin J$, а k — черезъ $k \cot g J$.

§ 47. Дифференціальныя уравненія, получающіяся чрезъ проэктированіе силъ и ускоренія на направленіе скорости, на нормаль къ поверхности и на бинормаль нормального сѣченія.

Въ нѣкоторыхъ вопросахъ о движеніи точки по неподвижной поверхности оказывается полезною слѣдующая форма дифференціальныхъ уравненій:

$$m \frac{dv}{dt} = F \cos (F, v) - k \sqrt{N^2} \dots \dots \dots (367, a)$$

$$\pm m \frac{v^2}{g} = F \cos (F, B) \dots \dots \dots (367, b)$$

$$mv^2 R = F \cos (F, N) + \mathfrak{R}; \dots \dots \dots (367, c)$$

гдѣ N означаетъ направленіе положительной нормали, \mathfrak{R} — реакцію по этой нормали, B направленіе, перпендикулярное къ v и N , и имѣющее то же самое положеніе по отношенію къ направленіямъ v и N , какое имѣетъ положительная ось Y^{000} по отношенію къ положительнымъ осямъ X^{000} (v) и Z^{000} (N); R есть кривизна нормального сѣченія, проведеннаго черезъ направленіе скорости v ; отношеніе $(1:g)$ есть геодезическая кривизна траекторіи.

Дифференціальныя уравненія (367) получаютъ изъ равенствъ, выражающихъ, что проэція ускоренія движущейся точки на каждое изъ направленій v , B , N равняется, дѣленной на массу точки, проэції на то же направленіе равнодѣйствующей всѣхъ силъ, приложенныхъ къ точкѣ; изъ числа этихъ силъ, реакція направлена по N (или противоположно), а треніе — противоположно скорости. Въ самомъ дѣлѣ, проэція ускоренія на эти направленія выразятся такъ:

$$\dot{v} \cos (\dot{v}, v) = \frac{dv}{dt}, \quad \dot{v} \cos (\dot{v}, B) = \frac{v^2}{\rho} \cos (\rho, B)$$

$$\dot{v} \cos (\dot{v}, N) = \frac{v^2}{\rho} \cos (\rho, N),$$

гдѣ ρ означаетъ величину и направленіе радіуса кривизны траекторіи.

Но намъ извѣстно, что:

$$\frac{\cos (\rho, N)}{\rho} = \mathfrak{R} \dots \dots \dots (294 \text{ bis})$$

(см. § 36 формулы (293) и (294)).

Далѣе, $\cos(\rho, B) = \pm \sin(\rho, N)$; гдѣ верхній знакъ долженъ быть въ тѣхъ случаяхъ, когда направленіе ρ составляетъ съ направленіемъ B острый уголъ; намъ же извѣстно (§ 43), что:

$$\frac{\sin(\rho, N)}{\rho} = \frac{1}{g}, \dots \dots \dots (324)$$

а потому:

$$\dot{v} \cos(\dot{v}, B) = \pm \frac{v^2}{g}; \quad \dot{v} \cos(\dot{v}, N) = v^2 \mathfrak{K}$$

Примѣчаніе: Исключивъ величину ρ изъ равенствъ (294 bis) и (324), получимъ слѣдующее выраженіе геодезической кривизны:

$$\frac{1}{g} = \mathfrak{K} \operatorname{tg}(\rho, N), \dots \dots \dots (368)$$

поэтому дифференціальное уравненіе (367, b) можно писать и такъ:

$$\pm m v^2 \mathfrak{K} \operatorname{tg}(\rho, N) = F \cos(F, B) \dots (367, b, \text{bis})$$

Этими уравненіями воспользуемся въ слѣдующемъ примѣрѣ.

Примѣръ 29. Движеніе матеріальной точки по какой либо неподвижной поверхности, предполагая, что, за исключеніемъ нормальной реакціи и тренія, никакихъ другихъ силъ не приложено къ точкѣ.

Въ этомъ случаѣ $F=0$, а потому изъ уравненія (367, b, bis) будетъ слѣдовать:

$$\operatorname{tg}(\rho, N) = 0,$$

то есть, что плоскость кривизны траекторіи проходитъ черезъ нормаль; значить траекторія есть геодезическая линия.

Уравненіе (367, c) получитъ слѣдующій видъ:

$$\mathfrak{N} = m v^2 \mathfrak{K} = \pm \frac{m v^2}{g},$$

а потому уравненіе (367, a) приметъ слѣдующій видъ:

$$\frac{dv}{dt} = -k \frac{v^2}{\mathfrak{K}}, \dots \dots \dots (369)$$

гдѣ \mathfrak{K} есть величина радіуса кривизны нормального сѣченія.

Если v разсматривать, какъ функцію отъ s , то уравненіе (369) представится такъ:

$$\frac{d\left(\frac{v^2}{2}\right)}{ds} = -2k \frac{v^2}{\mathfrak{K}};$$

въ такомъ видѣ оно можетъ быть интегрируемо по s ; получимъ:

$$v^2 = v_0^2 e^{f(s)}; \quad f(s) = -2k \int_{s_0}^s \frac{ds}{R} \dots \dots \dots (370)$$

Изъ этого выраженія видно, что скорость точки непрерывно уменьшается, приближаясь къ нулю асимптотически; уменьшеніе это тѣмъ быстрое, чѣмъ болѣе коэффициентъ тренія и чѣмъ болѣе кривизна геодезической линіи.

§ 48. При изложеніи механики отдѣльной несвободной точки, приходится принимать въ расчетъ силовое дѣйствіе преграды на эту точку, состоящее изъ нормальной реакціи и тренія, приложенныхъ къ точкѣ; при этомъ мы задаемъ себѣ движеніе, или кинематическое состояніе поверхности, образующей преграду, не принимая во вниманіе того, что матеріальная точка оказываетъ, въ свою очередь, нѣкоторое силовое дѣйствіе на тѣла, образующія преграду.

Если, по характеру вопроса, окажется необходимымъ принять въ расчетъ это дѣйствіе, то мы встрѣтимся съ однимъ изъ вопросовъ, относящихся къ механикѣ системы точекъ, потому что намъ придется тогда разсматривать преграду не какъ кинематическое условіе, но какъ систему движущихся матеріальныхъ тѣлъ, или, по крайней мѣрѣ, какъ систему матеріальныхъ точекъ. Отсюда слѣдуетъ, что только при изложеніи механики системы точекъ представится настоятельная необходимость установить понятіе о силовомъ дѣйствіи матеріальной точки на преграду; но мы сдѣлаемъ это теперь.

На время предположимъ, что матеріальная точка m есть тѣло неизмѣримо-малыхъ размѣровъ.

При дѣйствіи преграды на точку m , одно изъ тѣлъ, образующихъ преграду, находится въ непосредственномъ прикосновеніи съ точкою m ; напримѣръ, если преграда образуется поверхностью непроницаемаго тѣла, то матеріальная точка m , когда она несвободна, находится въ непосредственномъ прикосновеніи съ этимъ тѣломъ, или, если матеріальная точка находится на одномъ концѣ твердаго стержня, а другой конецъ его находится въ неподвижной

точкѣ, вокругъ которой стержень можетъ вращаться, то матеріальная точка находится въ непосредственномъ прикосновеніи съ концомъ стержня. То тѣло преграды, которое находится въ непосредственномъ прикосновеніи съ несвободною матеріальною точкою, назовемъ тѣломъ B .

Пусть M есть та точка преграждающей поверхности, въ которой матеріальная точка m къ ней прикасается; эта точка M принадлежитъ тѣлу B .

Относительно силового дѣйствія точки m на преграду, въ аналитической механикѣ дѣлается предположеніе, что это дѣйствіе есть сила, приложенная къ точкѣ M тѣла B и направленная противоположно дѣйствію преграды на точку m .

Такимъ образомъ, взаимодѣйствія между преградой и точкою m рассматриваются, какъ противоположныя взаимодѣйствія между точкою m и точкою M тѣла B ; въ силу основнаго начала C (стр. 19) они суть силы равныя *).

Опредѣляя же матеріальную точку, какъ массу, сосредоточенную въ геометрической подвижной точкѣ, мы должны будемъ придать слѣдующую форму опредѣленію понятія «силовомъ дѣйствіи точки m на преграду».

§ 49. Дѣйствіе матеріальной точки на преграду. Давленіе точки на поверхность.

Опредѣленіе. Дѣйствіе матеріальной точки m на преграду есть сила, приложенная къ той точкѣ M преграждающей поверхности, съ которою m совпадаетъ; предполагается, что точка M

*) Съ точки зрѣнія молекулярной физики, взаимодѣйствіе между двумя тѣлами A и B (черт. 20), являющееся при ихъ прикосновеніи есть результатъ молекулярныхъ взаимодѣйствій между каждою такою частицею α тѣла A и каждою такою частицею β тѣла B , расстояние между которыми не болѣе радіуса дѣйствія частичныхъ силъ. Въ дѣйствіе крайней малости этого радіуса, взаимодѣйствіе между тѣлами, прикасающимися въ одной точкѣ K , приводится къ взаимодѣйствію между весьма малыми частями α и β этихъ тѣлъ. Кроме того, такъ какъ молекулярныя силы взаимодѣйствія между каждою парюю частицъ предполагаются равными и прямо противоположными, то и взаимодѣйствія между α и β оказываются равными и прямо противоположными.

есть вместе съ тѣмъ одна изъ точекъ одного изъ тѣлъ, образующихъ преграду.

Сила, приложенная къ точкѣ M , состоитъ: изъ давленія точки m на поверхность, равнаго и противоположнаго реакціи по нормали, и изъ силы тренія, равной и противоположной силѣ тренія, приложенной къ точкѣ m .

Реакція удерживающей поверхности можетъ быть направлена только по положительной нормали (§ 45), поэтому давленіе матеріальной точки на такую поверхность можетъ быть направлено только по отрицательной нормали.

Полная величина силы дѣйствія матеріальной точки на поверхность равна:

$$D = \sqrt{N^2 + x^2 N^2} = N\sqrt{1 + x^2}; \dots\dots\dots (371)$$

направленіе ея составляетъ съ нормалью уголъ, тангенсъ котораго равенъ x . Величина x равняется коэффициенту тренія k , если точка движется по поверхности; если же точка покоится на поверхности, то x можетъ получать величинамъ, заключающимся въ предѣлахъ отъ нуля до k_1 (§ 46).

§ 50. Дифференціальныя уравненія движенія матеріальной точки, свобода движенія которой ограничена двумя пересѣкающимися поверхностями.

Если обѣ поверхности — удерживающія, то матеріальная точка можетъ имѣть движеніе только по линіи пересѣченія поверхностей, а, слѣдовательно, скорость точки будетъ направлена по касательной къ этой кривой линіи.

Пусть:

$$f_1(x, y, z, t) = 0 \dots\dots\dots (372)$$

$$f_2(x, y, z, t) = 0 \dots\dots\dots (373)$$

суть уравненія поверхностей; положимъ, что нѣтъ тренія между матеріальною точкою и поверхностями и что X, Y, Z суть проэкціи

на оси координат равнодѣйствующей изъ задаваемыхъ силъ, приложенныхъ къ точкѣ.

Кромѣ задаваемыхъ силъ, къ матеріальной точкѣ приложены еще нормальныя реакціи обѣихъ поверхностей.

Проекціи на оси координатъ реакціи первой поверхности суть:

$$\lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial x}, \quad \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial y}, \quad \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial z};$$

проекціи реакціи второй поверхности равны:

$$\lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial x}, \quad \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial y}, \quad \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial z}.$$

Въ силу основныхъ началъ (§ 14), дифференціальныя уравненія движенія этой матеріальной точки будутъ слѣдующія:

$$\left. \begin{aligned} m \frac{d^2x}{dt^2} &= X + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial x} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial x} \\ m \frac{d^2y}{dt^2} &= Y + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial y} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial y} \\ m \frac{d^2z}{dt^2} &= Z + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial z} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial z} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (374)$$

Для опредѣленія движенія точки можно поступить слѣдующимъ образомъ: исключить λ_1 и λ_2 изъ уравненій (374), вслѣдствіе чего получится одно дифференціальное уравненіе, не заключающее этихъ множителей; полученное уравненіе надо интегрировать, принимая во вниманіе, что x , y , z и t связаны уравненіями (372) и (373). Постоянныя произвольныя опредѣлятся по начальному положенію точки и по начальной скорости ея.

Для опредѣленія величинъ реакцій поверхностей, составимъ, изъ дифференціальныхъ уравненій (374), слѣдующія два уравненія:

$$\begin{aligned} \lambda_1 (\Delta f_1)^2 + \lambda_2 \Delta f_1 \Delta f_2 \cos(N_1, N_2) &= m \left(\frac{\partial f_1}{\partial x} x'' + \frac{\partial f_1}{\partial y} y'' + \frac{\partial f_1}{\partial z} z'' \right) - \\ &- \left(X \frac{\partial f_1}{\partial x} + Y \frac{\partial f_1}{\partial y} + Z \frac{\partial f_1}{\partial z} \right), \dots (375) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lambda_1 \Delta f_1 \cdot \Delta f_2 \cos(N_1, N_2) + \lambda_2 (\Delta f_2)^2 &= m \left(\frac{\partial f_2}{\partial x} x'' + \frac{\partial f_2}{\partial y} y'' + \frac{\partial f_2}{\partial z} z'' \right) - \\ &- \left(X \frac{\partial f_2}{\partial x} + Y \frac{\partial f_2}{\partial y} + Z \frac{\partial f_2}{\partial z} \right), \dots \dots (376) \end{aligned}$$

Видъ вторыхъ частей этихъ уравненій показываетъ, какимъ образомъ они получились изъ уравненій (374); N_1 и N_2 означаютъ направленія положительныхъ нормалей къ поверхностямъ (372) и (373).

Члены, заключающіе ускореніе, могутъ быть исключены изъ уравненій (375) и (376), если принять во вниманіе, что ускореніе точки должно удовлетворять условіямъ:

$$\frac{d^2 f_1}{dt^2} = 0, \quad \frac{d^2 f_2}{dt^2} = 0,$$

то есть равенствамъ:

$$\frac{\partial f_1}{\partial x} x'' + \frac{\partial f_1}{\partial y} y'' + \frac{\partial f_1}{\partial z} z'' + Kf_1 = 0. \dots\dots\dots (377)$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x} x'' + \frac{\partial f_2}{\partial y} y'' + \frac{\partial f_2}{\partial z} z'' + Kf_2 = 0; \dots\dots\dots (378)$$

вслѣдствіе этого, уравненія (375) и (376) получаютъ такой видъ:

$$\mathfrak{N}_1 + \mathfrak{N}_2 \cos(N_1, N_2) = - \frac{(mKf_1 + X \frac{\partial f_1}{\partial x} + Y \frac{\partial f_1}{\partial y} + Z \frac{\partial f_1}{\partial z})}{\Delta f_1}. \quad (379, a)$$

$$\mathfrak{N}_1 \cos(N_1, N_2) + \mathfrak{N}_2 = - \frac{(mKf_2 + X \frac{\partial f_2}{\partial x} + Y \frac{\partial f_2}{\partial y} + Z \frac{\partial f_2}{\partial z})}{\Delta f_2}, \quad (379, b)$$

гдѣ:

$$\mathfrak{N}_1 = \lambda_1 \Delta f_1, \quad \mathfrak{N}_2 = \lambda_2 \Delta f_2.$$

Если первая поверхность есть неудерживающая, то матерьяльная точка не оставляетъ ее, пока реакція \mathfrak{N}_1 имѣетъ величину положительную (т.-е. направлена по положительной нормали N_1); въ той точкѣ кривой линіи, въ которой реакція \mathfrak{N}_1 обращается въ нуль, а при дальнѣйшемъ движеніи по кривой должна была бы стать отрицательною, въ такой точкѣ кривой линіи матерьяльная точка оставляетъ первую поверхность и кривую линію, не сходя со второй поверхности; при дальнѣйшемъ движеніи матерьяльной точки, λ_1 равно нулю.

Если обѣ поверхности неудерживающія, то матерьяльная точка можетъ оставить и ту и другую.

§ 51. Законъ живой силы для матерьяльной точки, движущейся по кривой линіи.

Изъ дифференціальныхъ уравненій (374) составимъ уравненіе:

$$d\left(\frac{m}{2}v^2\right) = Xx + Yy + Zz' + \lambda_1\left(\frac{\partial f_1}{\partial x}x + \frac{\partial f_1}{\partial y}y' + \frac{\partial f_1}{\partial z}z'\right) + \lambda_2\left(\frac{\partial f_2}{\partial x}x' + \frac{\partial f_2}{\partial y}y' + \frac{\partial f_2}{\partial z}z'\right).$$

Если кривая неподвижна, то есть, если уравненія (372) и (373) не заключаютъ времени явнымъ образомъ, то тогда условія:

$$\frac{df_1}{dt} = 0 \quad \frac{df_2}{dt} = 0$$

выразятся такъ:

$$\frac{\partial f_1}{\partial x}x' + \frac{\partial f_1}{\partial y}y' + \frac{\partial f_1}{\partial z}z' = 0, \quad \frac{\partial f_2}{\partial x}x' + \frac{\partial f_2}{\partial y}y' + \frac{\partial f_2}{\partial z}z' = 0,$$

и тогда первое уравненіе настоящаго параграфа получить видъ уравненія (111) параграфа 21-го.

Разсуждая далѣе такъ же, какъ въ § 26, придемъ къ слѣдующему заключенію:

Если матерьяльная точка находится на неподвижной кривой линіи неизмѣняемаго вида и если приложенныя къ ней заваемыя силы имѣютъ потенціалъ, то движеніе точки подчиняется закону живой силы.

§ 52. Реакція неподвижной кривой линіи, удерживающей матерьяльную точку на себѣ. Давленіе точки на кривую.

Когда удерживающая кривая неподвижна, тогда то самое дифференціальное уравненіе, которое получается по исключеніи множителей λ_1 и λ_2 изъ уравненій (374), составитъ прямо, если выразимъ, что произведеніе изъ массы точки и проекціи

ускоренія на направленіе скорости равняется проеціи на то же направленіе равнодѣйствующей изъ задаваемыхъ силъ; получимъ:

$$m \frac{dv}{dt} = F \cos (F, v) * \dots \dots \dots (380, a)$$

Выраженія (379, а, b) тоже могутъ быть составлены прямо; они выражаютъ проеціи на направленія нормалей N_1 и N_2 равнодѣйствующей изъ реакцій \mathcal{R}_1 и \mathcal{R}_2 ; означимъ черезъ \mathfrak{P} величину и направленіе этой равнодѣйствующей.

Составимъ равенство, выражающее, что сумма проецій всѣхъ силъ, приложенныхъ къ точкѣ, на направленіе радіуса кривизны кривой равняется проеціи ускоренія на то же направленіе, помноженной на массу точки:

$$m \frac{v^2}{\rho} = F \cos (F, \rho) + \mathfrak{P} \cos (\mathfrak{P}, \rho) \dots \dots \dots (380, b)$$

Кромѣ того, сумма проецій тѣхъ же силъ на направленіе бинормали равна нулю, такъ какъ бинормаль или вторая главная нормаль перпендикулярна къ плоскости кривизны кривой, а ускореніе движущейся точки заключается въ плоскости кривизны.

$$0 = F \cos (F, b) + \mathfrak{P} \cos (\mathfrak{P}, b); \dots \dots \dots (380, c)$$

направленіе бинормали b предполагается здѣсь проведеннымъ въ ту сторону, въ которую была бы направлена положительная ось $Z^{o\alpha}$, если бы положительная ось $X^{o\alpha}$ имѣла направленіе скорости, а положительная ось $Y^{o\alpha}$ направленіе главной нормали (черт. 21).

Такъ какъ \mathfrak{P} заключается въ нормальной плоскости къ кривой, то какъ величина, такъ и направленіе ея вполне опредѣляются изъ равенствъ (380, b, c).

Черезъ одну и ту же кривую линію можно провести безчисленное множество поверхностей и эта кривая можетъ быть разсматриваема, какъ линія пересѣченія которыхъ либо двухъ изъ нихъ.

*) Предоставляемъ читателю убѣдиться, что дифференціальное уравненіе (380, a) есть то самое, которое, въ случаѣ неподвижности кривой, получается изъ дифференціального уравненія (374) послѣ исключенія множителей λ_1 и λ_2 .

Если обѣ поверхности, выражаемыя уравненіями (372) (373) — удерживающія, то мы можемъ замѣнить ихъ двумя другими поверхностями, проходящими черезъ ту же кривую линію и такихъ шаръ поверхностей — безчисленное множество.

Какъ дифференціальное уравненіе (380, а), такъ и равенства (380, b, c), совершенно не зависятъ отъ вида этихъ поверхностей, поэтому можно, оставивъ въ сторонѣ всякія разсужденія, относящіяся къ этимъ поверхностямъ, предположить, что сама кривая линія удерживаетъ на себѣ матеріальную точку, оказывая реакцію \mathfrak{P} тѣмъ причинамъ, которыя побуждаютъ матеріальную точку сойти съ этой кривой.

Интегрируя дифференціальное уравненіе (380, а), опредѣлимъ движеніе точки по кривой; изъ равенствъ же (380, b, c) опредѣлится *реакція \mathfrak{P} кривой линіи*, заключающаяся въ нормальной плоскости кривой.

Означимъ черезъ F_n величину и направленіе проекціи силы F на нормальную плоскость; величина ея равна:

$$F_n = F \sin (F, v),$$

а проекціи ея на направленія ρ и b равны проекціямъ силы F на тѣ же направленія; поэтому равенства (380, b, c) можно представить такъ:

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{P} \cos (\mathfrak{P}, \rho) &= m \frac{v^2}{\rho} - F_n \cos (F_n, \rho) \\ \mathfrak{P} \cos (\mathfrak{P}, b) &= - F_n \cos (F_n, b) \end{aligned} \right\} \dots \dots (381)$$

Реакція \mathfrak{P} есть сила дѣйствія кривой линіи на матеріальную точку m , приложенная къ этой точкѣ; обратно, силовое дѣйствіе точки m на кривую линію, такъ называемое *давленіе матеріальной точки на кривую линію*, предполагается приложеннымъ къ той точкѣ M кривой, въ которой M находится и предполагается равнымъ и противоположнымъ реакціи \mathfrak{P} .

Поэтому давленіе также заключается въ нормальной плоскости,

ускоренія на направленіе скорости равняется проекціи на то же направленіе равнодѣйствующей изъ задаваемыхъ силъ; получимъ:

$$m \frac{dv}{dt} = F \cos (F, v) *) \dots \dots \dots (380, a)$$

Выраженія (379, а, b) тоже могутъ быть составлены прямо; они выражаютъ проекціи на направленія нормалей N_1 и N_2 равнодѣйствующей изъ реакцій \mathfrak{N}_1 и \mathfrak{N}_2 ; означимъ черезъ \mathfrak{P} величину и направленіе этой равнодѣйствующей.

Составимъ равенство, выражающее, что сумма проекцій всѣхъ силъ, приложенныхъ къ точкѣ, на направленіе радіуса кривизны кривой равняется проекціи ускоренія на то же направленіе, помноженной на массу точки:

$$m \frac{v^2}{\rho} = F \cos (F, \rho) + \mathfrak{P} \cos (\mathfrak{P}, \rho) \dots \dots \dots (380, b)$$

Кромѣ того, сумма проекцій тѣхъ же силъ на направленіе бинормали равна нулю, такъ какъ бинормаль или вторая главная нормаль перпендикулярна въ плоскости кривизны кривой, а ускореніе движущейся точки заключается въ плоскости кривизны.

$$0 = F \cos (F, b) + \mathfrak{P} \cos (\mathfrak{P}, b); \dots \dots \dots (380, c)$$

направленіе бинормали b предполагается здѣсь проведеннымъ въ ту сторону, въ которую была бы направлена положительная ось Z''' , если бы положительная ось X''' имѣла направленіе скорости, а положительная ось Y''' направленіе главной нормали (черт. 21).

Такъ какъ \mathfrak{P} заключается въ нормальной плоскости къ кривой, то какъ величина, такъ и направленіе ея вполне опредѣляются изъ равенствъ (380, b, c).

Черезъ одну и ту же кривую линію можно провести безчисленное множество поверхностей и эта кривая можетъ быть разсматриваема, какъ линія пересѣченія которыхъ либо двухъ изъ нихъ.

*) Предоставляемъ читателю убѣдиться, что дифференціальное уравненіе (380, а) есть то самое, которое, въ случаѣ неподвижности кривой, получается изъ дифференціального уравненія (374) послѣ исключенія множителей λ_1 и λ_2 .

Если объ поверхности, выражаемая уравненіями (372) (373) — удерживающія, то мы можем замѣнить ихъ двумя другими поверхностями, проходящими черезъ ту же кривую линію и такихъ паръ поверхностей — безчисленное множество.

Какъ дифференціальное уравненіе (380, а), такъ и равенства (380, b, c), совершенно не зависятъ отъ вида этихъ поверхностей, поэтому можно, оставивъ въ сторонѣ всякія разсужденія, относящіяся къ этимъ поверхностямъ, предположить, что сама кривая линія удерживаетъ на себѣ матеріальную точку, оказывая реакцію \mathfrak{P} тѣмъ причинамъ, которыя побуждаютъ матеріальную точку сойти съ этой кривой.

Интегрируя дифференціальное уравненіе (380, а), опредѣлимъ движеніе точки по кривой; изъ равенствъ же (380, b, c) опредѣлится *реакція \mathfrak{P} кривой линіи*, заключающаяся въ нормальной плоскости кривой.

Означимъ черезъ F_n величину и направленіе проэкціи силы F на нормальную плоскость; величина ея равна:

$$F_n = F \sin (F, v),$$

а проэкціи ея на направленія ρ и b равны проэкціямъ силы F на тѣ же направленія; поэтому равенства (380, b, c) можно представить такъ:

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{P} \cos (\mathfrak{P}, \rho) &= m \frac{v^2}{\rho} - F_n \cos (F_n, \rho) \\ \mathfrak{P} \cos (\mathfrak{P}, b) &= - F_n \cos (F_n, b) \end{aligned} \right\} \dots \dots (381)$$

Реакція \mathfrak{P} есть сила дѣйствія кривой линіи на матеріальную точку m , приложенная къ этой точкѣ; обратно, силовое дѣйствіе точки m на кривую линію, такъ называемое *давленіе матеріальной точки на кривую линію*, предполагается приложеннымъ къ той точкѣ M кривой, въ которой M находится и предполагается равнымъ и противоположнымъ реакціи \mathfrak{P} .

Поэтому давленіе также заключается въ нормальной плоскости,

а величина и направление его опредѣляется по слѣдующимъ формуламъ:

$$\left. \begin{aligned} D \cos(D, \rho) &= F_n \cos(F_n, \rho) - m \frac{v^2}{\rho} \\ D \cos(D, b) &= F_n \cos(F_n, b) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (382)$$

Эти формулы выражаютъ, что давленіе *D* есть равнодѣйствующая изъ силы F_n (проекции силы F на нормальную плоскость), и изъ силы $m \frac{v^2}{\rho}$, направленной противоположно главной нормали.

Эта, направленная отъ центра кривизны кривой, сила представляетъ ту часть давленія точки на кривую, которая производится стремленіемъ матеріальной точки сохранить направленіе своего движенія: сила эта называется *центробѣжной силой*.

Реакція неподвижной кривой линіи есть равнодѣйствующая изъ силы равной и противоположной силѣ F_n и изъ силы, равной и противоположной центробѣжной силѣ.

(На чертежѣ 21 изображены: сила F_n линіею MF_n , противоположная ей — линіею MQ ; центробѣжная сила — линіею $M\bar{C}$; сила, противоположная центробѣжной, изображена линіею \overline{MK}).

§ 53. Примеры рѣшенія вопросовъ о движеніи матеріальной точки по данной кривой линіи.

Примѣръ 30-й. Матеріальная точка движется по какой либо неподвижной кривой линіи, касательная къ которой измѣняетъ свое направленіе непрерывнымъ образомъ вдоль по всей кривой; никакихъ силъ, кромѣ реакціи кривой, не приложено къ точкѣ.

Въ этихъ случаяхъ движеніе удовлетворяетъ закону живой силы, а потому v имѣетъ постоянную величину; далѣе, легко найдемъ: $s = s_0 + v_0 t$, если движеніе направлено въ сторону возрастающихъ s .

Давленіе точки на кривую приводится здѣсь къ одной только центробѣжной силѣ, которая, вслѣдствіе постоянства скорости, обратно пропорціональна радіусу кривизны.

Примѣръ 31-й. По какой либо кривой линіи движется матеріальная точка, къ которой приложена сила, направленная по

касательной, и стремящаяся приблизить движущуюся точку въ некоторой точкѣ S_0 кривой; величина силы пропорціональна величинѣ разстоянія движущейся точки отъ точки S_0 .

Дифференціальное уравненіе (38¹), а) получить здѣсь слѣдующій видъ:

$$m \frac{dv}{dt} = -m\mu^2 s, \text{ когда } v = \frac{ds}{dt}$$

$$m \frac{dv}{dt} = m\mu^2 s, \text{ когда } v = -\frac{ds}{dt};$$

такъ что, во всякомъ случаѣ:

$$\frac{d^2 s}{dt^2} = -m\mu^2 s.$$

Интегралы этого дифференціального уравненія:

$$v^2 = \mu^2 (q^2 - s^2); \quad q^2 = s_0^2 + \frac{v_0^2}{\mu^2},$$

$$s = q \sin(\mu t + c), \quad c = \arcsin \frac{s_0}{q};$$

(см. стр. 66, примѣръ 8-й).

Давленіе матеріальной точки на кривую и здѣсь приводится къ одной центр.бѣжной силѣ.

Примѣръ 32-й. Движеніе тяжелой точки по циклоидѣ, заключающейся въ вертикальной плоскости XU , и расположенной такъ, какъ показано на чертежахъ 11 и 31 кинематической части; положительная ось Uoz выѣтъ направленіе силы тяжести.

Уравненія кривой (см. стр. 14 кинематической части):

$$x = R(\omega + \sin \omega), \quad y = R(1 + \cos \omega).$$

Такъ какъ потенциалъ силы тяжести $U = mgy$, то выраженіе закона живой силы будетъ, въ этомъ случаѣ, слѣдующее:

$$v^2 - v_0^2 = 2gR(\cos \omega - \cos \omega_0),$$

или:

$$v^2 - v_0^2 = 4gR \left(\sin^2 \frac{\omega_0}{2} - \sin^2 \frac{\omega}{2} \right).$$

или

$$v^2 - v_0^2 = \frac{g}{4R} (s_0^2 - s^2), \dots\dots\dots (383)$$

(см. стр. 53 и 54 кинематической части).

Равенству (383) дадимъ видъ:

$$v = \frac{ds}{dt} = \sqrt{\frac{g}{4R}} \sqrt{q^2 - s^2}; \quad q^2 = s_0^2 + \frac{4Rv_0^2}{g};$$

интегрируя это уравненіе, получимъ:

$$s = q \sin\left(t \sqrt{\frac{g}{4R}} + c\right); \quad c = \arcsin \frac{s_0}{q} \dots\dots\dots (384)$$

Давленіе на кривую состоитъ изъ центробѣжной силы и проэкціи силъ тяжести на нормаль къ кривой:

$$D = m \left(\frac{v_0^2}{\rho} + g \cos(N, Y) \right),$$

гдѣ N означаетъ направленіе нормали, проведенной въ выпуклую сторону циклоиды.

По свойству циклоиды, уголъ (N, Y) равенъ $\frac{\omega}{2}$ (см. стр. 54 и черт. 31 кинематической части) и радіусъ кривизны вдвое больше длины \overline{MN} (см. тотъ-же чертежъ);

$$\overline{MN} = 2R \cos \frac{\omega}{2}, \quad \rho = 4R \cos \frac{\omega}{2}.$$

Такъ какъ:

$$\cos \frac{\omega}{2} = \frac{\sqrt{16R^2 - s^2}}{4R},$$

то D выразится въ s слѣдующимъ образомъ:

$$D = \frac{mg}{4R} \frac{q^2 + 16R^2 - s^2 - s_0^2}{\sqrt{16R^2 - s^2}}.$$

Изъ выраженія (384) видно, что тяжелая матеріальная точка совершаетъ періодическое колебательное движеніе по циклоидѣ, отклоняясь на разстоянія $+q$ и $-q$ отъ нижней точки циклоиды; время T , потребное для

перехода точки изъ положенія $s = +q$ въ положеніе $s = -q$, или для обратнаго движенія, не зависить отъ величины q и равно

$$T = \pi \sqrt{\frac{4R}{g}}.$$

Примѣръ 33-й. Движеніе матеріальной тяжелой точки по удерживающей окружности, заключающейся въ вертикальной плоскости.

Возьмемъ центръ окружности за начало координатъ, ось Y^{ox} направимъ вертикально внизъ, ось X^{ox} горизонтально въ плоскости круга.

По закону живой силы:

$$v^2 = (2gy + v_0^2 - 2gy_0),$$

или

$$v^2 = 2g(y - b), \dots \dots \dots (385)$$

гдѣ:

$$b = y_0 - H, \quad H = \frac{v_0^2}{2g}.$$

Величины H и b имѣютъ слѣдующія значенія. Если представить себѣ, что свободная тяжелая матеріальная точка будетъ брошена снизу вверхъ съ начальною скоростью v_0 , то она поднимется на высоту H надъ тѣмъ уровнемъ, съ котораго она была брошена; если этотъ начальный уровень былъ $y = y_0$, то свободная тяжелая точка, брошенная вверхъ со скоростью v_0 , поднимется до уровня $y = b$.

Если этотъ уровень пересѣкаетъ окружность (т.-е. если $b > -R$), то скорость обращается въ нуль въ точкахъ пересѣченія, какъ видно изъ уравненія (385); движеніе совершается только по той части окружности, которая ниже уровня $y = b$.

Если же этотъ уровень не пересѣкаетъ окружности (т.-е. если $b < -R$), то скорость движущейся точки не обращается въ нуль ни въ какой точкѣ окружности; въ самомъ дѣлѣ, положимъ:

$$b = -R - l,$$

гдѣ l болѣе нуля, тогда уравненіе (385) получить слѣдующій видъ:

$$v^2 = 2g(y + R + l),$$

а отсюда уже ясно видно, что v^2 не обращается въ нуль, пока точка

остается на окружности. Въ этихъ случаяхъ движеніе совершается по всей окружности безъ остановокъ и безъ перемѣны направле- нія скорости.

Эти два рода случаевъ рассмотримъ отдѣльно.

I. $b > -R$.

Означимъ черезъ φ уголъ, составляемый радіусомъ векторомъ движущейся точки съ положительною осью $Y^{овъ}$, тогда уравненіе (385) получитъ слѣдующій видъ:

$$R^2 \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = 2g(R \cos \varphi - b), \dots\dots\dots (386)$$

или:

$$R^2 \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = 2gR (\cos \varphi - \cos \beta) = 4gR \left(\sin^2 \frac{\beta}{2} - \sin^2 \frac{\varphi}{2}\right),$$

гдѣ:

$$\cos \beta = \frac{b}{R}.$$

Такъ какъ уголъ φ не можетъ быть болѣе β и не можетъ быть менѣе $(-\beta)$, то выразимъ синусъ половины этого угла слѣ- дующимъ образомъ:

$$\sin \frac{\varphi}{2} = \sin \frac{\beta}{2} \sin \eta; \dots\dots\dots (387)$$

тогда будетъ:

$$\cos \frac{\varphi}{2} \cdot \frac{d\varphi}{dt} = 2 \sin \frac{\beta}{2} \cos \eta \cdot \frac{d\eta}{dt}, \dots\dots\dots (388)$$

дифференціальное же уравненіе (386) получитъ, послѣ надлежа- щихъ сокращеній, слѣдующій видъ:

$$\frac{\left(\frac{d\eta}{dt}\right)^2}{\left(1 - \sin^2 \frac{\beta}{2} \sin^2 \eta\right)} = \frac{g}{R},$$

или по извлеченіи корня и по отдѣленіи переменныхъ:

$$\pm \frac{d\eta}{\sqrt{1 - \sin^2 \frac{\beta}{2} \sin^2 \eta}} = dt \sqrt{\frac{g}{R}} \dots\dots\dots (389)$$

Корень, находящийся въ знаменателѣ первой части, не обращается въ нуль ни при какихъ дѣйствительныхъ величинахъ η , если только $\beta < \pi$, а потому этотъ корень долженъ сохранять свой знакъ во все время движенія; изъ этого слѣдуетъ, что и знакъ дифференциала $d\eta$ остается, во все время движенія, постояннымъ; знакъ этотъ опредѣлится изъ равенства (388), примененнаго къ начальному моменту.

Въ это равенство входитъ, однако, нѣкоторая величина, которой мы можемъ придать знакъ плюсъ или минусъ, по желанію, это именно:

$$\cos \eta_0 = \sqrt{1 - \frac{\sin^2 \varphi_0}{\sin^2 \frac{\beta}{2}}};$$

если же мы условимся придавать этой величинѣ тотъ же самый знакъ, какой имѣетъ величина φ_0' , то тогда знакъ величины η_0' , слѣдовательно и производной η' будетъ во всѣхъ случаяхъ и всегда — положительный; тотъ же самый знакъ долженъ будетъ имѣть и корень знаменателя первой части дифференціального уравненія (389).

И такъ:

$$\eta_0 < \frac{\pi}{2}, \text{ если } \varphi_0' > 0,$$

$$\eta_0 > \frac{\pi}{2}, \text{ если } \varphi_0' < 0;$$

уголъ η непрерывно возрастаетъ отъ своего начального значенія и законъ возрастанія выражается равенствомъ:

$$t = \sqrt{\frac{R}{g}} \int_{\eta_0}^{\eta} \frac{d\eta}{\sqrt{1 - \sin^2 \frac{\beta}{2} \sin^2 \eta}}, \dots\dots (390)$$

или:

$$t = \sqrt{\frac{R}{g}} (F(\eta, \sin \frac{\beta}{2}) - F(\eta_0, \sin \frac{\beta}{2})), \dots\dots (391)$$

гдѣ $F(\eta, k)$ есть тотъ самый интегралъ (формула (346)), который

встрѣтился намъ при рѣшеніи примѣра 27-го; разница заключается только въ выраженіи величины k , которая здѣсь равняется $\sin \frac{\beta}{2}$.

Въ примѣрѣ 27-мъ были доказаны нѣкоторыя свойства интеграла $F(\eta, k)$, а затѣмъ, на основаніи этихъ свойствъ, оказалось возможнымъ получить понятіе о періодическомъ характерѣ движенія; то же самое можетъ быть сдѣлано и здѣсь.

Изъ формулы (387) видно, что слѣдующимъ величинамъ η соотвѣтствуютъ слѣдующія величины φ :

$$\text{когда } \eta = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi, \frac{5\pi}{2}, 3\pi, \frac{7\pi}{2}, \dots$$

$$\text{тогда } \varphi = 0, \beta, 0, -\beta, 0, \beta, 0, -\beta, \dots$$

а такъ какъ φ измѣняется непрерывно, то радіусъ векторъ точки совершаетъ качанія, отклоняясь на уголъ β въ положительную сторону и на такой же уголъ — въ отрицательную.

Изъ того свойства интеграла (346), которое выражается равенствомъ:

$$F(\eta + \pi, k) = F(\eta, k) + F(\pi, k). \dots \dots \dots (348)$$

слѣдуетъ, что переходъ точки изъ одного крайняго положенія B (черт. 22) въ другое B_1 , или обратный переходъ изъ B_1 въ B , совершается въ теченіи промежутка времени

$$T = \sqrt{\frac{R}{g}} F\left(\pi, \sin \frac{\beta}{2}\right). \dots \dots \dots (392)$$

и что такое же время потребно для движенія отъ середины дуги S_0 до одной изъ крайнихъ точекъ и обратно въ S_0 .

Изъ свойства, выражаемаго равенствомъ

$$F(\pi, k) = 2F\left(\frac{\pi}{2}, k\right), \dots \dots \dots (349)$$

слѣдуетъ, что матеріальная точка совершаетъ переходъ отъ точки S_0 до одной изъ крайнихъ точекъ въ теченіи времени $\frac{T}{2}$; столько же времени требуетъ и обратное движеніе.

Далѣ, изъ свойства (348) и на основаніи формулъ (387) и (391) слѣдуетъ, что, если въ нѣкоторый моментъ времени радиусъ векторъ OM (черт. 22) отклоненъ на уголъ φ отъ вертикальной линіи, то, по истеченіи промежутка времени, равнаго T , онъ будетъ отклоненъ на уголъ $(-\varphi)$, то есть, на тотъ же самый уголъ, но по другую сторону отъ вертикальной линіи; значить, въ теченіи этого промежутка времени, матеріальная точка совершитъ движеніе отъ M къ B и отъ B къ M_1 или отъ M къ B_1 и отъ B_1 къ M_1 .

Величина промежутка времени T , называемая продолжительностью размаха круговаго маятника, вычисляется по формулѣ:

$$T = 2 \sqrt{\frac{R}{g}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\frac{d\eta}{1 - \sin^2 \frac{\beta}{2} \sin^2 \eta}} \dots \dots \dots (393)$$

Принимая въ подынтегральной функціи слѣдующее разложеніе въ рядъ:

$$(1 - x^2)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2} x^2 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} x^4 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} x^6 + \dots \dots \dots$$

(гдѣ x надо замѣнить произведеніемъ $\sin \frac{\beta}{2} \sin \eta$), и принявъ во вниманіе, что:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} \eta d\eta = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2n} \frac{\pi}{2},$$

получимъ слѣдующее выраженіе для T :

$$T = \pi \sqrt{\frac{R}{g}} \left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \sin^2 \frac{\beta}{2} + \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^2 \sin^4 \frac{\beta}{2} + \dots \dots \dots \right] \dots (394)$$

При достаточно-маломъ β можно ограничиться двумя первыми членами этого ряда.

Если же уголъ этотъ столь малъ, что можно положить:

$$\sin \frac{\beta}{2} = \frac{\beta''}{2} \sin 1'',$$

гдѣ β'' означаетъ число секундъ, заключающееся въ этомъ углѣ, то T выразится такъ:

$$T = \pi \sqrt{\frac{R}{g}} \left(1 + \frac{(\beta'')^2}{16} \sin^2 1'' \right) \dots \dots \dots (395)$$

II. $b < -R$.

Положимъ $b = -R - l$, тогда уравненіе живой силы получить слѣдующій видъ:

$$v^2 = 2g(R \cos \varphi + R + l),$$

или:

$$R^2 \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 = 2g(2R + l - 2R \sin^2 \frac{\varphi}{2});$$

отсюда, по извлеченіи корня, по отдѣленіи переменныхъ и по интегрированіи, получимъ:

$$t = \pm \frac{2R}{\sqrt{2g(2R+l)}} \int_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{d\left(\frac{\varphi}{2}\right)}{\sqrt{1 - \frac{2R}{2R+l} \sin^2 \frac{\varphi}{2}}}, \dots \dots (396)$$

гдѣ знакъ плюсъ долженъ быть взятъ въ тѣхъ случаяхъ, въ которыхъ начальная скорость направлена въ сторону увеличивающихся φ , а знакъ минусъ — въ случаяхъ противоположнаго направленія начальной скорости.

Изъ этого равенства видно, что уголъ φ непрерывно возрастаетъ или убываетъ и что возрастаніе угла φ на 2π совершается въ теченіи времени:

$$T = \frac{4R}{\sqrt{2g(2R+l)}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\eta}{\sqrt{1 - \frac{2R}{2R+l} \sin^2 \eta}}, \dots \dots (397)$$

такъ что въ теченіи этого времени точка пройдетъ всю окружность одинъ разъ.

III. $b = -R$.

Если положимъ $\beta = \pi$ въ случаяхъ I рода или $l = 0$ въ случаяхъ II рода, то получимъ формулы, выражающія движеніе, совершаемое матеріальною точкою въ томъ случаѣ, когда $b = -R$; такъ какъ

$$\int \frac{d\psi}{\cos \psi} = -\log \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\psi}{2} \right),$$

то равенство (396) получить, при $l = 0$, слѣдующій видъ:

$$t = \pm \sqrt{\frac{R}{g}} \log \left[\frac{\operatorname{tg} \left(\frac{\pi - \varphi_0}{4} \right)}{\operatorname{tg} \left(\frac{\pi - \varphi}{4} \right)} \right], \dots \dots \dots (398)$$

гдѣ верхній знакъ долженъ быть взятъ при $\varphi'_0 > 0$, нижній — при $\varphi'_0 < 0$.

Если $\varphi'_0 > 0$, то φ возрастаетъ; это возрастаніе становится все болѣе и болѣе медленнымъ, по мѣрѣ приближенія къ π , изъ (398) видно, что при $\varphi = \pi$, $t = \infty$.

Если $\varphi'_0 < 0$, то φ убываетъ и быстрота убыванія становится все менѣе, по мѣрѣ приближенія къ $(-\pi)$; изъ (398) видно, что тогда при $\varphi = -\pi$, $t = \infty$.

Во всякомъ случаѣ, при $b = -R$, движущаяся точка асимптотически приближается къ высшей точкѣ окружности.

Примѣръ 34. Кривая та же самая, что и въ предыдущемъ примѣрѣ, но она предполагается теперь неудерживающею для перемѣщеній матеріальной точки внутрь площади, ею ограничиваемой; опредѣлить мѣсто схода тяжелой матеріальной точки съ этой окружности и дальнѣйшее движеніе.

Согласно съ условіями, сдѣланными въ началѣ параграфа 34-го, напишемъ уравненіе неудерживающей кривой слѣдующимъ образомъ:

$$R^2 - (x^2 + y^2) = 0;$$

затѣмъ составимъ выраженіе для λ по формулѣ (317) (§ 40).

Здѣсь:

$$X=0, \quad Y=mg, \quad \frac{\partial f}{\partial x} = -2x, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -2y, \quad \Delta f = 2R,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -2, \quad Kf = -2v^2,$$

поэтому:

$$\lambda = m \frac{v^2 + gy}{2R^2} \dots \dots \dots (399)$$

Но движеніе точки удовлетворяетъ закону живой силы:

$$v^2 = 2g(y - b), \quad b = y_0 - H, \quad H = \frac{v_0^2}{2g},$$

а потому:

$$\lambda = m \frac{3g}{2R^2} \left(y - \frac{2}{3}b \right) \dots \dots \dots (400)$$

Изъ уравненія живой силы видно, что y не можетъ быть меньше b .

Поэтому, если $b > 0$, то разность $\left(y - \frac{2}{3}b \right)$ не можетъ быть меньше $\frac{1}{3}b$; слѣдовательно, при $b > 0$ точка движется по кривой линіи, не оставляя ея; если она прикрѣплена къ концу гибкой нерастяжимой нити, другой конецъ которой прикрѣпленъ къ началу координатъ, то нить остается натянутою во все время движенія; величина натяженія нити равна $2\lambda R$.

Если $b < 0$, но $\frac{2}{3}b > -R$, то λ обращается въ нуль при:

$$y_1 = \frac{2}{3}b,$$

(уровень $y = y_1$ ниже уровня $y = b$, если $b < 0$), а при дальнѣйшемъ движеніи точки по окружности, λ должно сдѣлаться отрицательнымъ; поэтому въ точкѣ окружности:

$$x_1 = \sqrt{R^2 - \frac{4}{9}b^2} \quad y_1 = \frac{2}{3}b$$

движущаяся точка оставить кривую и станет описывать некоторую параболу, касательную къ окружности въ этой точкѣ.

Опредѣлимъ видъ этой параболы и движеніе матеріальной точки послѣ того, какъ она оставитъ окружность.

Пусть t_1 есть моментъ времени, въ который движущаяся точка оставляетъ кривую; въ этотъ моментъ скорость движущейся точки имѣетъ слѣдующую величину и слѣдующее направленіе:

$$v_1 = \sqrt{-\frac{2}{3}gb} = \sqrt{-gy_1}, \quad \cos(v_1 X) = \frac{y_1}{R} = \frac{2}{3} \frac{b}{R}$$

$$\cos(v_1 Y) = -\frac{x_1}{R} = -\sqrt{1 - \frac{4}{9} \frac{b^2}{R^2}}.$$

Свободное движеніе точки будетъ слѣдующее:

$$x = x_1 + v_1 \frac{y_1}{R} (t - t_1)$$

$$y = y_1 - v_1 \frac{x_1}{R} (t - t_1) + g \frac{(t - t_1)^2}{2};$$

высшій уровень, до котораго она достигнетъ, будетъ ниже уровня $y=b$, а именно:

$$y_2 = y - \frac{v_1^2 \cos^2(v_1 X)}{2g} = b - \frac{4}{27} \frac{b^3}{R^2}$$

На чертежѣ 23-мъ линія B_1B изображаетъ уровень $y=b$, линія K_1K — уровень $y = \frac{2}{3}b$, точка C — высшую точку параболы, точка D — мѣсто встрѣчи параболы съ окружностью.

Если $b < 0$ и $\frac{2}{3}b < -R$, то тогда разность $(y - \frac{2}{3}b)$ остается положительною при всякомъ положеніи точки на окружности, и потому движущаяся точка нисдѣ не сойдетъ съ окружности.

Примѣръ 35. Та же окружность предполагается неудерживающею для перемѣщеній матеріальной точки внаружу круга; опредѣлить мѣсто схода тяжелой матеріальной точки.

Въ этомъ случаѣ уравненіе круга слѣдуетъ писать такъ:

$$x^2 + y^2 - R^2 = 0,$$

а потому:

$$\lambda = -m \frac{v^2 + gy}{2R^2} \dots \dots \dots (401)$$

Изъ этого выраженія прямо видно, что на нижней полусферѣ точка находится не можетъ.

Изъ выраженія же:

$$\lambda = -m \frac{3g}{2R^2} \left(y - \frac{2}{3} b \right)$$

можно заключить слѣдующее.

Если $y_0 < 0$ и притомъ $y_0 < \frac{2}{3} b$, то λ будетъ болѣе нуля до тѣхъ поръ, пока движущаяся точка не опустится до уровня $y = \frac{2}{3} b$; на этомъ уровнѣ точка сходится съ окружности (см. черт. 24-й, на которомъ точка A изображаетъ начальное положеніе движущейся точки, линія $K_1 K$ — уровень $y = \frac{2}{3} b$).

Если $y_0 = \frac{2}{3} b$, то движущаяся точка оставляетъ окружность уже въ начальномъ своемъ положеніи, если скорость ея направлена внизъ.

Если $y_0 > \frac{2}{3} b$, то движущаяся точка оставляетъ окружность съ самаго начала движенія, какъ при направленіи начальной скорости внизъ, такъ и при направленіи ея вверхъ.

§ 51. Вопросы и задачи о движеніи несвободной материальной точки, которыя могутъ быть приведены къ опредѣленію относительнаго движенія точки по отношенію къ нѣкоторой движущейся средѣ

Задачи о движеніи материальной точки по данной движущейся поверхности или линіи могутъ быть рѣшены, или такъ, какъ показано выше, или еще слѣдующимъ образомъ.

Представимъ себѣ движущуюся среду, которой принадлежит данная поверхность или линія, и составимъ дифференціальныя уравненія относительнаго движенія материальной точки по отношенію къ этой средѣ; интегрируя эти дифференціальныя уравненія, найдемъ рѣшеніе задачи.

Если движущаяся поверхность или линия не измѣняетъ своего вида, то среда будетъ неизмѣняемая, неизмѣнно связанная съ этою поверхностью или линіею.

Дифференціальныя уравненія относительнаго движенія вѣсистой матеріальной точки будутъ отличаться отъ дифференціальныхъ уравненій (233) (стр. 149—150) тѣмъ, что теперь во вторыхъ частяхъ уравненій будутъ заключаться еще члены:

$$\lambda_1 \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} + \lambda_2 \frac{\partial \Phi}{\partial \eta}, \quad \lambda_1 \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} + \lambda_2 \frac{\partial \Phi}{\partial \zeta}, \quad \lambda_1 \frac{\partial \Phi}{\partial \zeta} + \lambda_2 \frac{\partial \Phi}{\partial \xi},$$

выражающіе суммы проэкцій на оси Ξ , Γ , Z реакцій поверхностей

$$\Phi_1(\xi, \eta, \zeta) = 0, \quad \Phi_2(\xi, \eta, \zeta) = 0,$$

образующихъ своимъ пересѣченіемъ ту линію, по которой должна двигаться матеріальная точка.

Если матеріальная точка ограничена въ своемъ движеніи плавкою поверхностью:

$$\Phi(\xi, \eta, \zeta) = 0,$$

то во вторыхъ частяхъ дифференціальныхъ уравненій относительнаго движенія должны будутъ заключаться слѣдующіе члены:

$$\lambda \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} = k \sqrt{\lambda^2} \frac{\Delta \Phi}{u} \frac{d\xi}{dt},$$

$$\lambda \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} = k \sqrt{\lambda^2} \frac{\Delta \Phi}{u} \frac{d\eta}{dt},$$

$$\lambda \frac{\partial \Phi}{\partial \zeta} = k \sqrt{\lambda^2} \frac{\Delta \Phi}{u} \frac{d\zeta}{dt}.$$

Примѣръ 36-й. Матеріальная тяжелая точка движется по линіи, составляющей съ горизонтомъ уголъ J ; эта линія движется поступательно, причемъ всѣ точки ея движутся вертикально съ постояннымъ ускореніемъ j по положительной оси Z , направленной внизъ. Въ началѣ движенія (т.-е. при $t=0$) скорости всѣхъ точекъ линіи равны нулю; въ этотъ моментъ матеріальная точка находилась въ точкѣ $Ю$ движущейся линіи и абсолютная скорость ея была равна нулю.

а потому:

$$\lambda = -m \frac{v^2 + y y'}{2R^2} \dots \dots \dots (401)$$

Изъ этого выраженія прямо видно, что на нижней полусферѣ точка находится не можетъ.

Изъ выраженія же:

$$\lambda = -m \frac{3y}{2R^2} \left(y - \frac{2}{3} b \right)$$

можно заключить слѣдующее.

Если $y_0 < 0$ и притомъ $y_0 < \frac{2}{3} b$, то λ будетъ болѣе нуля до тѣхъ поръ, пока движущаяся точка не опустится до уровня $y = \frac{2}{3} b$; на этомъ уровнѣ точка сходится съ окружности (см. черт. 24-й, на которомъ точка A изображаетъ начальное положеніе движущейся точки, линія $K_1 K$ — уровень $y = \frac{2}{3} b$).

Если $y_0 = \frac{2}{3} b$, то движущаяся точка оставляетъ окружность уже въ начальномъ своемъ положеніи, если скорость ея направлена внизъ.

Если $y_0 > \frac{2}{3} b$, то движущаяся точка оставляетъ окружность съ самаго начала движенія, какъ при направленіи начальной скорости внизъ, такъ и при направленіи ея вверхъ.

§ 54. Вопросы и задачи о движеніи несвободной материальной точки, которые могутъ быть приведены къ опредѣленію относительнаго движенія точки по отношенію къ нѣкоторой движущейся средѣ

Задачи о движеніи материальной точки по данной движущейся поверхности или линіи могутъ быть рѣшены, или такъ, какъ показано выше, или еще слѣдующимъ образомъ.

Представимъ себѣ движущуюся среду, которой принадлежит данная поверхность или линія, и составимъ дифференціальныя уравненія относительнаго движенія материальной точки по отношенію къ этой средѣ; интегрируя эти дифференціальныя уравненія, найдемъ рѣшеніе задачи.

Если движущаяся поверхность или линия не измѣняетъ своего вида, то среда будетъ неизмѣняемая, неизмѣнно связанная съ этою поверхностью или линіею.

Дифференціальныя уравненія относительнаго движенія несвободной матеріальной точки будутъ отличаться отъ дифференціальныхъ уравненій (233) (стр. 149—150) тѣмъ, что теперь во вторыхъ частяхъ уравненій будутъ заключаться еще члены:

$$\lambda_1 \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} + \lambda_2 \frac{\partial \Phi}{\partial \xi}, \quad \lambda_1 \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} + \lambda_2 \frac{\partial \Phi}{\partial \eta}, \quad \lambda_1 \frac{\partial \Phi}{\partial \zeta} + \lambda_2 \frac{\partial \Phi}{\partial \zeta},$$

выражающіе суммы провѣцій на оси Ξ , Υ , Z реакцій поверхностей

$$\Phi_1(\xi, \eta, \zeta) = 0, \quad \Phi_2(\xi, \eta, \zeta) = 0,$$

образующихъ своимъ пересѣченіемъ ту линію, по которой должна двигаться матеріальная точка.

Если матеріальная точка ограничена въ своемъ движеніи гладкою поверхностью:

$$\Phi(\xi, \eta, \zeta) = 0,$$

то во вторыхъ частяхъ дифференціальныхъ уравненій относительнаго движенія должны будутъ заключаться слѣдующіе члены:

$$\lambda \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} = k V \lambda^2 \frac{\Delta \Phi}{u} \frac{d\xi}{dt},$$

$$\lambda \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} = k V \lambda^2 \frac{\Delta \Phi}{u} \frac{d\eta}{dt},$$

$$\lambda \frac{\partial \Phi}{\partial \zeta} = k V \lambda^2 \frac{\Delta \Phi}{u} \frac{d\zeta}{dt}.$$

Примѣръ 36-й. Матеріальная тяжелая точка движется по линіи, составляющей съ горизонтомъ уголъ J ; эта линія движется поступательно, причемъ всѣ точки ея движутся вертикально съ постояннымъ ускореніемъ j по положительной оси Z , направленной внизъ. Въ началѣ движенія (т.-е. при $t=0$) скорости всѣхъ точекъ линіи равны нулю; въ этотъ моментъ матеріальная точка находилась въ точкѣ $Ю$ движущейся линіи и абсолютная скорость ея была равна нулю.

Возьмемъ положительную ось γ по направленію линіи, внизъ; ось Z — перпендикулярно къ линіи, вверхъ. Уравненія линіи будутъ:

$$\zeta = 0, \quad \xi = 0.$$

Дифференціальныя уравненія движенія будутъ:

$$m \frac{d^2 \eta}{dt^2} = mg \sin J - mj \sin J$$

$$0 = -mg \cos J + \lambda + mj \cos J.$$

Второе изъ этихъ уравненій опредѣляетъ реакцію по положительной оси Z ; равное и противоположное реакціи давленіе матеріальной точки на линію равно:

$$D = m(g - j) \cos J.$$

Если j есть величина положительная, то это давленіе менѣ давленія $mg \cos J$, производимаго вѣсомъ точки; если же j будетъ величиною отрицательною, то давленіе будетъ болѣе вѣса точки; слѣдовательно, при равноѣрно-ускоренномъ движеніи линіи сверху внизъ давленіе матеріальной точки на линію уменьшается, а при равноѣрно-ускоренномъ движеніи снизу вверхъ — увеличивается сравнительно съ давленіемъ, производимымъ тою же точкою на неподвижную линію.

Первое изъ предыдущихъ уравненій, по сокращеніи на m и по интегрированіи, даетъ законъ движенія точки по прямой:

$$\eta = \frac{(g - j)}{2} t^2 \sin J;$$

это — равноускоренное движеніе съ ускореніемъ $(g - j) \sin J$; если j будетъ болѣе g , то точка будетъ подниматься вверхъ по линіи.

Примѣръ 37-й. Движеніе матеріальной тяжелой точки по какой бы то ни было кривой линіи движущейся поступательно.

Относительное движеніе матеріальной точки совершается такъ, какъ совершалось бы абсолютное движеніе по той же неподвижной кривой линіи, если бы, кромѣ силы тяжести, была еще прило-

жена къ матеріальной точкѣ сила, равная $m\dot{w}_0$, и противоположная ускоренію \dot{w}_0 точки $Ю$.

Примѣръ 38-й. Движеніе тяжелой матеріальной точки по прямой линіи, принадлежащей неизмѣняемой средѣ, вращающейся равномерно вокругъ горизонтальной оси.

Проведемъ кратчайшее разстояніе между осью вращенія и движущейся линіею и возьмемъ неподвижный конецъ его O за начало неподвижныхъ осей координатъ, а тотъ конецъ его, который находится на движущейся линіи — за начало $Ю$ координатныхъ осей $Э$, Υ , Z ; за положительную ось Υ возьмемъ продолженіе направленія $OЮ$ (см. черт. 25), ось $Э$ расположимъ по данной линіи, ось $X^{орт}$ по направленію оси вращенія и угловой скорости, а ось $U^{орт}$ вертикально внизъ. При такомъ выборѣ осей, ось Υ будетъ заключаться въ вертикальной плоскости QQ , проведенной черезъ ось $U^{орт}$. Черезъ точку $Ю$ проведемъ направленіе $ЮX'$ параллельное положительной оси $X^{орт}$; пусть J есть постоянный уголъ $\angle ЮX'$, образуемый направленіями осей X и $Э$. Плоскость PP , проведенная черезъ направленія $ЮЭ$ и $ЮX'$, перпендикулярна къ направленію $OЮ\Upsilon$, а потому въ этой плоскости заключается ось $ЮZ$.

Угловая скорость направлена по оси $X^{орт}$ или по линіи $ЮX'$, поэтому проеціи ея на подвижныя оси равны:

$$p = \omega \cos J, \quad q = 0, \quad r = -\omega \sin J.$$

Ускореніе точки $Ю$ направлено по $ЮO$ и равно $\omega^2 l$, если l означаетъ длину $ЮO$, поэтому:

$$\dot{w}_0 \cos(\dot{w}_0 \mathcal{E}) = 0, \quad \dot{w}_0 \cos(\dot{w}_0 \Upsilon) = -\omega^2 l, \quad \dot{w}_0 \cos(\dot{w}_0 Z) = 0.$$

Реакція \mathfrak{F} прямой линіи заключается въ плоскости $Z\Upsilon$.

Проеціи силы тяжести на направленіе оси Υ и на направленіе $ЮK$ (линія пересѣченія плоскостей QQ и PP) равны:

$$\Upsilon = mg \cos \omega t, \quad - mg \sin \omega t,$$

гдѣ ωt есть уголъ $Y'OI'$; поэтому проеціи силы тяжести на направленія осей Ξ и Z равны:

$$\Xi = -mg \sin \omega t \sin J, \quad Z = -mg \sin \omega t \cos J.$$

Кромѣ того, такъ какъ матеріальная точка движется по оси Ξ , то η и ζ равны нулю.

Составимъ теперь дифференціальныя уравненія; они будутъ слѣдующія:

$$m\xi'' = -mg \sin J \sin \omega t + m\omega^2 \xi \sin^2 J, \dots (402, a)$$

$$O = \mathfrak{P} \cos (\mathfrak{P}, Y) + mg \cos \omega t + m\omega^2 l + 2m\omega \xi' \sin J, \dots (402, b)$$

$$O = \mathfrak{P} \cos (\mathfrak{P}, Z) - mg \cos J \sin \omega t + m\omega^2 \xi \sin J \cos J. (402, c)$$

Интегрируя первое изъ этихъ уравненій, получимъ выраженіе движенія точки по прямой; второе и третье уравненія послужатъ для опредѣленія величины и направленія реакціи прямой линіи.

Сократимъ уравненіе (402, a) на m и положимъ:

$$\xi = \chi + \frac{g}{\omega^2} \frac{\sin J}{1 + \sin^2 J} \sin \omega t,$$

тогда это уравненіе получитъ слѣдующій видъ:

$$\chi'' = (\omega \sin J)^2 \chi, \dots \dots \dots (403)$$

Интегрированіе такого уравненія показано на страницахъ 63-й и 64-й этой части; замѣнивъ, въ выраженія (72), h — величиною $\omega \sin J$, a — величиною $\chi_0 = \xi_0$ и α — величиною χ'_0 :

$$\chi'_0 = \xi'_0 = \frac{g}{\omega} \frac{\sin J}{1 + \sin^2 J},$$

получимъ слѣдующее рѣшеніе:

$$\begin{aligned} \xi = \xi_0 \frac{e^{kt} + e^{-kt}}{2} + \frac{g}{\omega^2} \frac{\sin J}{1 + \sin^2 J} \sin \omega t + \\ + \left(\xi'_0 - \frac{g}{\omega^2} \frac{1}{1 + \sin^2 J} \right) \frac{e^{kt} - e^{-kt}}{2}, \dots \dots \dots (404) \end{aligned}$$

гдѣ

$$k = \omega \sin J.$$

Если $\xi_0 = 0$ и $\chi'_0 = 0$, то движеніе матеріальной точки по оси Ξ будетъ колебательное по обѣ стороны точки $Ю$, такъ какъ тогда выраженіе этого движенія будетъ слѣдующее:

$$\xi = \frac{g}{\omega^2} \frac{\sin J}{1 + \sin^2 J} \sin \omega t.$$

Ни это, ни общее выраженіе (404) не заключаютъ въ себѣ величины l ; слѣдовательно, движеніе точки по оси Ξ не зависитъ отъ разстоянія этой прямой линіи отъ оси вращенія.

Примѣръ 39-й. Тяжелая точка движется по прямой линіи, находящейся въ плоскости истиннаго горизонта являющейся точкой $Ю$ земной поверхности, пренебрегая тѣми же величинами, какъ и на страницѣ 166, опредѣлить проэкцію на горизонтальную плоскость давленія, производимаго движущеюся точкою на прямую линію.

Давленіе движущейся точки на прямую равно и противоположно реакціи прямой; означимъ черезъ D_1 проэкцію давленія на горизонтальную плоскость; направленіе D_1 должно быть перпендикулярно къ направленію прямой.

Относя положеніе движущейся точки къ тѣмъ самымъ осямъ X , Y , Z , которыя были выбраны нами на страницѣ 159 при разсмотрѣніи примѣра 21-го, означимъ черезъ x , y координаты движущейся точки ($z=0$) и черезъ β — азимутъ прямой линіи, этотъ азимутъ мы будемъ отсчитывать отъ положительной оси X къ положительной оси Y .

Если направленіе давленія D_1 будетъ имѣть азимутъ $(\beta + \frac{\pi}{2})$, то проэкція D_1 на оси X и Y будутъ равны:

$$- D_1 \sin \beta, \quad D_1 \cos \beta;$$

если окажется, что D_1 есть величина отрицательная, то это будетъ значить, что оно имѣетъ направленіе противоположное, азимутъ котораго равенъ $\beta - \frac{\pi}{2}$.

Чтобы составить дифференціальныя уравненія движенія точки по данной прямой, въ которыхъ отброшены члены, заключающіе величины:

$$\omega^2 x, \omega^2 \eta, \frac{x}{R}, \frac{\eta}{R},$$

возьмемъ дифференціальныя уравненія (252) и прибавимъ къ ихъ вторымъ частямъ проэкціи реакціи прямой на оси координатъ; проэкціи реакціи на оси X и Y будутъ равны:

$$D_1 \sin \beta, \quad D_1 \cos \beta.$$

поэтому первыя два дифференціальныя уравненія будутъ слѣдующаго вида:

$$\begin{aligned} mx'' &= D_1 \sin \beta - 2m\omega\eta' \sin \Delta \\ m\eta'' &= -D_1 \cos \beta + 2m\omega x' \sin \Delta. \end{aligned}$$

Но движеніе точки совершается по данной прямой линіи, поэтому:

$$x = s \cos \beta, \quad \eta = s \sin \beta,$$

если s означаетъ разстояніе движущейся точки отъ точки O ; въслѣдствіе этого предыдущія уравненія получаютъ такой видъ:

$$\begin{aligned} ms'' \cos \beta &= (D_1 - 2m\omega s' \sin \Delta) \sin \beta \\ ms'' \sin \beta &= -(D_1 - 2m\omega s' \sin \Delta) \cos \beta. \end{aligned}$$

Умноживъ первое изъ этихъ уравненій на $\cos \beta$, второе на $\sin \beta$ и сложивъ, получимъ:

$$s'' = \frac{d^2 s}{dt^2} = 0;$$

это выражаетъ, что движеніе точки совершается (по крайней мѣрѣ близъ точки O) равномерно.

Послѣ этого, изъ предыдущихъ уравненій слѣдуетъ:

$$D_1 = 2m\omega s' \sin \Delta \dots \dots \dots (405)$$

Если s' есть величина положительная, то и D_1 будет величиною положительною, то есть направление его будет имѣть азимуть $(\beta + \frac{\pi}{2})$, стало быть движущаяся точка давитъ вправо на линію, по которой она движется; давленіе это, происходящее вслѣдствіе вращенія земли вокругъ оси, пропорціонально величинѣ скорости точки и синусу истинной широты мѣста; но не зависитъ отъ азимута β .

Примѣръ 40-й. Движеніе тяжелой матеріальной точки по наклонной плоскости, равнобѣрно вращающейся вокругъ вертикальной оси.

Пусть J есть уголъ, составляемый наклонною плоскостью съ горизонтальною плоскостью. Возьмемъ за точку $Ю$ — точку пересѣченія вращающейся плоскости съ осью вращенія; положительную ось Υ направимъ внизъ по линіи наибольшаго наклона по плоскости, ось Z перпендикулярно къ плоскости, вверхъ; ось Ξ будетъ тогда горизонтальна.

Положимъ, что угловая скорость ω направлена вверхъ; проэкціи ея на подвижныя оси будутъ равны:

$$p=0, \quad q=-\omega \sin J, \quad r=\omega \cos J.$$

Ускореніе точки $Ю$ равно нулю; проэкціи силы тяжести на подвижныя оси:

$$\Xi=0, \quad \Upsilon=mg \sin J, \quad Z=-mg \cos J.$$

Наконецъ, уравненіе плоскости: $\zeta=0$.

Дифференціальныя уравненія движенія точки по плоскости будутъ, по сокращеніи на m , имѣть слѣдующій видъ:

$$\frac{d^2\zeta}{dt^2} = \omega^2 \zeta + 2\omega \frac{d\eta}{dt} \cos J, \dots \dots \dots (406, a)$$

$$\frac{d^2\Upsilon}{dt^2} = g \sin J + \omega^2 \eta \cos^2 J - 2\omega \frac{d\zeta}{dt} \cos J \dots \dots (406, b)$$

Изъ третьяго уравненія:

$$0 = -mg \cos J + \lambda + m\omega^2 \eta \sin J \cos J - 2m\omega \frac{d\xi}{dt} \sin J \dots (406, c)$$

опредѣлится величина и знакъ реакціи λ .

Положимъ:

$$\eta + \frac{g}{\omega^2} \frac{\sin J}{\cos^2 J} = \psi,$$

тогда уравненія (406, а, b) получаютъ слѣдующій видъ:

$$\xi'' = 2\omega\psi' \cos J = \omega^2 \xi, \quad \psi'' = -2\omega\xi' \cos J + \omega^2 \psi \cos^2 J.$$

Какъ извѣстно, такая совокупность линейныхъ дифференціальныхъ уравненій имѣетъ слѣдующее частное рѣшеніе:

$$\xi = Ce^{kt}, \quad \psi = Cxe^{kt},$$

гдѣ k и x суть постоянныя величины, удовлетворяющія слѣдующимъ равенствамъ:

$$k^2 = 2\omega x k \cos J + \omega^2, \quad xk^2 = -2\omega k \cos J + \omega^2 x \cos^2 J.$$

Исключивъ изъ этихъ равенствъ величину x :

$$x = \frac{k^2 - \omega^2}{2\omega k \cos J} = \frac{2\omega k \cos J}{k^2 - \omega^2 \cos^2 J},$$

получимъ уравненіе:

$$\left(\frac{k}{\omega}\right)^4 - \left(\frac{k}{\omega}\right)^2 (1 - 3 \cos^2 J) + \cos^2 J = 0,$$

служащее для опредѣленія k ; изъ него получимъ четыре значенія для этой величины:

$$1) \quad k_1 = \frac{\omega}{\sqrt{2}} \sqrt{1 - 3 \cos^2 J + \sin J \sqrt{1 - 9 \cos^2 J}}, \quad 3) \quad -k_1$$

$$2) \quad k_2 = \frac{\omega}{\sqrt{2}} \sqrt{1 - 3 \cos^2 J - \sin J \sqrt{1 - 9 \cos^2 J}}, \quad 4) \quad -k_2;$$

каждому изъ этихъ k соответствуетъ опредѣленная величина x :

$$1) \quad x_1 = \frac{k_1^2 - \omega^2}{2\omega k_1 \cos J}, \quad 3) \quad -x_1$$

$$2) \quad x_2 = \frac{k_2^2 - \omega^2}{2\omega k_2 \cos J}, \quad 4) \quad -x_2.$$

Поэтому совокупность (406, а), (406, б) будетъ имѣть слѣдующее полное рѣшеніе.

$$\xi = C_1 e^{k_1 t} + C_3 e^{-k_1 t} + C_2 e^{k_2 t} + C_4 e^{-k_2 t} \dots \quad (407, а)$$

$$\eta = -\frac{g \sin J}{\omega^2 \cos^2 J} + x_1 (C_1 e^{k_1 t} - C_3 e^{-k_1 t}) + x_2 (C_2 e^{k_2 t} - C_4 e^{-k_2 t}). \quad (407, б)$$

Значенія произвольныхъ постоянныхъ опредѣляются по начальнымъ координатамъ ξ_0 и η_0 движущейся точки и по проеціямъ на оси Ξ и Υ ея начальной относительной скорости (ξ'_0, η'_0).

Корни k_1 и k_2 могутъ быть действительными или мнимыми.

Если:

$$\cos J < \frac{1}{3},$$

то тогда:

$$\cos J < \frac{1}{3} \sqrt{3}, \quad 1 - 3 \cos^2 J > 0,$$

$$(1 - 3 \cos^2 J)^2 - \sin^2 J (1 - 9 \cos^2 J) = 4 \cos^2 J,$$

а потому тогда обѣ величины k_1 и k_2 — действительны. Въ такихъ случаяхъ ξ и η при $t = \infty$ становятся безъвѣчно-большими, если только C_1 и C_2 не равны нулю; если же эти постоянныя равны нулю, то движущаяся точка асимптотически приближается къ точкѣ:

$$\xi_1 = 0, \quad \eta_1 = -\frac{g \sin J}{\omega^2 \cos^2 J}$$

плоскости $\Xi\Upsilon$.

Если:

$$\cos J > \frac{1}{3},$$

то тогда k_1 и k_2 суть комплексныя взаимно-сопряженные величины:

$$k_1 = \alpha + \beta i, \quad k_2 = \alpha - \beta i,$$

а такъ какъ:

$$2\omega\kappa_1 \cos J = k_1 - \frac{\omega^2}{k_1}, \quad 2\omega\kappa_2 \cos J = k_2 - \frac{\omega^2}{k_2},$$

то рѣшеніе получить въ этихъ случаяхъ слѣдующій видъ:

$$\begin{aligned} \xi &= e^{at}(\Gamma_1 \cos \beta t + \Gamma_2 \sin \beta t) + e^{-at}(\Gamma_3 \cos \beta t + \Gamma_4 \sin \beta t) \\ \eta &= -\frac{g \sin J}{\omega^2 \cos^2 J} + \frac{e^{at}}{2\omega \cos J} \left[(\Gamma_1 \alpha + \Gamma_2 \beta - \omega^2 \frac{\Gamma_1 \alpha - \Gamma_2 \beta}{\alpha^2 + \beta^2}) \cos \beta t + \right. \\ &\quad \left. + (\Gamma_2 \alpha - \Gamma_1 \beta - \omega^2 \frac{\Gamma_2 \alpha + \Gamma_1 \beta}{\alpha^2 + \beta^2}) \sin \beta t \right] + \dots \end{aligned}$$

Въ этихъ случаяхъ, если Γ_1 и Γ_2 неравны нулю, то движеніе точки, при весьма большихъ величинахъ t , принимаетъ слѣдующій характеръ:

$$\xi = ae^{at} \cos(\beta t + b), \quad \eta = -\frac{g \sin J}{\omega^2 \cos^2 J} + a_1 e^{at} \sin(\beta t + b_1),$$

т.-е. движущаяся точка описываетъ спираль логарифмическаго вида, по которой она удаляется въ безконечность.

Если же Γ_1 и Γ_2 равны нулю, то движущаяся точка асимптотически приближается по спирали къ точкѣ (ξ_1, η_1) .

Примѣръ 41-й. Разсмотримъ, какое движеніе по отношенію къ землѣ совершаетъ математическій маятникъ при малыхъ отклоненіяхъ отъ вертикальной линіи (маятникъ Фуко).

Примемъ точку привѣса маятника за начало $Ю$ осей координатъ X , Y , Z , неизмѣнно связанныхъ съ землею; эти оси направлены такъ, какъ объяснено на страницѣ 159.

Если l есть длина нити маятника, то уравненіе той сферы, на которой должна оставаться движущаяся точка будетъ:

$$l^2 - x^2 - y^2 - z^2 = 0.$$

Дифференціальныя уравненія движенія этого маятника полу-

чатся изъ дифференціальныхъ уравненій (243) страницы 159, если ко вторымъ частямъ этихъ уравненій присоединимъ члены:

$$-2\lambda x, -2\lambda \eta, -2\lambda \zeta;$$

отбросивъ же члены, заключающіе:

$$\omega^2 x, \omega^2 \eta, \omega^2 \zeta, \frac{x}{R}, \frac{\eta}{R}, \frac{\zeta}{R}$$

и всё члены высшаго порядка малости, будемъ имѣть слѣдующія уравненія:

$$mx'' = -2\lambda x - 2m\eta' \omega \sin \Delta, \dots \dots \dots (408, a)$$

$$m\eta'' = -2\lambda \eta + 2m\omega(x' \sin \Delta + \lambda' \cos \Delta), \dots \dots (408, b)$$

$$m\zeta'' = -2\lambda \zeta - 2m\eta' \omega \cos \Delta - mG \dots \dots \dots (408, c)$$

Помноживъ первое изъ нихъ на x' , второе — на η' , третье — на ζ' и сложивъ, получимъ:

$$\frac{d\left(\frac{mu^2}{2}\right)}{dt} = -mG \frac{d\zeta}{dt}, \dots \dots \dots (409)$$

такъ какъ:

$$-2\lambda(xx' + \eta\eta' + \zeta\zeta') = 0,$$

потому что точка остается на поверхности сферы. Уравненіе (409) имѣетъ интеграль:

$$\frac{u^2}{2} = h - G\zeta^* \dots \dots \dots (410)$$

Исключивъ теперь λ изъ первыхъ двухъ уравненій (408, a) и (408, b), получимъ:

$$\frac{d(x\eta')}{dt} = \omega \sin \Delta \frac{d(x^2 + \eta^2)}{dt} + 2x\eta' \omega \cos \Delta.$$

*) Это интеграль приближенныхъ дифференціальныхъ уравненій (408); не трудно убѣдиться, что интеграль точныхъ дифференціальныхъ уравненій имѣетъ слѣдующій видъ:

$$\frac{mu^2}{2} = H + mg \frac{R^2}{\rho} + \frac{m\omega^2}{2} (\xi^2 + \eta^2) \dots \dots \dots (410 bis)$$

Если отклоненія маятника отъ вертикальной линіи столь малы, что можно пренебречь членами, заключающими вторыя степени угла отклоненія, сравнительно съ членами, заключающими только первыя степени этого угла, то можно будетъ въ предыдущемъ уравненіи отбросить членъ, заключающій z' . Въ самомъ дѣлѣ, выразимъ прямоугольныя координаты движущейся точки въ сферическихъ координатахъ l , φ , ψ :

$$x = l \sin \varphi \cos \psi, \quad y = l \sin \varphi \sin \psi, \quad z = -l \cos \varphi,$$

тогда предыдущее уравненіе приметъ слѣдующій видъ:

$$\frac{d(l^2 \sin^2 \varphi \cdot \psi')}{dt} = 2l^2 \omega \varphi' (\cos \varphi \sin \varphi \sin \Lambda + \sin^2 \varphi \cos \Lambda \cos \psi);$$

замѣнивъ здѣсь $\sin \varphi$ — чрезъ φ и $\cos \varphi$ — чрезъ 1, увидимъ, что вторая часть этого уравненія получить такой видъ:

$$2l^2 \omega \varphi' (\varphi \sin \Lambda + \varphi^2 \cos \Lambda \cos \psi);$$

а потому вторымъ членомъ этой части можно пренебречь.

Отбросивъ членъ, заключающій z' , получимъ другой изъ первыхъ интеграловъ дифференціальныхъ уравненій относительнаго движенія маятника:

$$(x\eta' - \eta x') = C + (x^2 + \eta^2) \omega \sin \Lambda; \dots\dots\dots (411)$$

но не надо забывать, что этотъ интеграль найденъ при предположеніи, что отклоненія маятника отъ вертикальной линіи весьма малы.

Если выразимъ прямоугольныя координаты въ сферическихъ, то первые интегралы (410) и (411) получатъ такой видъ:

$$l^2((\varphi')^2 + \sin^2 \varphi (\psi')^2) = 2Gl \cos \varphi + 2h \dots\dots\dots (412)$$

$$l^2 \sin^2 \varphi \cdot \psi' = C + l^2 \omega \sin \Lambda \sin^2 \varphi \dots\dots\dots (413)$$

Въ этихъ уравненіяхъ пренебрежемъ третьими и высшими степенями угла φ и дальнѣйшія интегрированія произведемъ для слѣдующихъ двухъ частныхъ случаевъ.

1) Въ начальный моментъ маятникъ отклоненъ въ плоскости $\psi = 0$ на малый уголъ φ_0 , причемъ материальной точкѣ сообщена слѣдующая относительная скорость u_0 по параллели $\varphi = \varphi_0$ къ западу.

$$\varphi'_0 = 0, \quad u_0 = l \sin \varphi_0 \cdot \psi'_0 = l \omega \sin \Lambda \sin \varphi_0.$$

Въ этомъ случаѣ постоянныя C и $2h$ будутъ имѣть слѣдующія значенія:

$$C = 0, \quad 2h = l^2 \omega^2 \sin^2 \Lambda \sin^2 \varphi_0 - 2Gl \cos \varphi_0;$$

уравненіе (413) приметъ видъ:

$$\left(\frac{d\psi}{dt} - \omega \sin \Lambda \right) \sin^2 \varphi = 0;$$

откуда слѣдуетъ:

$$\psi' = \omega \sin \Lambda; \quad \psi = t \omega \sin \Lambda.$$

Уравненіе (412) получить въ слѣдствіе этого слѣдующій видъ:

$$(\varphi')^2 = 2 \frac{G}{l} (\cos \varphi - \cos \varphi_0) + \omega^2 \sin^2 \Lambda (\sin^2 \varphi_0 - \sin^2 \varphi),$$

или, пренебрегая кубами и высшими степенями φ :

$$(\varphi')^2 = \varepsilon^2 (\varphi_0^2 - \varphi^2); \quad \varepsilon = \sqrt{\frac{G}{l} + \omega^2 \sin^2 \Lambda}.$$

Отсюда видно, что φ не можетъ быть болѣе φ_0 , а потому φ' должна имѣть, въ началѣ движенія, знакъ отрицательный.

$$\frac{-d\varphi}{\sqrt{\varphi_0^2 - \varphi^2}} = \varepsilon dt;$$

откуда, интегрируя, получимъ:

$$\varphi = \varphi_0 \cos \varepsilon t.$$

Стало быть, движеніе точки совершается по слѣдующему закону:

$$\varphi = \varphi_0 \cos \varepsilon t, \quad \psi = t \omega \sin \Lambda, \quad \dots \dots \dots (414)$$

то есть колебанія маятника совершаются въ вертикальной

плоскости, которая равномерно вращается съ угловою скоростью $\omega \sin \Delta$ вокруг вертикальной линіи: на сѣверномъ полушаріи вращеніе совершается по направленію движенія часовыхъ стрѣлокъ, на южномъ — обратно *).

2) Начальное положеніе маятника то же самое, какъ и въ предыдущемъ случаѣ, но начальная относительная скорость равна нулю:

$$\varphi'_0 = 0, \quad \psi'_0 = 0, \quad u_0 = 0.$$

Въ этомъ случаѣ:

$$C = -l^2 \omega \sin \Delta \sin^2 \varphi_0, \quad 2h = -2Gl \cos \varphi_0.$$

Дифференціальныя уравненія будутъ:

$$\psi' = \omega \sin \Delta \left(1 - \frac{\sin^2 \varphi_0}{\sin^2 \varphi} \right)$$

$$(\varphi')^2 = 2 \frac{G}{l} (\cos \varphi - \cos \varphi_0) - \frac{\omega^2 \sin^2 \Delta}{\sin^2 \varphi} (\sin^2 \varphi - \sin^2 \varphi_0)^2.$$

Послѣднее уравненіе, если пренебrecь кубами и высшими степенями φ , получить слѣдующій видъ:

$$(\varphi \varphi')^2 = \varepsilon^2 (\varphi_0^2 - \varphi^2)(\varphi^2 - \varphi_1^2), \dots \dots \dots (415)$$

гдѣ:

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{G}{l} + \omega^2 \sin^2 \Delta} \dots \dots \dots (416)$$

$$\varphi_1 = \frac{\omega \varphi_0 \sin \Delta}{\varepsilon} \dots \dots \dots (417)$$

Изъ уравненія (415) видно, что φ не можетъ быть болѣе φ_0 и не можетъ быть менѣе φ_1 , поэтому можно положить:

$$\varphi^2 = \varphi_0^2 - (\varphi_0^2 - \varphi_1^2) \sin^2 \eta; \dots \dots \dots (418)$$

*) Продолжительность одного розмаха равна

$$T = \frac{\pi}{\sqrt{\frac{G}{l} + \omega^2 \sin^2 \Delta}} \quad \text{или} \quad \pi \sqrt{\frac{l}{G}},$$

такъ какъ ω^2 есть ничтожная дробь сравнительно съ $\frac{G}{l}$.

тогда уравнение (415) получить, послѣ надлежащихъ сокращеній, слѣдующій видъ:

$$(\eta')^2 = \varepsilon^2, \quad \eta' = \pm \varepsilon;$$

изъ этихъ двухъ знаковъ мы выберемъ верхній, вслѣдствіе чего η будетъ непрерывно возрастать отъ своего начальнаго значенія $\eta_0 = 0$; возрастаніе η будетъ равномерное:

$$\eta = \varepsilon t.$$

Дифференціальное уравненіе, заключающее ψ' , получить такой видъ:

$$d\psi = \omega dt \sin \Lambda - \frac{\omega \sin \Lambda}{\varepsilon} \frac{\varphi_0^2}{\varphi^2} d\eta$$

$$d\psi = \omega dt \sin \Lambda - \frac{\omega \sin \Lambda}{\varepsilon} \frac{d \operatorname{tg} \frac{r}{\varphi_0^2}}{\left(1 + \frac{\varphi_0^2}{\varphi^2} \operatorname{tg}^2 \eta\right)};$$

отсюда, интегрируя, получимъ:

$$\psi = \omega t \sin \Lambda - \operatorname{arctg} \left(\frac{\omega}{\varepsilon} \sin \Lambda \operatorname{tg} \eta \right).$$

Стало быть движеніе маятника въ этомъ случаѣ совершается по слѣдующему закону:

$$r = \varphi_0 \sqrt{\cos^2 \varepsilon t + \frac{\omega^2}{\varepsilon^2} \sin^2 \Lambda \sin^2 \varepsilon t}, \dots\dots\dots (419)$$

$$\frac{\omega}{\varepsilon} \sin \Lambda \operatorname{tg} \varepsilon t = \operatorname{tg} (\omega t \sin \Lambda - \psi) \dots\dots\dots (420)$$

Представимъ себѣ вертикальную плоскость, вращающуюся вкругъ вертикальной линіи съ угловою скоростью $\omega \sin \Lambda$ по направленію движенія часовыхъ стрѣлокъ; означимъ черезъ Θ уголъ:

$$\Theta = \psi - \omega t \sin \Lambda,$$

составляемый съ этою вертикальною плоскостью тою вертикальною плоскостью, въ которой заключается нить маятника; какъ видно изъ уравненія (420), этотъ уголъ Θ — отрицательный.

Введя уголъ Θ , можно исключить et изъ выражений (419) и (420); получимъ:

$$\frac{\varphi^2 \cos^2 \Theta}{\varphi_0^2} + \frac{\varphi^2 \sin^2 \Theta}{\varphi_1^2} = 1.$$

Замѣнивъ здѣсь малые углы φ_0 , φ , φ_1 ихъ синусами, получимъ уравненіе:

$$\frac{\xi_1^2}{a^2} + \frac{\eta_1^2}{b^2} = 1, \dots\dots\dots (421)$$

гдѣ:

$$\xi_1 = l \sin \varphi \cos \Theta, \quad \eta_1 = l \sin \varphi \sin \Theta; \quad a = l \sin \varphi_0, \quad b = l \sin \varphi_1.$$

Чтобы объяснить себѣ значеніе уравненія (421), представимъ себѣ горизонтальную плоскость $E_1 I O \Gamma_1$ (черт. 26), вращающуюся вокругъ вертикальной оси IOZ съ угловою скоростью $\omega \sin \Delta$ въ сторону, указанную оперенною стрѣлкою на чертежѣ 26-мъ. Оси IOE_1 и $IO\Gamma_1$ неизвѣнно связаны съ этою вращающеюся плоскостью, причеиъ ось E_1 составляетъ съ осью Z уголъ $t\omega \sin \Delta$. Величины ξ_1 и η_1 суть координаты, относительно осей E_1 и Γ_1 , проекціи M движущейся точки на горизонтальную плоскость.

Уравненіе (421) выражаетъ, что точка M чертитъ на вращающейся плоскости $E_1 \Gamma_1$ эллипсъ, большая полуось котораго, равная $l \sin \varphi_0$, направлена по оси E_1 , а малая полуось равна:

$$b = \frac{\omega \sin \Delta}{\sqrt{\frac{G}{l} + \omega^2 \sin^2 \Delta}} l \sin \varphi_0.$$

Движеніе по этому эллипсу совершается въ сторону, указанную неоперенною стрѣлкою на чертежѣ 26-мъ.

§ 55. Положенія равновѣсія несвободной матерьяльной

Точка.

Матерьяльная точка, находящаяся на данной неподвижной поверхности или линіи, можетъ оставаться въ покоѣ въ тѣхъ точкахъ поверхности или линіи, въ которыхъ всѣ силы, приложенныя къ точкѣ, взаимно уравновѣшиваются; такіа положенія матерьяльной

несвободной точки называются *положеніями равновѣсія* ея на данной неподвижной поверхности или линіи.

Равенства, выражающія, что всѣ силы, приложенныя къ несвободной покоящейся матерьяльной точкѣ, взаимно уравновѣшиваются, называются *уравненіями равновѣсія силъ*, приложенныхъ къ этой точкѣ.

Изъ этихъ уравненій выведемъ условія, которымъ должны удовлетворять задаваемыя силы для того, чтобы матерьяльная точка могла имѣть положенія равновѣсія на данной поверхности или линіи; эти условія мы будемъ называть *условіями равновѣсія*.

Если эти условія удовлетворены, то изъ тѣхъ же уравненій опредѣлятся положенія равновѣсія матерьяльной точки.

Условія равновѣсія различны, смотря по степени ограниченія свободы движенія точки и смотря потому, существуетъ ли треніе, или нѣтъ.

Поэтому мы рассмотримъ отдѣльно различныя степени стѣсненія свободы матерьяльной точки.

1) *Матерьяльная точка находится на гладкой неподвижной удерживающей поверхности.*

Пусть

$$f(x, y, z) = 0 \dots\dots\dots (422)$$

есть уравненіе поверхности; поверхность гладкая, то есть, нѣтъ тренія между нею и матерьяльною точкою.

Въ тѣхъ точкахъ этой поверхности, въ которыхъ матерьяльная точка можетъ оставаться въ покоѣ, задаваемыя силы должны уравновѣшиваться съ реакціею поверхности; поэтому уравненія равновѣсія будутъ:

$$X + \lambda \frac{\partial f}{\partial x} = 0, \quad Y + \lambda \frac{\partial f}{\partial y} = 0, \quad Z + \lambda \frac{\partial f}{\partial z} = 0 \dots\dots\dots (423)$$

Исключивъ λ изъ этихъ уравненій, получимъ два уравненія:

$$X \frac{\partial f}{\partial y} - Y \frac{\partial f}{\partial x} = 0, \quad Y \frac{\partial f}{\partial z} - Z \frac{\partial f}{\partial y} = 0,$$

или

$$\frac{X}{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)} = \frac{Y}{\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)} = \frac{Z}{\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)} \dots\dots\dots (424)$$

Эти два равенства выражают условія равновѣсія, которымъ должны удовлетворять задаваемые силы въ тѣхъ точкахъ поверхности, въ которыхъ матерьяльная точка можетъ быть въ покоѣ.

Условіе, выражаемое равенствами (424), состоитъ въ томъ, что *равнодѣйствующая задаваемыхъ силъ должна быть нормальна къ поверхности въ тѣхъ точкахъ поверхности, въ которыхъ матерьяльная точка можетъ быть въ покоѣ.*

Если задаваемые силы не удовлетворяютъ этому условію ни въ какой точкѣ поверхности, то матерьяльная точка не имѣетъ вовсе положеній равновѣсія на этой поверхности при дѣйствіи на нее такихъ силъ.

Напримѣръ, тяжелая матерьяльная точка не можетъ находиться въ равновѣсіи на гладкой плоскости, наклонной къ горизонту.

Тѣ точки поверхности, въ которыхъ условія (424) удовлетворяются, суть положенія равновѣсія матерьяльной точки; координаты такихъ точекъ опредѣляются изъ равенствъ (424) и изъ уравненій (422).

Напримѣръ, положенія равновѣсія тяжелой точки, находящейся на поверхности удерживающей сферы, опредѣляются изъ равенствъ:

$$x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0$$

$$2mgx = 0, \quad 2mgz = 0,$$

если положительная ось Y^{**} направлена вертикально внизъ.

Эти уравненія имѣютъ слѣдующія два рѣшенія:

$$1) \quad x=0, \quad z=0, \quad y=+R$$

$$2) \quad x=0, \quad z=0, \quad y=-R,$$

слѣдовательно, положеній равновѣсія въ этомъ случаѣ два, одно на самой нижней, другое на самой верхней точкахъ сферы.

Въ некоторыхъ случаяхъ оказывается, что положеній равновѣсія безчисленное множество и что они образуютъ сплошныя линіи на поверхности или занимаютъ собою цѣлыя площади на поверхности и даже иногда всю поверхность; наприкладъ:

Примѣръ 42-й. Матеріальная точка, находящаяся на той же сферической поверхности и подверженная силѣ тяжести и силѣ:

$$m\mu^2\sqrt{x^2+z^2},$$

притягивающей ее къ оси Y^{oz} , будетъ имѣть положенія равновѣсія, опредѣляемыя изъ равенствъ:

$$x^2+y^2+z^2=R^2,$$

$$\frac{-\mu^2x}{2x}=\frac{g}{2y}=\frac{-\mu^2z}{2z},$$

или:

$$x(y+\mu^2y)=0, \quad z(g+\mu^2y)=0.$$

Эти положенія равновѣсія слѣдующія:

1) точка: $x=0, z=0, y=+R,$

2) точка: $x=0, z=0, y=-R,$

и 3) всякая изъ точекъ параллельнаго круга:

$$y=-\frac{g}{\mu^2}, \quad x^2+z^2=R^2-\frac{g^2}{\mu^4}.$$

Тяжелая матеріальная точка, находящаяся на горизонтальной плоскости, имѣетъ положеніе равновѣсія во всякой точкѣ плоскости.

Матеріальная точка, находящаяся на удерживающей сферѣ и притягиваемая къ центру сферы силою пропорціональною разстоянію отъ него, имѣетъ положеніе равновѣсія во всякой точкѣ сферы.

{^a Если задаваемыя силы, приложенныя къ матеріальной точкѣ, имѣютъ потенциалъ U , то уравненія (423) примутъ слѣдующій видъ:

$$\frac{\partial U}{\partial x}+\lambda\frac{\partial f}{\partial x}=0, \quad \frac{\partial U}{\partial y}+\lambda\frac{\partial f}{\partial y}=0, \quad \frac{\partial U}{\partial z}+\lambda\frac{\partial f}{\partial z}=0; \dots (425)$$

исключивъ изъ нихъ λ , получимъ уравненія:

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial z} p = 0, \quad \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial U}{\partial z} q = 0, \dots\dots\dots (426)$$

гдѣ:

$$p = -\frac{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)}{\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)}, \quad q = -\frac{\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)}{\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)}.$$

Изъ уравненій (426) и уравненія поверхности (422) опредѣляются координаты положеній равновѣсія материальной точки.

Пусть M_0 есть одна изъ такихъ точекъ, U_0 численное значеніе, получаемое функціею U въ этой точкѣ; x_0, y_0, z_0 — координаты этой точки, удовлетворяющія уравненію поверхности (422) и уравненіямъ (426).

Пусть M есть другая точка поверхности, бесконечно-близкая къ M_0 ; координаты этой точки M : $x_0 + \delta x, y_0 + \delta y, z_0 + \delta z$ также удовлетворяютъ уравненію (422), а потому:

$$\frac{\partial f}{\partial x} \delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \delta y + \frac{\partial f}{\partial z} \delta z = 0, \dots\dots\dots (427)$$

гдѣ въ производныя подставлены координаты точки M_0 .

Изъ равенства (427) слѣдуетъ, что

$$\delta z = p \delta x + q \delta y \dots\dots\dots (428)$$

Въ точкѣ M потенциальная функція U имѣетъ слѣдующее численное значеніе:

$$U_0 + \delta U + \delta^2 U + \dots,$$

гдѣ

$$\delta U = \frac{\partial U}{\partial x} \delta x + \frac{\partial U}{\partial y} \delta y + \frac{\partial U}{\partial z} \delta z$$

и гдѣ въ производныя подставлены координаты x_0, y_0, z_0 точки M_0 .

Кромѣ того, δz связано съ δx и δy равенствомъ (428), поэтому

$$\delta U = \left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial z} p \right) \delta x + \left(\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial U}{\partial z} q \right) \delta y;$$

а такъ какъ координаты x , y , z , удовлетворяютъ равенствамъ (426), то въ этой точкѣ:

$$\delta U = 0,$$

если только δx , δy , δz удовлетворяютъ равенству (427).

Изъ этого слѣдуетъ, что U , есть, либо максимумъ тѣхъ значеній, которыя получаетъ U на поверхности (422), либо минимумъ этихъ значеній, либо такое значеніе, для котораго

$$\delta U = 0$$

при всякихъ перемѣщеніяхъ изъ этой точки M , по поверхности.

И такъ, если материальная точка, подверженная силамъ, имѣющимъ потенциалъ U , находится на неподвижной гладкой удерживающей поверхности, то положенія равновѣсія материальной точки суть тѣ точки поверхности, въ которыхъ значенія функции U на поверхности имѣютъ максимумъ или минимумъ, и вообще всѣ тѣ точки поверхности, въ которыхъ

$$\delta U = 0.$$

Напримѣръ:

Примѣръ 43-й. Материальная точка, находящаяся на поверхности эллипсоида:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \dots \dots \dots (429)$$

и притягиваемая къ центру эллипсоида силою, пропорціональною разстоянію отъ этой точки, имѣетъ положенія равновѣсія во всѣхъ тѣхъ точкахъ поверхности, въ которыхъ:

$$\delta U = \delta \left(-\frac{\mu^2}{2} r^2 \right) = -\mu^2 (x\delta x + y\delta y + z\delta z) = 0, \dots \dots (430)$$

причемъ δx , δy , δz удовлетворяютъ равенству:

$$\frac{x\delta x}{a^2} + \frac{y\delta y}{b^2} + \frac{z\delta z}{c^2} = 0, \dots \dots \dots (431)$$

а x , y , z , — уравненію (429).

Такихъ точекъ шесть:

Два — на концахъ малой оси, въ которыхъ значенія функции U на поверхности эллипсоида имѣютъ максимумъ.

Два — на концахъ большой оси, въ которыхъ U имѣетъ минимумъ значеній ея на поверхности эллипсоида.

Кромѣ того, точки, находящіяся на концахъ средней оси, суть также положенія равновѣсія; въ самомъ дѣлѣ, исключивъ изъ (430) и (431) произведеніе $y\delta y$, получимъ слѣдующее выраженіе для δU :

$$\delta U = -\mu^2 \left(\frac{(a^2 - b^2)}{a^3} x\delta x + \frac{(c^2 - b^2)}{c^3} z\delta z \right),$$

изъ него слѣдуетъ, что δU обращается въ нуль въ точкахъ:

$$x=0, z=0, y=\pm b.$$

Линіи пересѣченія поверхностей уровня функции $U(x, y, z)$ съ поверхностью (422) называются *линіями уровня* значеній функции U на этой поверхности.

Мы знаемъ (стр. 113), что сила, имѣющая потенціалъ U и приложенная къ матеріальной точкѣ, направлена по положительной нормали къ поверхности уровня, проходящей черезъ положеніе, занимаемое матеріальною точкою; величина силы равна ΔU .

Изъ этого слѣдуетъ, что если матеріальная точка будетъ находиться на поверхности (422), то сила ΔU будетъ перпендикулярна къ той линіи уровня, на которой находится матеріальная точка; сила эта направлена въ сторону поверхностей уровня, имѣющихъ параметры большіе, чѣмъ параметръ C той линіи уровня, на которой находится матеріальная точка. Проекція этой силы на касательную плоскость къ поверхности будетъ, поэтому, перпендикулярна къ линіи уровня C и будетъ направлена въ ту сторону, гдѣ находятся на поверхности линіи уровня съ параметрами, большими C .

Если въ точкѣ M , значенія потенціальной функции U на поверхности имѣютъ наибольшую величину U_0 , то во всѣхъ точкахъ поверхности, безконечно-близкихъ къ M , функция U имѣетъ численныя значенія, меньшія U_0 ; такъ какъ въ точкѣ M , вели-

чина δU обращается въ нуль, то численное значеніе функціи U въ точкѣ M будетъ:

$$U_0 + \delta^2 U + \dots\dots\dots,$$

и такъ какъ U_0 есть максимумъ, то $\delta^2 U$ должна быть отрицательною для всякихъ безконечно-малыхъ перемѣщеній M, M по поверхности.

Изъ этого слѣдуетъ, что если U_0 есть максимумъ, то линіи уровня, ближайшія къ точкѣ M_0 , окружаютъ эту точку со всѣхъ сторонъ и имѣютъ параметры меньшіе U_0 .

Поэтому во всѣхъ точкахъ поверхности, сосѣднихъ съ точкою M_0 , проэкція силы на касательную плоскость стремится приблизить материальную точку къ точкѣ M_0 ; напримѣръ, на чертежѣ 27-мъ, на которомъ изображены линіи уровня потенціальной функціи:

$$U = -\frac{\mu^2}{2} r^2$$

на поверхности эллипсоида (примѣръ 43-й), точка C , находящаяся на концѣ малой оси эллипсоида, есть мѣсто наибольшаго значенія функціи U ; эта точка окружена линіями уровня, параметры которыхъ менѣ величины

$$U_0 = -\frac{\mu^2}{2} c^2;$$

притомъ, чѣмъ далѣе линія уровня отъ точки C , тѣмъ менѣ ея параметръ. Если помѣстить материальную точку въ одну изъ точекъ $\bar{M}', M'', M''', \dots$ по сосѣдству съ точкою C , то проэкція силы на материальную плоскость будетъ направлена внутрь площади, ограничиваемой линією уровня и будетъ, слѣдовательно, стремиться приблизить материальную точку къ точкѣ C .

¹⁾ Положимъ, что U_0 есть максимумъ значеній функціи U на данной поверхности; если материальная точка, находившаяся въ покоѣ въ точкѣ M_0 , будетъ отклонена въ точку M_0 поверхности, весьма близкую къ M_0 , и здѣсь ей будетъ сообщена весьма малая

начальная скорость v_0 , то она станетъ совершать на поверхности движеніе, удовлетворяющее закону живой силы:

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = U - U_0.$$

Такъ какъ U и U_0 менѣе U_s , то:

$$U_0 = U_s - k_0^2, \quad U = U_s - k^2,$$

поэтому:

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{mv_0^2}{2} + k_0^2 - k^2 \dots \dots \dots (432)$$

Изъ этой формулы видно, что матерьяльная точка не можетъ вступить въ тѣ мѣста поверхности, въ которыхъ

$$k^2 > \frac{mv_0^2}{2} + k_0^2;$$

слѣдовательно, точка будетъ совершать свое движеніе вблизи точки M_s , не выходя за предѣлы площади, ограниченной тою линіею уровня, параметръ которой равенъ:

$$U_1 = U_s - \left(\frac{mv_0^2}{2} + k_0^2 \right).$$

Изъ этого слѣдуетъ, что тѣ точки поверхности, въ которыхъ потенціальная функція имѣетъ максимумъ значеній ея на поверхности, суть *положенія устойчиваго равновѣсія* матерьяльной точки.

Напротивъ, тѣ точки поверхности, въ которыхъ потенціальная функція имѣетъ минимумъ значеній ея на поверхности, суть *положенія неустойчиваго равновѣсія* матерьяльной точки. Въ каждой такой точкѣ:

$$\delta U = 0, \quad \delta^2 U > 0,$$

для всякихъ бесконечно-малыхъ перемѣщеній по поверхности; поэтому, въ ближайшемъ сосѣдствѣ съ такою точкою, линія

уровня имѣютъ параметры ббльшіе этого минимума и притомъ каждая линія уровня окружаетъ точку минимума со всѣхъ сторонъ (см. на чертежѣ 27-мъ, линія уровня, окружающія точку A , находящуюся на концѣ большой полуоси эллипсоида).

Въ сосѣдствѣ съ такою точкою неустойчиваго равновѣсія, сила, имѣющая потенциалъ U , стремится удалить матеріальную точку отъ положенія равновѣсія (см. черт. 27-й).

Въ тѣхъ точкахъ поверхности, въ которыхъ $\delta U = 0$, но величина $\delta^2 U$ имѣетъ знакъ положительный или отрицательный, смотря по направленію перемѣщенія, въ такихъ точкахъ положеніе равновѣсія устойчиво для однихъ перемѣщеній и неустойчиво — для другихъ.

Примѣромъ такихъ положеній равновѣсія можетъ служить, въ примѣрѣ 43-мъ, точка B (чертежъ 27-й), находящаяся на концѣ средней оси эллипсоида. Въ сосѣдствѣ съ этою точкою линіи уровня имѣютъ слѣдующее расположеніе.

Черезъ самую точку B проходятъ два круговыя сѣченія kBk' и $k_1Bk'_1$ эллипсоида, это суть линіи уровня съ параметромъ:

$$U_0 = -\frac{a^2}{2} b^2;$$

внутри угловъ k_1Bk и $k'Bk'_1$ находятся линіи уровня съ параметрами большими U_0 , внутри же угловъ $k'Bk_1$ и k'_1Bk — линіи уровня съ параметрами меньшими U_0 .

Если матеріальная точка будетъ отклонена изъ точки B въ точку g (см. черт. 27), то сила, приложенная къ ней, будетъ стремиться удалить ее отъ B ; напротивъ, при отклоненіи матеріальной точки въ точку h , сила будетъ стремиться приблизить ее къ B .

Подобныя точки причисляются къ положеніямъ неустойчиваго равновѣсія.

И такъ, можемъ сказать, что если матеріальная точка, подверженная силамъ имѣющимъ потенциалъ U , находится на неподвижной гладкой удерживающей поверхности, то поло-

женія устойчиваго равновѣсія суть тѣ точки поверхности, въ которыхъ

$$\delta U = 0, \delta^2 U < 0 \dots\dots\dots (433)$$

Въ каждомъ изъ положеній равновѣсія реакція поверхности равна и противоположна равнодѣйствующей задаваемыхъ силъ, когда матерьяльная точка находится въ покоѣ.

2) Матерьяльная точка находится на гладкой неподвижной неударяющей поверхности.

Реакція такой поверхности не можетъ быть отрицательною, а потому матерьяльная точка можетъ оставаться въ покоѣ только въ тѣхъ точкахъ неударяющей поверхности, въ которыхъ равнодѣйствующая задаваемыхъ силъ нормальна къ поверхности и направлена по отрицательной нормали, или равна нулю.

Напримѣръ, тяжелая матерьяльная точка, прикрѣпленная къ одному концу гибкой нерастяжимой нити, другой конецъ которой неподвиженъ, имѣетъ только одно положеніе равновѣсія: въ самой нижней точкѣ сферы радіуса, равнаго длинѣ нити.

Обратно, тяжелая матерьяльная точка, находящаяся на наружной поверхности неподвижнаго непроницаемаго шара, имѣетъ только одно положеніе равновѣсія въ самой верхней точкѣ шара.

Если задаваемые силы имѣютъ потенциалъ U , то положенія равновѣсія на неударяющей поверхности находятся въ такихъ точкахъ ея, въ которыхъ:

$$\delta U = 0$$

для бесконечно-малыхъ перемѣщеній матерьяльной точки вдоль по поверхности и притомъ

$$\delta U \leq 0$$

для бесконечно-малыхъ перемѣщеній матерьяльной точки въ свободную сторону пространства.

Положенія устойчиваго равновѣсія суть тѣ точки поверхности, въ которыхъ

$$\delta U = 0, \delta^2 U < 0 \dots\dots\dots (434)$$

для перемѣщеній вдоль по поверхности, и притомъ

$$\delta U < 0, \text{ или } \delta U = 0, \delta^2 U < 0 \dots \dots \dots (435)$$

для перемѣщеній въ свободную сторону пространства.

Напримѣръ, положеніе равновѣсія тяжелой матеріальной точки. находящейся на сферѣ, не удерживающей внутри своей полости, есть положеніе устойчивое, потому что въ этой точкѣ, для перемѣщеній по поверхности сферы:

$$\delta U = mg\delta y = 0, \delta^2 U = mg\delta^2 y < 0 \text{ *),}$$

для всякихъ же перемѣщеній въ свободную сторону y уменьшается, а слѣдовательно, для такихъ перемѣщеній:

$$\delta U = mg\delta y < 0.$$

Положеніе же равновѣсія на верхней точкѣ непроницаемаго шара есть положеніе неустойчивое, потому что въ этой точкѣ:

$$x=0, z=0, y=-l$$

$$\delta U = mg\delta y = 0, \delta^2 U = mg \frac{(\delta x)^2 + (\delta z)^2}{l} > 0$$

для перемѣщеній матеріальной точки вдоль по поверхности.

Приводимъ нѣсколько примѣровъ опредѣленія положеній равновѣсія матеріальной точки на удерживающихъ и неудерживающихъ поверхностяхъ.

Примѣръ 44-й. Тяжелая матеріальная точка прикреплена къ одному концу гибкой верастяжимой нити; эта нить перекинута черезъ бесконечно-

$$\begin{aligned} \text{*)} \quad y^2 &= l^2 - x^2 - z^2; y\delta y = -x\delta x - z\delta z \\ y\delta^2 y &= -(\delta y)^2 - (\delta x)^2 - (\delta z)^2 \end{aligned}$$

Въ точкѣ: $x=0, z=0, y=l$:

$$\delta y = 0, \delta^2 y = -\frac{(\delta x)^2 + (\delta z)^2}{l} < 0.$$

малый блокъ съ неподвижною осью и имѣть на другомъ концѣ гири, масса которой равна Q . между тѣмъ, какъ масса матеріальной точки равна m . Опредѣлить положенія равновѣсія матеріальной точки на наклонной плоскости, составляющей уголъ J съ горизонтомъ и проходящей черезъ точку K (черт. 28) вертикальной линіи, проведенной внизъ черезъ центръ O блока; разстояніе OK равно c .

Натяженіе нити или реакцію ея, приложенную къ матеріальной точкѣ M , можно рассматривать, какъ силу постоянной величины gQ , направленную къ точкѣ O .

Въ этомъ случаѣ вопросъ можетъ быть рѣшенъ слѣдующимъ образомъ:

Точка M можетъ находиться въ равновѣсіи только въ вертикальной плоскости, проходящей черезъ точку O и перпендикулярной къ наклонной плоскости; въ этой плоскости она будетъ находиться въ покоѣ въ такомъ положеніи, при которомъ проеція силы тяжести точки M на направленіе ML (черт. 28) равна проеціи реакціи нити на направленіе MK ; означая уголъ OMK чрезъ φ , будемъ имѣть слѣдующее равенство:

$$gQ \cos \varphi = mg \sin J,$$

которое должно быть удовлетворено въ положеніяхъ равновѣсія матеріальной точки

Изъ этого уравненія опредѣлится величина косинуса угла φ :

$$\cos \varphi = \frac{m}{Q} \sin J;$$

чтобы рѣшеніе было возможно, необходимо, чтобы Q было болѣе $m \sin J$.

Если наклонная плоскость не удерживаетъ матеріальную точку отъ перемѣщеній вверхъ, то, для равновѣсія точки на плоскости, необходимо, чтобы было

$$mg \cos J \geq gQ \sin \varphi.$$

Это условіе будетъ удовлетворено во всякомъ случаѣ, если φ отрицательное, то есть, если точка O ниже точки K ; если же O выше точки K , то оно будетъ удовлетворено въ томъ случаѣ, когда

$$\frac{m^2}{Q^2} \cos^2 J \geq \sin^2 \varphi,$$

то есть, когда:

$$\frac{m^2}{Q^2} \cos^2 J \geq 1 - \frac{m^2}{Q^2} \sin^2 J, \quad \frac{m}{Q} \geq 1.$$

Такимъ образомъ мы видимъ, что на неудерживающей плоскости равновѣсїе возможно при условїи, что Q не болѣе m и не менѣе $m \sin J$.

Если равновѣсїе возможно, то оно будетъ навѣрно устойчивое. Въ самомъ дѣлѣ, при перемѣщенїи точки M по \overline{MK} уголъ φ увеличивается, а, слѣдовательно, проекція силы gQ на это направление уменьшается, между тѣмъ, какъ проекція силы mg на направление \overline{ML} остается постоянною; поэтому дѣйствіе послѣдней силы становится преобладающимъ и матеріальная точка побуждается къ возвращенію назадъ. Напротивъ, при перемѣщенїи точки по \overline{ML} уголъ φ уменьшается, а, слѣдовательно, дѣйствіе силы gQ становится преобладающимъ надъ дѣйствіемъ силы mg ; поэтому и при такомъ перемѣщенїи, силы побуждаютъ матеріальную точку возвратиться въ положеніе равновѣсїя.

Примѣръ 45-й. Положеніа равновѣсїа тяжелой матеріальной точки на поверхности эллипсоида:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

если къ матеріальной точкѣ, кромѣ силы тяжести, приложена сила постоянной величины gQ , направленная къ центру эллипсоида; ось Z^{000} предполагается направленною вертикально внизъ.

Въ этомъ случаѣ силы имѣютъ слѣдующій потенціалъ:

$$U = g(mx - Qr); \quad r^2 = x^2 + y^2 + z^2;$$

а поэтому:

$$\delta U = g(m\delta x - Q\delta r); \quad \delta^2 U = g(m\delta^2 x - Q\delta^2 r),$$

гдѣ:

$$x\delta z = -\frac{c^2}{a^2}x\delta x - \frac{c^2}{b^2}y\delta y;$$

$$x\delta^2 z + (\delta z)^2 = -\frac{c^2}{a^2}(\delta x)^2 - \frac{c^2}{b^2}(\delta y)^2,$$

$$\delta r = \frac{x\delta x + y\delta y + z\delta z}{r} = \left(1 - \frac{c^2}{a^2}\right)\frac{x\delta x}{r} + \left(1 - \frac{c^2}{b^2}\right)\frac{y\delta y}{r}$$

$$\delta^2 r = \frac{(\delta x)^2 + (\delta y)^2 + (\delta z)^2 + x\delta^2 z}{r} - \frac{(\delta r)^2}{r} =$$

$$= \left(1 - \frac{c^2}{a^2}\right)\frac{(\delta x)^2}{r} + \left(1 - \frac{c^2}{b^2}\right)\frac{(\delta y)^2}{r} - \frac{(\delta r)^2}{r}.$$

Исключивъ δz изъ δU , получимъ:

$$\delta U = -g \left[\left(\frac{m}{z} c^2 + \frac{Q}{r} (a^2 - c^2) \right) \frac{x \delta x}{a^2} + \left(\frac{m}{z} c^2 + \frac{Q}{r} (b^2 - c^2) \right) \frac{y \delta y}{b^2} \right],$$

гдѣ r означаетъ положительную величину разстоянія точки отъ центра эллипсоида.

Мы найдемъ слѣдующія положенія равновѣсія:

1) Точки $x=0$, $y=0$ $z=\pm c$; въ нихъ:

$$\delta^2 U = -\frac{g}{c} \left[\left((a^2 - c^2) Q \pm c^2 m \right) \left(\frac{\delta x}{a} \right)^2 + \left((b^2 - c^2) Q \pm c^2 m \right) \left(\frac{\delta y}{b} \right)^2 \right],$$

гдѣ знаки $+$ соотвѣтствуютъ нижней, а знаки $-$ — верхней точкѣ; слѣдовательно, нижняя точка есть всегда положеніе устойчиваго равновѣсія, верхняя же — только тогда, когда

$$Q \geq \frac{c^2 m}{b^2 - c^2}.$$

2) точки $x=0$,

$$\frac{x_1}{c} = -\frac{b}{\sqrt{b^2 - c^2}} \frac{mc}{\sqrt{m^2 c^2 + Q^2 (b^2 - c^2)}}, \quad \frac{y}{b} = \pm \sqrt{1 - \frac{z_1^2}{c^2}};$$

здѣсь:

$$\delta^2 U = -g \left[(a^2 - b^2) \frac{Q(\delta x)^2}{r a^2} - (b^2 - c^2) \frac{Q c^2}{r^3} \frac{y^2 (\delta y)^2}{z^2 b^2} \right],$$

поэтому въ этихъ точкахъ положеніе равновѣсія не представляетъ полной устойчивости.

3) Точки:

$$y=0, \quad \frac{z_2}{c} = -\frac{a}{\sqrt{a^2 - c^2}} \frac{mc}{\sqrt{m^2 c^2 + Q^2 (a^2 - c^2)}}$$

$$\frac{x}{a} = \pm \sqrt{1 - \frac{z_2^2}{c^2}},$$

въ которыхъ

$$\delta^2 U = gQ \left[(a^2 - b^2) \frac{(\delta y)^2}{r b^2} + (a^2 - c^2) \frac{c^2 x^2 (\delta x)^2}{r^3 z^2 a^2} \right];$$

положенія равновѣсія — неустойчивыя.

3) *Матерьяльная точка находится на неподвижной негладкой поверхности.*

Для того, чтобы матерьяльная точка могла оставаться въ покоѣ на негладкой неподвижной поверхности, нужно, чтобы сила тренія, приложенная къ матерьяльной точкѣ, уравнивалась съ проекціею равнодѣйствующей задаваемыхъ силъ на касательную плоскость. Величина силы тренія равна $\times \sqrt{N^2}$, гдѣ $\sqrt{N^2}$ есть положительно взятая величина нормальной реакціи поверхности, а \times есть численный коэффициентъ, заключающійся между нулемъ и наибольшимъ коэффициентомъ k_1 тренія покоящейся матерьяльной точки о неподвижную данную поверхность. Реакція N по направленію положительной нормали равна проекціи равнодѣйствующей F задаваемыхъ силъ на направленіе отрицательной нормали.

На удерживающей поверхности реакція N можетъ быть положительною или отрицательною; при равновѣсіи матерьяльной точки на такой поверхности:

$$F \sin (F, N) = \times \sqrt{N^2}, \quad - F \cos (F, N) = N,$$

гдѣ \times не менѣе нуля и не болѣе k_1 .

Отсюда слѣдуетъ, что:

$$\operatorname{tg} (F, N) = \pm \times, \quad \times \leq k_1, \dots \dots \dots (436)$$

гдѣ знакъ \pm соответствуетъ тѣмъ случаямъ, въ которыхъ сила F составляетъ острый уголъ съ положительною нормалью, знакъ $(-)$ тѣмъ случаямъ, въ которыхъ сила F составляетъ острый уголъ съ отрицательною нормалью.

Число или дробь k_1 можно разсматривать, какъ тангенсъ нѣкотораго угла ϵ_1 , называемаго *угломъ тренія* между данною поверхностью и данною матерьяльною точкою при взаимномъ ихъ покоѣ.

Изъ предыдущаго видно, что, для равновѣсія матерьяльной точки на неподвижной негладкой удерживающей поверхности, необходимо, чтобы острый уголъ, составляемый направленіемъ силы F съ положительною или отрицательною нормалью, былъ не болѣе ϵ_1 , гдѣ

$$k_1 = \operatorname{tg} \epsilon_1 \dots \dots \dots (437)$$

Реакція неударивающей поверхности не можетъ быть отрицательною; поэтому, на негладкой неударивающей поверхности матерьяльная точка можетъ оставаться въ покоѣ въ тѣхъ мѣстахъ поверхности, въ которыхъ направленіе силы F составляетъ съ отрицательною нормалію уголъ, не большій ϵ_1 .

Представимъ себѣ коническую поверхность, вершина которой находится въ какой либо точкѣ M данной неударивающей поверхности, и производящія которой составляютъ острый уголъ ϵ_1 съ отрицательною нормалію къ поверхности. Точка M будетъ положеніемъ равновѣсія матерьяльной точки, если сила F , приложенная къ последней, будетъ имѣть направленіе, не выходящее за предѣлы выше-означеннаго конуса; такой конусъ называется конусомъ тренія.

Вслѣдствіе такого простора условій равновѣсія, мѣста положеній равновѣсія матерьяльной точки на негладкой поверхности занимаютъ на ней цѣлые пояса или площади, во всѣхъ точкахъ которыхъ матерьяльная точка можетъ оставаться въ покоѣ.

Напримѣръ, тяжелая матерьяльная точка, находящаяся на наружной поверхности твердаго негладкаго неподвижнаго шара, можетъ оставаться въ покоѣ во всѣхъ тѣхъ точкахъ поверхности, въ которыхъ направленіе нормали, проведенной къ центру шара, составляетъ съ направленіемъ силы тяжести уголъ не большій ϵ_1 ; всѣ такіа точки находятся на томъ сегментѣ сферической поверхности, который выше уровня:

$$y = -R \cos \epsilon_1,$$

(ось Y^{000} направлена вертикально внизъ); матерьяльная точка можетъ оставаться въ покоѣ во всѣхъ точкахъ этой части поверхности сферы.

Тяжелая матерьяльная точка можетъ оставаться въ покоѣ во всѣхъ точкахъ наклонной плоскости, составляющей съ горизонтомъ уголъ J , если только уголъ J не болѣе угла ϵ_1 тренія между покоящеюся матерьяльною точкою и наклонною плоскостью.

Примѣръ. Опредѣлить ту часть поверхности эллипсоида:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

всѣ точки которой суть положенія равновѣсія тяжелой матерьяльной точки, находящейся на наружной поверхности эллипсоида; положительная ось Z^{000} параллельна направлению силы тяжести; коэффициентъ тренія покоя $k_1 = 0,16$.

Эта часть поверхности заключаетъ въ себѣ самую высшую точку эллипсоида и ограничена линіею пересѣченія поверхности его съ конической поверхностью:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2} 0,0256.$$

Примѣръ 46-й. Тяжелая матерьяльная точка находится на наклонной плоскости и притягивается къ точкѣ O (черт. 28) силою, прямопропорціональною разстоянію отъ этой точки; если матерьяльная точка находится въ точкѣ K , то величина этой силы равна gQ , гдѣ Q меньше m (массы матерьяльной точки). Определить положенія равновѣсія матерьяльной точки на наклонной плоскости, принимая въ расчетъ треніе.

Примемъ точку K за начало координатныхъ осей, направленныхъ такъ: положительная ось Y^{000} внизъ по линіи наибольшаго ската по наклонной плоскости, ось X^{000} горизонтально, ось Z^{000} по нормали къ плоскости, вверхъ; тогда координаты точки O будутъ: $x = 0$, $y = -c \sin J$, $z = c \cos J$.

Проекціи на оси координатъ равнодѣйствующей задаваемыхъ силъ суть:

$$X = -Qg \frac{x}{c}, \quad Y = mg \sin J - Qg \frac{y + c \sin J}{c}$$

$$Z = -mg \cos J + Qg \cos J.$$

Равновѣсіе матерьяльной точки на плоскости возможно въ тѣхъ положеніяхъ ея, въ которыхъ:

$$-xZ = \sqrt{X^2 + Y^2}, \quad x \leq \operatorname{tg} \varepsilon_1,$$

или:

$$x \cos J \left(1 - \frac{Q}{m}\right) = \sqrt{\frac{Q^2 x^2}{m^2 c^2} + \left(\frac{Q}{m} \frac{y}{c} - \sin J \left(1 - \frac{Q}{m}\right)\right)^2}.$$

Всѣ положенія равновѣсія заключаются внутри круга:

$$x^2 + \left(y - c \sin J \left(\frac{m}{Q} - 1\right)\right)^2 = \left(\frac{m}{Q} - 1\right)^2 c^2 \cos^2 J \operatorname{tg}^2 \varepsilon_1.$$

центръ котораго представляетъ положеніе равновѣсія на гладкой наклонной плоскости, а радіусъ равенъ:

$$\left(\frac{m}{Q} - 1\right) c \cos J \operatorname{tg} \epsilon_1.$$

Каждой величинѣ x соотвѣтствуетъ своя окружность радіуса

$$x \left(\frac{m}{Q} - 1\right) c \cos J.$$

Примѣръ 47-й. Опредѣлить мѣсто положеній равновѣсія въ примѣрѣ 44-мъ, предполагая существованіе силы тренія между наклонною плоскостью и матерьяльною точкою m .

Расположивъ оси координатъ такъ, какъ въ предыдущемъ примѣрѣ, мы найдемъ, что проэкціи равнодѣйствующей задаваемыхъ силъ суть:

$$X = -Qg \frac{x}{r}, \quad Y = mg \left(p \sin J - \frac{Q}{m} \frac{y}{r}\right), \quad Z = -mgp \cos J,$$

$$p = 1 - \frac{Q}{m} \frac{c}{r}, \quad r^2 = x^2 + y^2 + c^2 + 2cy \sin J.$$

Всѣ положенія равновѣсія заключаются внутри кривой линіи:

$$x^2 + \left(y - c \sin J \left(\frac{mr}{Qc} - 1\right)\right)^2 = \left(\frac{mr}{Qc} - 1\right)^2 c^2 \cos^2 J \operatorname{tg}^2 \epsilon_1.$$

4) *Матерьяльная точка находится на неподвижной кривой линіи.*

Матерьяльная точка, находящаяся на гладкой неподвижной кривой линіи, можетъ оставаться въ покоѣ въ тѣхъ точкахъ кривой, въ которыхъ проэкція задаваемой силы на касательную къ кривой равна нулю, то есть тамъ, гдѣ:

$$X \frac{dx}{ds} + Y \frac{dy}{ds} + Z \frac{dz}{ds} = 0. \dots\dots\dots (438)$$

Если, при отклоненіи матерьяльной точки изъ ея положенія равновѣсія на удерживающей кривой, сила F побуждаетъ ее возвратиться въ это положеніе, то такое положеніе равновѣсія — устойчивое.

Когда сила F имѣетъ потенциалъ $U(x, y, z)$, то проекція ея на направленіе касательной къ кривой выразится такъ:

$$F \cos(F, v) = \frac{\partial U}{\partial x} \frac{dx}{ds} + \frac{\partial U}{\partial y} \frac{dy}{ds} + \frac{\partial U}{\partial z} \frac{dz}{ds};$$

такъ что, если координаты x, y, z точекъ кривой линіи будутъ выражены функціями отъ s , то будетъ:

$$\pm F \cos(F, v) = \frac{dU}{ds}, \dots \dots \dots (439)$$

гдѣ верхній знакъ относится къ тѣмъ случаямъ, въ которыхъ скорость направлена въ сторону возрастающихъ s .

Положенія равновѣсія суть тѣ точки кривой линіи, въ которыхъ

$$\frac{dU}{ds} = 0; \dots \dots \dots (440)$$

притомъ положенія устойчиваго равновѣсія суть такія точки кривой, въ которыхъ:

$$\frac{d^2 U}{ds^2} < 0, \dots \dots \dots (441)$$

т. е. тѣ, въ которыхъ значенія, принимаемыя функціею $U(s)$ на кривой линіи, имѣютъ максимумъ.

Примѣръ 48-й. Тяжелая матеріальная точка находится на винтовой линіи.

$$x = R \cos\left(\frac{s \cos \alpha}{R}\right), \quad y = R \sin\left(\frac{s \cos \alpha}{R}\right), \quad z = s \sin \alpha,$$

ось которой вертикальна (ось Z^{000} направлена снизу вверхъ); матеріальная точка отталкивается отъ начала координатъ силою, обратно пропорціо-
нальною квадрату разстоянія; опредѣлить положенія равновѣсія.

Здѣсь:

$$U = -mgz - \frac{m\mu^2}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = -m\left(g s \sin \alpha + \frac{\mu^2}{\sqrt{R^2 + s^2 \sin^2 \alpha}}\right);$$

$$\frac{dU}{ds} = -mg \sin \alpha \left(1 - \frac{\mu^2 s \sin \alpha}{R^2 + s^2 \sin^2 \alpha}\right)$$

$$\frac{d^2 U}{ds^2} = m\mu^2 \sin^2 \alpha \left(\frac{3R^2 - 2s^2}{r^5}\right); \quad r^2 = R^2 + s^2 \sin^2 \alpha$$

Первая производная отъ U обращается въ нуль въ тѣхъ точкахъ кривой линіи, въ которыхъ:

$$s = \frac{gr^3}{\mu^2 \sin \alpha};$$

такъ какъ r есть величина положительная, то и s болѣе нуля, слѣдовательно, положенія равновѣсія находятся только на той части кривой линіи, которая выше плоскости XU .

Послѣднее уравненіе можно представить въ слѣдующемъ видѣ:

$$r^6 - \frac{\mu^4}{g^2} s^2 \sin^2 \alpha = 0$$

$$(r^2)^3 - \frac{\mu^4}{g^2} r^2 + \frac{\mu^4}{g^2} R^2 = 0 \dots \dots \dots (443)$$

Тѣ положительные корни этого уравненія третьей степени, которые не менѣе R^2 , опредѣляютъ положенія равновѣсія; такихъ корней можетъ быть только два, такъ какъ при $r^2 = +\infty$ и при $r^2 = R^2$ первая часть уравненія (443) имѣетъ знакъ положительный.

Эти два корня будутъ дѣйствительные, если будетъ удовлетворено условіе:

$$R^2 < \frac{2}{3} r_0^2, \quad r_0^2 = \frac{\mu^2}{g\sqrt{3}}.$$

Величина r_0^2 есть корень производной первой части уравненія (443) по r^2 , то есть:

$$3(r_0^2)^2 - \frac{\mu^4}{g^2} = 0;$$

поэтому изъ двухъ корней уравненія (443), болѣе R^2 , одинъ долженъ быть менѣе, а другой — болѣе r_0^2 ; означимъ первый черезъ r_1^2 , второй — черезъ r_2^2 .

Такъ какъ

$$r_2^2 > r_0^2 > \frac{3}{2} R^2,$$

то этотъ корень r_2^2 опредѣляетъ навѣрно положеніе устойчиваго равновѣсія.

Величина и направленіе силы F , приложенной въ матерьяльной точкѣ, находящейся въ покоѣ въ одномъ изъ положеній равновѣсія на кривой, представляетъ величину и направленіе давленія,

производимого точкою на кривую (§ 52); поэтому реакция кривой линия равна и прямопротивоположна силѣ F .

Если кривая линия есть линия пересѣченія двухъ неподвижныхъ гладкихъ поверхностей:

$$f_1(x, y, z)=0, \quad f_2(x, y, z)=0,$$

то реакціи этихъ поверхностей опредѣлятся, какъ составляющія, по нормалямъ N_1 и N_2 , реакціи кривой линіи, то есть, величины \mathfrak{R}_1 и \mathfrak{R}_2 опредѣлятся изъ равенствъ (379, а) и (379, b), если въ нихъ сдѣлать Kf_1 и Kf_2 равными нулю.

5) *Матеріальная точка находится на пересѣченіи трехъ неподвижныхъ поверхностей, пересѣкающихся въ одной точкѣ.*

Если всѣ три поверхности удерживающія, то положеніе точки вполне опредѣлено. Реакціи поверхностей:

$$f_1(x, y, z)=0, \quad f_2(x, y, z)=0, \quad f_3(x, y, z)=0$$

опредѣлятся изъ равенствъ:

$$\left. \begin{aligned} X + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial x} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial x} + \lambda_3 \frac{\partial f_3}{\partial x} &= 0 \\ Y + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial y} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial y} + \lambda_3 \frac{\partial f_3}{\partial y} &= 0 \\ Z + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial z} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial z} + \lambda_3 \frac{\partial f_3}{\partial z} &= 0 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (444)$$

$$\mathfrak{R}_1 = \lambda_1 \Delta f_1, \quad \mathfrak{R}_2 = \lambda_2 \Delta f_2, \quad \mathfrak{R}_3 = \lambda_3 \Delta f_3.$$

Давленіе матеріальной точки на точку пересѣченія этихъ трехъ поверхностей имѣетъ величину и направленіе силы F ; уравненія (444) выражаютъ, что реакціи \mathfrak{R}_1 , \mathfrak{R}_2 , \mathfrak{R}_3 суть составляющія по нормалямъ N_1 , N_2 , N_3 силы, равной и прямопротивоположной силѣ F .

Если матеріальная точка помѣщена въ точкѣ пересѣченія четырехъ или большаго числа неподвижныхъ поверхностей, то величины реакцій этихъ поверхностей окажутся неопредѣленными; напримѣръ, въ случаѣ четырехъ поверхностей, можемъ приписать

произвольную величину реакцій \mathfrak{N}_4 , тогда величины реакцій \mathfrak{N}_1 , \mathfrak{N}_2 , \mathfrak{N}_3 опредѣлятся тѣмъ, что геометрическая сумма всѣхъ четырехъ реакцій и силы F должна быть равна нулю:

$$\bar{\mathfrak{N}}_1 + \bar{\mathfrak{N}}_2 + \bar{\mathfrak{N}}_3 + \bar{\mathfrak{N}}_4 + \bar{F} = 0 \quad *)$$

§ 56. Импульсъ силы.

Въ началѣ параграфа 23 было сказано, что понимаютъ подъ именемъ количества движенія матерьяльной точки, какими единицами оно измѣряется, какъ оно изображается длиною и что понимаютъ подъ именемъ проекцій количества движенія.

*) Для выхода изъ этой неопредѣленности, приходится принимать въ расчетъ упругость тѣлъ, образующихъ преграды. Для поясненія, приводимъ слѣдующій простой примѣръ.

Матерьяльная точка, вѣсъ которой mg , виситъ въ покое на двухъ нитяхъ неравной длины; первая нить длины l , прикреплена верхнимъ концомъ въ началѣ координатъ ($x=0$, $y=0$, $z=0$), вторая, длины $(l+c)$, прикреплена верхнимъ концомъ въ точкѣ ($x=0$, $y=0$, $z=-c$). Если предполагать нити нерастяжимыми, то матерьяльная точка будетъ находиться въ покое въ положеніи ($x=0$, $y=0$, $z=l$), причемъ сумма величинъ реакцій \mathfrak{N}_1 , \mathfrak{N}_2 нитей будетъ равна mg ; величины же каждой изъ этихъ реакцій будутъ неопредѣленны.

Если же примемъ въ расчетъ упругость нитей, то эта неопредѣленность будетъ устранена. Пусть ω_1 и ω_2 суть площади поперечныхъ сѣченій нитей, E_1 и E_2 — ихъ модули упругости, ε — удлинёнія нитей, такъ что длина первой нити въ натяженномъ состояніи равна $(l+\varepsilon)$, а длина второй нити въ томъ же состояніи равна $(l+c+\varepsilon)$; вследствие растяженія нитей, положеніе равновѣсія матерьяльной точки будетъ въ точкѣ $z=l+\varepsilon$.

На основаніи извѣстныхъ законовъ растяженія упругихъ стержней и нитей:

$$\frac{\varepsilon}{l} = \frac{\mathfrak{N}_1}{E_1 \omega_1}; \quad \frac{\varepsilon}{l+c} = \frac{\mathfrak{N}_2}{E_2 \omega_2};$$

изъ этихъ равенствъ и изъ равенства

$$\mathfrak{N}_1 + \mathfrak{N}_2 = mg$$

опредѣлимъ: величину ε и отношеніе между величинами реакцій:

$$\frac{\mathfrak{N}_1}{\mathfrak{N}_2} = \frac{E_1 \omega_1}{E_2 \omega_2} \left(1 + \frac{c}{l} \right).$$

Согласно съ этимъ будемъ имѣть въ виду, что количеству движенія матерьяльной точки мы приписываемъ направленіе совпадающее съ направленіемъ скорости точки; мы будемъ представлять себѣ, что количество движенія изображено длиною, имѣющею направленіе скорости и во столько разъ большею единицы длины, во сколько разъ изображаемое количество движенія болѣе единицы количествъ движенія.

Пусть t и t' суть два какіе либо момента времени; координаты точки, величины количества движенія и проэкции количества движенія на оси координатъ въ эти моменты обозначимъ слѣдующими знаками:

въ моментъ t : $x, y, z, mv, mx', my', mz'$

въ моментъ t' : $X, Y, Z, mV, mX', mY', mZ'$ *).

Измѣненіемъ количества движенія матерьяльной точки въ теченіи промежутка времени отъ t до t' мы будемъ называть то количество движенія, въ которое изобразится геометрическою разностью между длинами, изображающими количества движенія mv и mV .

Проекции на оси координатъ этого измѣненія количества движенія выразятся разностями:

$$mX' - mx', mY' - my', mZ' - mz'.$$

(На черт. 29 количества движенія mv и mV изображены длинами AK_2 и AK_1 , проведенными изъ какой либо точки A ; измѣненіе количества движенія изобразится длиною $A\bar{H}$, равною и параллельною длинѣ $K_1\bar{K}_2$).

Положимъ, что свободная матерьяльная точка движется подъ вліяніемъ дѣйствія приложенной къ ней силы F , которой проэкции

$$X, Y, Z$$

суть нѣкоторыя функціи времени, координатъ точки и скорости ея.

*). Различіе въ обозначеніяхъ состоитъ въ томъ, что величины, относящіяся къ болѣе позднему моменту t' , обозначены прямыми буквами, между тѣмъ какъ величины, относящіяся къ раннему моменту t , обозначены курсивными буквами.

При опредѣленномъ движеніи этой матеріальной точки, координаты ея суть опредѣленныя функціи времени:

$$f_1(t), f_2(t), f_3(t).$$

Помножимъ на dt дифференціальныя уравненія движенія матеріальной точки, получимъ:

$$d(mx') = Xdt, d(my') = Ydt, d(mz') = Zdt; \dots (445)$$

затѣмъ представимъ себѣ, что координаты точки, входящія въ X , Y , Z , замѣнены функціями f_1, f_2, f_3 , и что производныя координатъ по времени, заключающіяся въ X , Y , Z , замѣнены производными функцій f_1, f_2, f_3 ; тогда X , Y , Z выразятся функціями времени.

Взявъ интегралы въ предѣлахъ отъ t до t отъ обѣихъ частей каждаго изъ равенствъ (445), получимъ:

$$mx' - mx = I_x, my' - my = I_y, mz' - mz = I_z, \dots (446)$$

гдѣ

$$I_x = \int_t^t Xdt, I_y = \int_t^t Ydt, I_z = \int_t^t Zdt \dots (447)$$

Изъ равенствъ (446) видно, что измѣненіе количества движенія точки въ теченіи промежутка времени отъ t до t равняется величинѣ:

$$I = \sqrt{I_x^2 + I_y^2 + I_z^2} \dots \dots \dots (448)$$

и имѣетъ такое направленіе, косинусы угловъ котораго съ осями координатъ равны отношеніямъ:

$$\frac{I_x}{I}, \frac{I_y}{I}, \frac{I_z}{I}.$$

Величина I называется *импульсомъ силы F въ теченіи промежутка времени отъ t до t* ; мы приписываемъ импульсу

не только величину, но и направленіе, составляющее съ осями координатъ углы, косинусы которыхъ суть:

$$I \cos (I, X) = I_x, \quad I \cos (I, Y) = I_y, \quad I \cos (I, Z) = I_z.$$

Равенства (446) выражаютъ тогда, что *измѣненіе количества движенія матеріальной точки въ теченіи промежутка времени отъ t до t равняется импульсу силы F въ теченіи того же промежутка времени*

Величины I_x , I_y , I_z суть проэкціи импульса на оси координатъ.

Величины вторыхъ частей равенствъ (445) суть проэкціи на оси координатъ импульса силы F въ теченіи элемента времени dt ; этотъ *элементарный импульсъ* имѣетъ безконечно-малую величину, если сила F имѣетъ величину конечную.

Разность между величинами живой силы матеріальной точки въ моменты t и t можетъ быть выражена произведеніемъ изъ импульса на полусумму проэкцій скоростей v и v на направленіе импульса; въ самомъ дѣлѣ, помноживъ равенства (446) на x' , y' , z' и сложивъ, получимъ:

$$mv^2 - mvv \cos (v, v) = Iv \cos (v, I);$$

помноживъ тѣ же равенства на x' , y' , z' и сложивъ ихъ, получимъ:

$$mvv \cos (v, v) - mv^2 = Iv \cos (v, I);$$

отсюда же найдемъ:

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{mv^2}{2} = \frac{I}{2} (v \cos (v, I) + v \cos (v, I)) \dots (449)$$

§ 57. Мгновенныя силы.

Нѣкоторые явленія совершаются подъ вліяніемъ силъ, дѣйствующихъ въ теченіи весьма малаго промежутка времени, но достигающихъ огромной величины во время своего дѣйствія; таковы, наприимѣръ, силы, развивающіяся при ударахъ тѣлъ, при разложеніи взрывчатыхъ веществъ, и другія.

Подобныя силы, несмотря на краткую продолжительность своего дѣйствія, производить весьма замѣтныя измѣненія въ скоростяхъ тѣхъ тѣлъ, къ которымъ онѣ приложены, между тѣмъ, какъ перемѣщенія, совершенныя этими тѣлами во время дѣйствія такихъ силъ, сравнительно малы, а часто даже ничтожны.

Положимъ, что къ свободной матерьяльной точкѣ приложена такая сила \mathfrak{F} , которая дѣйствуетъ на нее въ теченіи весьма короткаго промежутка времени ϑ , но сообщаетъ ей за время своего дѣйствія импульсъ замѣтной величины. Пусть t_0 есть моментъ начала дѣйствія этой силы, $t = (t_0 + \vartheta)$ — моментъ окончанія ея дѣйствія; x_0, y_0, z_0 — координаты точки m въ моментъ t_0 ; x'_0, y'_0, z'_0 — проекціи на оси координатъ скорости v_0 точки m въ моментъ t_0 .

Кромѣ того, означимъ: буквами $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z}$ — проекціи этой быстро-дѣйствующей силы \mathfrak{F} на оси координатъ, буквою \mathfrak{Z} величину и направленіе импульса этой силы за все время ея дѣйствія; проекціи этого импульса на оси координатъ будемъ обозначать такъ: $\mathfrak{Z}_x, \mathfrak{Z}_y, \mathfrak{Z}_z$.

Если къ матерьяльной точкѣ не приложено болѣе никакихъ силъ, кромѣ силы \mathfrak{F} , то результатъ окончательнаго дѣйствія этой силы на точку m будетъ заключаться:

въ измѣненій количества движенія матерьяльной точки за время дѣйствія силы \mathfrak{F} :

$$mx' - mx'_0 = \mathfrak{Z}_x, \quad my' - my'_0 = \mathfrak{Z}_y, \quad mz' - mz'_0 = \mathfrak{Z}_z \dots (450)$$

и въ измѣненіи положенія матерьяльной точки въ теченіи того же промежутка времени.

Разности между координатами точки m въ концѣ и въ началѣ промежутка времени ϑ выразятся слѣдующими формулами:

$$x - x_0 = x'_0 \vartheta + \frac{1}{m} \int_{t_0}^t dt \int_{t_0}^t \mathfrak{X} dt \dots (451, a)$$

$$y - y_0 = y'_0 \vartheta + \frac{1}{m} \int_{t_0}^t dt \int_{t_0}^t \mathfrak{Y} dt \dots (451, b)$$

$$z - z_0 = z_0 \vartheta + \frac{1}{m} \int_{t_0}^t dt \int_{t_0}^t Z dt; \dots\dots\dots (451, c)$$

эти разности мы условимся называть проакціями на оси координатъ перемѣщенія точки въ теченіи промежутка времени ϑ .

Если импульсъ Z , сообщаемый силою \mathfrak{F} матеріальной точкѣ, имѣетъ замѣтную (но не бесконечно-большую) величину, продолжительность же ϑ дѣйствія силы настолько ничтожна, что можно пренебречь всѣми перемѣщеніями, совершенными за время ϑ , то такая сила \mathfrak{F} называется *мгновенною силою*.

Степень малости промежутка времени ϑ должна быть такова, чтобы можно было пренебречь длиною:

$$V\vartheta$$

сравнительно съ конечными длинами, входящими въ наши расчеты; здѣсь V означаетъ какую либо скорость конечной величины.

При такой степени малости промежутка времени ϑ можно пренебречь перемѣщеніями, совершенными за это время какими бы то ни было точками, движущимися одновременно съ матеріальною точкою m , если только скорости этихъ точекъ имѣютъ конечныя величины.

То же самое можно сказать относительно величины перемѣщенія матеріальной точки m за время ϑ , если только импульсы силы \mathfrak{F} за время отъ момента t_0 до какого либо момента $t < t_0 + \vartheta$ имѣютъ величины конечныя; въ самомъ дѣлѣ, если импульсъ

$$J = \left[\left(\int_{t_0}^t \mathfrak{F} dt \right)^2 + \left(\int_{t_0}^t \mathfrak{D} dt \right)^2 + \left(\int_{t_0}^t Z dt \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

не превышаетъ, ни при какомъ t , конечной величины J , то абсолютныя величины интеграловъ вторыхъ частей равенствъ (451) менѣе величины

$$\frac{J}{m} \vartheta.$$

гдѣ частное ($J:m$) выражаетъ нѣкоторую конечную скорость; по малости же промежутка времени θ , мы можемъ пренебречь длинами:

$$x_0'\theta, y_0'\theta, z_0'\theta, \frac{J}{m}\theta,$$

а, слѣдовательно, и перемѣщеніемъ, ^{$x-x_0$} ^{$y-y_0$} ^{$z-z_0$} ^{$\frac{J}{m}\theta$} материальной точки за время θ .

Принимая во вниманіе все сказанное въ настоящемъ параграфѣ, можемъ въ слѣдующихъ выраженіяхъ высказать опредѣленіе понятія о мгновенной силѣ, приложенной къ материальной точкѣ.

Мгновенная сила дѣйствуетъ въ продолженіи такого малаго промежутка времени, въ теченіи котораго могутъ совершиться только самыя незначительныя, пренебрегаемыя нами, перемѣщенія точекъ, движущихся съ конечными скоростями.

Не смотря на кратковременность своего дѣйствія, мгновенная сила сообщаетъ той материальной точкѣ, къ которой она приложена, импульсъ конечной не малой величины; перемѣщеніе же материальной точки за время дѣйствія мгновенной силы — ничтожно.

Къ этому слѣдуетъ еще прибавить, что импульсъ, сообщаемый материальной точкѣ за время θ всякою немгновенною силою, приложенною къ этой точкѣ, ничтоженъ сравнительно съ импульсомъ силы мгновенной; поэтому формулы (450) справедливы и въ тѣхъ случаяхъ, въ которыхъ къ материальной точкѣ приложена, кромѣ мгновенной силы \vec{F} , какая либо немгновенная сила F ; импульсомъ последней за время отъ t_0 до $(t_0 + \theta)$ мы пренебрегаемъ.

§ 58. Ударъ материальной точки о преграждающую поверхность.

Положимъ, что свободная материальная точка m , подверженная дѣйствію нѣкоторой немгновенной силы F , совершаетъ движеніе:

$$x=f_1(t), y=f_2(t), z=f_3(t), \dots \dots \dots (452)$$

гдѣ x, y, z суть координаты движущейся материальной точки.

Пусть, кроме того, имѣется неудерживающая преграда, образуемая поверхностью:

$$f(x, y, z, t) = 0, \dots \dots \dots (453)$$

причемъ предполагается, что уравненіе этой неудерживающей поверхности написано такъ, какъ слѣдуетъ по условію, сдѣланному въ началѣ параграфа 34-го.

Матерьяльная точка движется свободно, пока не встрѣтитъ этой поверхности.

При встрѣчѣ матерьяльной точки съ преграждающею поверхностью координаты матерьяльной точки должны будутъ удовлетворять уравненію поверхности; а потому моментъ t_0 встрѣчи долженъ быть дѣйствительнымъ корнемъ уравненія:

$$f[f_1(t_0), f_2(t_0), f_3(t_0), t_0] = 0.$$

Координаты матерьяльной точки и проэкціи на оси координатъ скорости ея въ этотъ моментъ будутъ слѣдующія:

$$x_0 = f_1(t_0), \quad y_0 = f_2(t_0), \quad z_0 = f_3(t_0)$$

$$x'_0 = f'_1(t_0), \quad y'_0 = f'_2(t_0), \quad z'_0 = f'_3(t_0).$$

Означимъ черезъ v_0 величину и направленіе скорости абсолютнаго движенія матерьяльной точки въ моментъ t_0 и черезъ u_0 — величину и направленіе скорости относительнаго движенія ея по отношенію къ той средѣ, которой принадлежитъ преграждающая поверхность (см. § 33, стр. 175—176, § 34, стр. 180).

Дальнѣйшее состояніе движенія матерьяльной точки зависитъ отъ того, составляетъ ли относительная скорость u_0 острый или тупой уголъ съ положительною нормалью къ поверхности (453).

Если

$$\frac{\partial f}{\partial x} x'_0 + \frac{\partial f}{\partial y} y'_0 + \frac{\partial f}{\partial z} z'_0 + \frac{\partial f}{\partial t} > 0,$$

то есть

$$v_0 \cos(v_0, N) > - \frac{1}{\Delta f} \frac{\partial f}{\partial t},$$

или

$$u_0 \cos(u_0, N) > 0,$$

(см. § 34, формула (277)), то материальная точка продолжает движение, выражаемое формулами (452), без всякаго препятствія со стороны преграждающей поверхности.

Если же

$$\frac{\partial f}{\partial x} x'_0 + \frac{\partial f}{\partial y} y'_0 + \frac{\partial f}{\partial z} z'_0 + \frac{\partial f}{\partial t} < 0, \dots\dots\dots (454)$$

то есть:

$$\Delta f \cdot v_0 \cos(v_0, N) + \frac{\partial f}{\partial t} < 0, \dots\dots\dots (455)$$

или

$$u_0 \cos(u_0, N) < 0, \dots\dots\dots (456)$$

то это неравенство, противорѣчащее условію (274)*), требуемому преградой, показываетъ, что материальная точка, по причинѣ своей инерціи, стремится преодолѣть эту преграду.

Такому стремленію материальной точки преграда противодѣйствуетъ, оказывая на точку реакцію, направленную по положительной нормали.

Эта реакція должна сообщить материальной точкѣ такой импульсъ, который измѣнилъ бы скорость v_0 материальной точки въ скорость v , удовлетворяющую условію:

$$\Delta f \cdot v \cos(v, N) + \frac{\partial f}{\partial t} \geq 0; \dots\dots\dots (275)$$

вмѣстѣ съ тѣмъ этотъ импульсъ долженъ быть сообщенъ мгновенно для того, чтобы материальная точка не успѣла войти внутрь непроницаемаго тѣла, ограниченаго поверхностью (453).

Поэтому мы предположимъ, что реакція, измѣняющая скорость v_0 (удовлетворяющую неравенству (455)) въ скорость v (удовлетворяющую условію (275)), есть мгновенная сила, дѣй-

*) На страницѣ 179; это же условіе выражается формулами (275) и (277).

состоящая въ теченіи столь ничтожнаго промежутка времени θ , въ теченіи котораго перемѣщенія матеріальной точки и поверхности (453) ничтожны; эта мгновенная сила направлена по положительной нормали N .

Такой процесс мгновеннаго измѣненія скорости матеріальной точки при встрѣчѣ ея съ преграждающею поверхностью называется ударомъ матеріальной точки о поверхность; моментъ t_0 называется моментомъ паденія точки на поверхность, моментъ $t = (t_0 + \theta)$ моментомъ отраженія.

При опредѣленіи результата удара матеріальной точки надо принять во вниманіе слѣдующія обстоятельства:

1) Вслѣдствіе ничтожной малости промежутка времени θ координаты матеріальной точки предполагаются постоянными (x_0, y_0, z_0) во все время удара (отъ момента t_0 до момента $t = t_0 + \theta$).

2) Положеніе поверхности и скорости всѣхъ точекъ ея принимаются также неизмѣнными во все время удара.

3) Импульсами немгновенныхъ силъ за время удара мы пренебрегаемъ, по ихъ ничтожной малости.

4) Мгновенная сила реакціи преграды направлена по положительной нормали N , проведенной изъ точки (x_0, y_0, z_0) поверхности (453).

По этимъ причинамъ проекціи на оси координатъ мгновенной силы реакціи въ какой либо моментъ удара выразятся величинами:

$$X, Y, Z = \frac{\partial f}{\partial x} \lambda, \quad \frac{\partial f}{\partial y} \lambda, \quad \frac{\partial f}{\partial z} \lambda,$$

гдѣ производныя отъ f имѣютъ постоянныя величины во время всего удара, а именно тѣ величины, которыя онѣ имѣютъ въ моментъ t_0 въ точкѣ (x_0, y_0, z_0); λ есть нѣкоторая функція отъ t , быстро измѣняющая свою величину во время удара.

Проекціи на оси координатъ импульса мгновенной силы за время отъ момента паденія до какаго либо момента t удара выразятся такъ:

$$X = \frac{\partial f}{\partial x} \int_{t_0}^t \lambda dt, \quad Y = \frac{\partial f}{\partial y} \int_{t_0}^t \lambda dt, \quad Z = \frac{\partial f}{\partial z} \int_{t_0}^t \lambda dt;$$

этот импульс произвести слѣдующее измѣненіе скорости материальной точки:

$$m \frac{dx}{dt} - mx'_0 = \frac{\partial f}{\partial x} j,$$

$$m \frac{dy}{dt} - my'_0 = \frac{\partial f}{\partial y} j, \quad j = \int_{t_0}^t \lambda dt,$$

$$m \frac{dz}{dt} - mz'_0 = \frac{\partial f}{\partial z} j,$$

или:

$$\frac{x-x'_0}{\cos(N,X)} = \frac{y-y'_0}{\cos(N,Y)} = \frac{z-z'_0}{\cos(N,Z)} = \frac{j \Delta f}{m};$$

это означаетъ, что измѣненіе скорости отъ момента паденія до какого либо момента t удара направлено параллельно положительной нормали N ; слѣдовательно, конецъ линіи, изображающей длину и направленіе скорости v , чертитъ во время удара прямую линію, параллельную этой нормали (черт. 30).

Такъ какъ скорость v_0 паденія точки на поверхность удовлетворяетъ неравенству (455), а скорость отраженія удовлетворяетъ условію (275), и притомъ скорость измѣняется во все время удара по вышеприведенному закону; то, въ нѣкоторый моментъ τ удара, она должна будетъ получить величину и направленіе, удовлетворяющія равенству:

$$\Delta f \cdot v \cos(v, N) + \frac{\partial f}{\partial t} = 0, \dots \dots \dots (457)$$

или

$$\frac{\partial f}{\partial x} \alpha + \frac{\partial f}{\partial y} \beta + \frac{\partial f}{\partial z} \gamma + \frac{\partial f}{\partial t} = 0, \dots \dots \dots (458)$$

гдѣ v означаетъ величину и направленіе скорости материальной точки въ моментъ τ ; α , β , γ , суть проэкціи этой скорости на оси координатъ.

Если поверхность неподвижна, то равенство (457) получить видъ:

$$v \cos(v, N) = 0,$$

это означаетъ, что скорость v касательна къ поверхности.

Если же поверхность движется или деформируется, то равенство (457) может быть представлено такъ:

$$u \cos(u, N) = 0, \dots\dots\dots (458 \text{ bis})$$

гдѣ u есть скорость въ моментъ t относительнаго движенія материальной точки по отношенію къ той средѣ, которой принадлежитъ поверхность.

Равенство (458, bis) выражаетъ, что относительная скорость u касательна къ поверхности.

Этотъ моментомъ t весь промежутокъ времени θ раздѣляется на двѣ части, а самый процессъ удара — на два акта.

За время перваго акта удара измѣненіе скорости материальной точки имѣетъ величину:

$$\varphi = v - v_0 \cos(v, N) - v_0 \cos(v_0, N) \dots\dots\dots (459)$$

Если поверхность неподвижна, то скорость v въ моментъ t перпендикулярна къ нормали, а потому тогда измѣненіе скорости за время перваго акта равно:

$$-v_0 \cos(v_0, N),$$

то есть величинѣ проэкціи скорости паденія на отрицательную нормаль.

На чертежѣ 30-мъ это измѣненіе скорости при неподвижной поверхности изображается длиною $v_0 v$.

Можно сказать, что, если поверхность неподвижна, то за все время перваго акта удара материальная точка теряетъ составляющую скорости паденія v_0 по отрицательной нормали.

Если поверхность движется или деформируется, то разность (459), на основаніи равенства (457), выразится такъ:

$$-\frac{1}{\Delta f} \frac{\partial f}{\partial t} - v_0 \cos(v_0, N), \dots\dots\dots (460)$$

или:

$$-u_0 \cos(u_0, N);$$

а это есть величина проекции на отрицательную нормаль относительной скорости паденія материальной точки.

Означимъ черезъ w величину и направление скорости той точки $M(x_0, y_0, z_0)$ поверхности, въ которой происходитъ ударъ; какъ уже извѣстно:

$$w \cos(w, N) = - \frac{1}{\Delta f} \frac{\partial f}{\partial t}, \dots \dots \dots (261)$$

(см. стр. 176 и 180); кромѣ того, мы знаемъ, что скорость v_0 есть геометрическая сумма скоростей u_0 и w .

Такъ какъ скорости точекъ поверхности предполагаются постоянными во все время удара, то и во всякій моментъ удара скорость v есть геометрическая сумма скоростей u и w ; напимѣрь, абсолютная скорость v есть геометрическая сумма скоростей u и w ; абсолютная скорость v есть геометрическая сумма скоростей u и w ; такъ и изображено на чертежѣ 31.

Изъ этого слѣдуетъ, что во все время удара конецъ относительной скорости (материальной точки по отношенію къ той средѣ, которой принадлежитъ поверхность) описываетъ прямую линію, параллельную той прямой линіи, которую въ то же время чертитъ конецъ абсолютной скорости (черт. 31).

Такъ какъ въ моментъ τ относительная скорость u перпендикулярна къ N (см. (458 bis)), то можно сказать, что за все время перваго акта удара материальная точка теряетъ составляющую относительной скорости паденія u_0 по отрицательной нормали.

По этимъ причинамъ первый актъ удара можетъ быть названъ *актомъ потери нормальной части скорости паденія*.

Второй актъ удара начинается въ моментъ τ и оканчивается въ моментъ $t = (t_0 + \theta)$.

За все время этого втораго акта измѣненіе скорости имѣетъ величину:

$$v \cos(v, N) - v \cos(v, N) \dots \dots \dots (461)$$

Если поверхность неподвижна, то величина этого измѣненія равняется проекции скорости отраженія v на положительную нормаль.

Если же поверхность движется или деформируется, то величина разности (461) может быть выражена такъ:

$$v \cos(v, N) + \frac{1}{\Delta f} \frac{\partial f}{\partial t} = u \cos(u, N), \dots \dots (462)$$

гдѣ u есть относительная скорость отраженія матерьяльной точки; слѣдовательно, въ этихъ случаяхъ измѣненіе скорости равняется проекціи относительной скорости отраженія на положительную нормаль.

Второй актъ удара называется *актомъ возстановленія нормальной части скорости отраженія*.

Величины α , β , γ проекцій скорости v на оси координатъ могутъ быть опредѣлены изъ равенствъ:

$$\left. \begin{aligned} m\alpha &= mx'_0 + J \frac{\partial f}{\partial x} \\ m\beta &= my'_0 + J \frac{\partial f}{\partial y} \\ m\gamma &= mz'_0 + J \frac{\partial f}{\partial z} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (463)$$

$$J = \int_{t_0}^t \lambda dt \dots \dots \dots (464)$$

Величина J опредѣлится изъ равенства, выражающаго, что измѣненіе скорости матерьяльной точки во время *акта потери* равно величинѣ импульса реакціи за это время, дѣленной на массу точки; такъ какъ измѣненіе скорости за время перваго акта выражается формулою (460), а импульсъ реакціи за время этого акта выражается произведеніемъ $J \cdot \Delta f$, то это равенство будетъ слѣдующее:

$$\frac{J \Delta f}{m} = - \frac{1}{\Delta f} \frac{\partial f}{\partial t} - v_0 \cos(v_0, N),$$

изъ него слѣдуетъ:

$$J = -m \frac{\frac{\partial f}{\partial x} x'_0 + \frac{\partial f}{\partial y} y'_0 + \frac{\partial f}{\partial z} z'_0 + \frac{\partial f}{\partial t}}{(\Delta f)^2}, \dots \dots (465)$$

или:

$$J = -m \frac{u_0 \cos(u_0, N)}{\Delta f} \dots \dots \dots (466)$$

Величина импульса реакціи за время акта возстановленія равняется

$$I \cdot \Delta f; \quad I = \int_{\tau}^t \lambda dt,$$

величина же измѣненія скорости матерьяльной точки за это время выражается формулою (462), поэтому:

$$I = m \frac{u \cos(u, N)}{\Delta f} \dots \dots \dots (467)$$

Изъ выраженій (466) и (467) слѣдуетъ:

$$\frac{I}{J} = \frac{u \cos(u, N)}{-u_0 \cos(u_0, N)}; \dots \dots \dots (468)$$

если подъ именемъ *потерянной скорости* подразумѣвать проекцію скорости паденія на отрицательную нормаль, а подъ именемъ *возстановленной скорости* — проекцію скорости отраженія на положительную нормаль, то равенство (468) можно высказать въ слѣдующихъ выраженіяхъ: *импульсъ второго акта такъ относится къ импульсу перваго акта, какъ возстановленная относительная скорость относится къ потерянной относительной скорости.*

Если поверхность неподвижна, то величина отношенія между этими импульсами выразится величиною отношенія абсолютной возстановленной скорости къ абсолютной потерянной скорости.

Означимъ буквою i уголъ паденія, то есть уголъ, составляемый направлениемъ скорости паденія v_0 съ отрицательною нормалью (черт. 32); буквою r означимъ уголъ отраженія, то есть уголъ, составляемый направлениемъ скорости отраженія v съ положительною нормалью; по чертежу 32 легко видѣть, что:

$$\mathfrak{M}P = v \cos(v, N) = b \cotg r$$

$$\mathfrak{M}\bar{Q} = -v_0 \cos(v_0, N) = b \cotg i;$$

а потому, при неподвижности поверхности:

$$\frac{I}{J} = \frac{v \cos(v, N)}{-v_0 \cos(v_0, N)} = \frac{\tg i}{\tg r} \dots \dots \dots (469).$$

Величина отношенія между возстановленною скоростью и потерянною скоростью зависит главнымъ образомъ отъ упругихъ свойствъ соударяющихся тѣлъ. По изслѣдованіямъ Ньютона величина этого отношенія не зависитъ отъ величины и направленія скорости паденія, но только отъ природы тѣхъ тѣлъ, между которыми происходитъ ударъ; такъ, при соудареніи стекла о стекло это отношеніе равно ¹⁵/₁₆ при соудареніи желѣза о желѣзо: ⁵/₉, при соудареніи тѣлъ, состоящихъ изъ прессованной шерсти, — тоже ⁵/₉; вообще, отношеніе это есть дробь, не большая единицы, то есть величина возстановленной скорости не превосходитъ величины скорости потерянной и уголъ отраженія не менѣе угла паденія (при неподвижности поверхности).

Это отношеніе называется *коэффициентомъ возстановленія*; это есть дробь, не меньшая нуля и не большая единицы, не зависящая отъ величины и направленія скорости паденія *).

Если величина коэффициента возстановленія извѣстна (означимъ его буквою ϵ), то тогда мы можемъ опредѣлить проэкціи на оси координатъ скорости отраженія v по слѣдующимъ формуламъ:

$$\left. \begin{aligned} mx' &= mx'_0 + J \frac{\partial f}{\partial x} (1 + \epsilon) \\ my' &= my'_0 + J \frac{\partial f}{\partial y} (1 + \epsilon) \\ mz' &= mz'_0 + J \frac{\partial f}{\partial z} (1 + \epsilon) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (470)$$

Въ нѣкоторыхъ случаяхъ не будетъ надобности пользоваться этими формулами, такъ какъ величину и направленіе скорости отраженія можемъ опредѣлить при помощи слѣдующихъ простыхъ соображеній.

1. Прокція относительной скорости на касательную плоскость (то есть скорость u) не измѣняется при ударѣ; прокція же на отрицательную нормаль относительной скорости паденія (т. е. — $u_0 \cos(u_0, N)$) замѣняется, вслѣдствіе удара, возстановленною скоростью

$$u \cos(u, N) = \epsilon (-u_0 \cos(u_0, N)),$$

направленною по положительной нормали.

*) Позднѣйшіе опыты показали, что Ньютоново положеніе о независимости величины коэффициента возстановленія отъ скорости паденія весьма близко къ истинѣ.

Если $\epsilon=0$, то возстановленной скорости вѣтъ и матерьяльная точка остается на поверхности, имѣя относительную скорость и.

Если $\epsilon=1$ и поверхность неподвижна, то уголъ отраженія равенъ углу паденія; при $\epsilon<1$ уголъ отраженія болѣе угла паденія.

Измѣненіе живой силы матерьяльной точки при ударѣ о поверхность опредѣлится по формулѣ (449), если замѣнимъ въ ней направленіе H — направленіемъ N , а величину H — слѣдующимъ выраженіемъ импульса реакціи за все время удара:

$$J(1+\epsilon)\Delta f;$$

но такъ какъ:

$$v \cos(v, N) = I \frac{\Delta f}{m} - \frac{1}{\Delta f} \frac{\partial f}{\partial t}$$

$$v_0 \cos(v_0, N) = -J \frac{\Delta f}{m} - \frac{1}{\Delta f} \frac{\partial f}{\partial t},$$

то получимъ слѣдующее выраженіе величины живой силы при ударѣ:

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = -\frac{J^2(\Delta f)^2}{2m}(1-\epsilon^2) - J(1+\epsilon) \frac{\partial f}{\partial t} \dots (471)$$

Если поверхность неподвижна, то:

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = -\frac{mv_0^2}{2}(1-\epsilon^2)\cos^2(v_0, N) \dots (472)$$

то есть, живая сила матерьяльной точки теряется при ударѣ ея о неподвижную поверхность, если коэффициентъ возстановленія не равенъ единицѣ и если скорость паденія не перпендикулярна къ нормали; потеря живой силы тѣмъ болѣе, чѣмъ меньше коэффициентъ возстановленія и чѣмъ болѣе проэкція скорости паденія на отрицательную нормаль.

Эта потеря живой силы можетъ быть съ избыткомъ вознаграждена живою силою, сообщаемою матерьяльной точкѣ движущейся поверхностью, если скорость w точки M составляетъ острый уголъ съ нормалью N .

Примѣръ 49-й. Тяжелая матерьяльная точка, брошенная изъ начала координатъ со скоростью V въ вертикальной плоскости XU (черт. 33) подъ угломъ $(J + \frac{\pi}{2} - r)$ къ оси X и подъ угломъ $(J + \pi - r)$ къ оси Y , совершаетъ рядъ рикошетовъ о наклонную плоскость:

Подставляя (D) в левую, а (E) в правую часть (C), получим

$$v_1'^2 = 2V_x v_1' + V_x^2 + \left[\frac{m_2}{m_1} V_x^2 - \frac{m_2}{m_1(m_1+m_2)} (m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2) - \frac{m_2}{m_1(m_1+m_2)} \cdot \frac{m_1 m_2}{(m_1+m_2)} (v_1 - v_2)^2 \right] =$$

$$= (v_1 - V_x)^2 K^2 \quad (F)$$

Но здесь выражение в скобках левой части преобразуется в

$$\frac{m_2}{m_1} \left[V_x^2 - \frac{1}{m_1+m_2} (m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2) - \frac{m_1 m_2}{(m_1+m_2)^2} (v_1 - v_2)^2 \right] =$$

$$= \frac{m_2}{m_1} \left[V_x^2 - \frac{1}{(m_1+m_2)^2} (m_1^2 v_1^2 + m_1 m_2 v_2^2 + m_1 m_2 v_1^2 + m_2^2 v_2^2 - m_1 m_2 v_1^2 + 2m_1 m_2 v_1 v_2 - m_2^2 v_2^2) \right] =$$

$$= \frac{m_2}{m_1} \left[V_x^2 - \frac{1}{(m_1+m_2)^2} (m_1^2 v_1^2 + 2m_1 m_2 v_1 v_2 + m_2^2 v_2^2) \right] = \frac{m_2}{m_1} [V_x^2 - v_x^2] = 0$$

Поэтому окончательно (F) принимает вид:

$$v_1'^2 = 2V_x v_1' + V_x^2 = (v_1 - V_x)^2 K^2$$

или

$$(v_1' - V_x)^2 = (V_x - v_1)^2 K^2$$

$$v_1' - V_x = (V_x - v_1) K$$

$$v_1' = V_x + K(V_x - v_1)$$

$$v_1' = (1+K)V_x - Kv_1$$

$$v_1' = v_1 - (1+K)(v_1 - V_x)$$

(G)

Из полученных соотношений:

1) при абсолютно упругих шарах, т.е. при $K=1$, из (G) и (A) будет

$$v_1' = V_x \quad \text{и} \quad v_2' = V_x$$

2) при абсолютно упругих шарах, т.е. при $K=0$, из (G) и (A) будет

$$v_1' = 2V_x - v_1$$

$$m_2 v_2' = m_1 V_x + m_2 V_x - m_1 v_1' - m_1 V_x + m_2 V_x - 2m_1 V_x + m_1 v_1 =$$

$$= (m_2 - m_1) V_x + m_1 v_1 = (m_2 - m_1) V_x + (m_1 + m_2) V_x - m_2 v_2 =$$

$$= 2m_2 V_x - m_2 v_2$$

или

$$v_2' = 2V_x - v_2$$

Из последних, при $m_1 = m_2$ следует $V_x = \frac{v_1 + v_2}{2}$ (из A);

$v_1' = v_2$; $v_2' = v_1$, т.е. шары обмениваются скоростями, а при $v_2 = 0$ будем $v_1' = 0$ и $v_2' = v_1$.

Летя ряд рикошетов о наклонную плоскость:

$$-(y + x \operatorname{tg} J) = 0;$$

опредѣлять весь рядъ послѣдовательныхъ ударовъ матеріальной точки объ эту плоскость, предполагая, что движеніе совершается въ пустотѣ и что извѣстенъ коэффициентъ возстановленія ε .

Положительная нормаль N къ плоскости составляетъ съ осью X уголъ $\left(\frac{\pi}{2} + J\right)$, съ осью Y — уголъ $(\pi + J)$.

Скорость V составляетъ съ положительною нормалью въ точкѣ O уголъ r .

Движеніе матеріальной точки до перваго удара выражается уравненіями:

$$x = Vt \sin(r - J), \quad y = \frac{gt^2}{2} - Vt \cos(r - J).$$

Моментъ t_1 перваго рикошета опредѣлится изъ равенства

$$\frac{gt_1^2}{2} - V \cos(r - J) + V \sin(r - J) \operatorname{tg} J = 0,$$

откуда:

$$t_1 = \frac{2V \cos r}{g \cos J} \dots \dots \dots (473)$$

Зная t_1 опредѣлимъ: координаты x_1, y_1 той точки плоскости, въ которой происходитъ первый ударъ, разстояніе $Ol = \xi_1$ этой точки отъ начала координатъ, величину v_1 скорости паденія, проэекція ея (x'_1, y'_1) на оси координатъ и величину i_1 угла паденія.

$$\begin{aligned} \xi_1 &= \frac{x_1}{\cos J} = \frac{2V^2 \sin(r - J) \cos r}{g \cos^2 J} \\ \xi_1 &= \frac{2V^2 \cos^2 r}{g \cos J} (\operatorname{tg} r - \operatorname{tg} J) \dots \dots \dots (474) \end{aligned}$$

$$x'_1 = V \sin(r - J), \quad y'_1 = V \left(2 \frac{\cos r}{\cos J} - \cos(r - J) \right) \dots (475)$$

Проекція скорости v_1 на направленіе оси Ξ (см. черт. 33):

$$\begin{aligned} v_1 \cos(v_1 \Xi) &= v_1 \sin i_1 = x'_1 \cos J - y'_1 \sin J, \\ v_1 \sin i_1 &= V(\sin r - 2 \cos r \operatorname{tg} J) \dots \dots \dots (476) \end{aligned}$$

Проекція скорости паденія v_1 на отрицательную нормаль:

$$v_1 \cos i_1 = x'_1 \sin J + y'_1 \cos J = V \cos r \dots \dots \dots (477)$$

Означимъ черезъ v , величину скорости отраженія въ точкѣ 1 и

черезъ r_1 уголъ отраженія. По теоріи удара о неподвижную поверхность:

$$V_1 \sin r_1 = v_1 \sin i_1, \quad V_1 \cos r_1 = \varepsilon v_1 \cos i_1;$$

а потому

$$V_1 \sin r_1 = V (\sin r - 2 \cos r \operatorname{tg} J) \dots\dots\dots (478)$$

$$V_1 \cos r_1 = \varepsilon V \cos r \dots\dots\dots (479)$$

и отсюда:

$$\varepsilon \operatorname{tg} r_1 = \operatorname{tg} r - 2 \operatorname{tg} J \dots\dots\dots (480)$$

Разсуждая такимъ же образомъ, опредѣлимъ:
величину промежутка времени между $(n-1)$ -ымъ и n -ымъ ударами:

$$t_n - t_{n-1} = \frac{2v_{n-1} \cos r_{n-1}}{g \cos J}, \dots\dots\dots (473, n-1)$$

разстояніе между точками, въ которыхъ эти удары совершаются:

$$\xi_n - \xi_{n-1} = \frac{2v_{n-1}^2 \cos^2 r_{n-1}}{g \cos J} (\operatorname{tg} r_{n-1} - \operatorname{tg} J), \dots\dots\dots (474, n-1)$$

и зависимость между скоростями и углами отраженія въ этихъ точкахъ:

$$V_n \sin r_n = V_{n-1} (\sin r_{n-1} - 2 \cos r_{n-1} \operatorname{tg} J), \dots\dots\dots (478, n-1)$$

$$V_n \cos r_n = \varepsilon V_{n-1} \cos r_{n-1}, \dots\dots\dots (479, n-1)$$

$$\varepsilon \operatorname{tg} r_n = \operatorname{tg} r_{n-1} - 2 \operatorname{tg} J \dots\dots\dots (480, n-1)$$

Изъ ряда равенствъ:

$$\varepsilon \operatorname{tg} r_1 = \operatorname{tg} r - 2 \operatorname{tg} J$$

$$\varepsilon \operatorname{tg} r_2 = \operatorname{tg} r_1 - 2 \operatorname{tg} J$$

$$\dots\dots\dots$$

$$\varepsilon \operatorname{tg} r_n = \operatorname{tg} r_{n-1} - 2 \operatorname{tg} J$$

исключимъ r_1, r_2, \dots, r_{n-1} ; получимъ:

$$\varepsilon^n \operatorname{tg} r_n = \operatorname{tg} r - 2 \frac{1 - \varepsilon^n}{1 - \varepsilon} \operatorname{tg} J \dots\dots\dots (481)$$

Изъ ряда равенствъ вида (479, $n-1$) получимъ:

$$V_n \cos r_n = \varepsilon^n V \cos r \dots\dots\dots (482)$$

Поэтому расстояние между двумя последовательными точками удара выразится такъ:

$$\xi_n - \xi_{n-1} = \frac{2\epsilon^{n-1} V^2 \cos^2 r}{g \cos J} \left[\operatorname{tg} r - \left(\frac{2}{1-\epsilon} - \frac{1+\epsilon}{1-\epsilon} \epsilon^{n-1} \right) \operatorname{tg} J \right]. \quad (483)$$

Если эта разность окажется отрицательною, то это будет означать, что материальная точка послѣ $(n-1)$ аго удара совершаетъ скачекъ внизъ, а не вверхъ; для этого надо, чтобы выраженіе:

$$D_n = \operatorname{tg} r - \frac{2}{1-\epsilon} \operatorname{tg} J + \frac{1+\epsilon}{1-\epsilon} \epsilon^{n-1} \operatorname{tg} J \dots \dots (484)$$

имѣло величину отрицательную.

Сложивъ рядъ равенствъ вида (483), получимъ выраженіе расстоянія той точки отъ начала координатъ, въ которой происходитъ n -ый ударъ:

$$\xi_n = \frac{V^2 \sin 2r}{g \cos J} \frac{1-\epsilon^n}{1-\epsilon} \left[1 - \frac{1-\epsilon^n \operatorname{tg} J}{1-\epsilon \operatorname{tg} r} \right] \dots \dots \dots (485)$$

Сложивъ рядъ равенствъ вида (473, $n-1$), получимъ выраженіе момента n -аго удара:

$$t_n = \frac{2V \cos r}{g \cos J} \frac{1-\epsilon^n}{1-\epsilon} \dots \dots \dots (486)$$

Величина и направленіе скорости отраженія послѣ n -аго удара определяются изъ формулъ (482) и слѣдующей:

$$v_n \sin r_n = V \sin r - 2V \cos r \frac{1-\epsilon^n}{1-\epsilon} \operatorname{tg} J \dots \dots (487)$$

Материальная точка совершить безконечное число скачковъ, которые становятся все мельче и короче, какъ видно изъ формулъ (482) и (483), а удары становятся все чаще и чаще (см. (473, $n-1$)). По истеченіи конечнаго времени

$$T = \frac{2V \cos r}{g \cos J} \frac{1}{1-\epsilon} \dots \dots \dots (488)$$

скачки прекращаются и въ этотъ моментъ материальная точка будетъ находиться на слѣдующемъ разстояніи отъ начала координатъ:

$$S = \frac{V^2 \sin 2r}{g \cos J} \frac{1}{1-\epsilon} \left[1 - \frac{1}{1-\epsilon \operatorname{tg} r} \right] \dots \dots \dots (489)$$

а скорость ея будетъ направлена вдоль по положительному или отрицательному направленію оси Z и будетъ равна:

$$C = B \cdot V \cos r; \quad B = \operatorname{tg} r - \frac{2}{1-\epsilon} \operatorname{tg} J \dots \dots (490)$$

Знакъ величины B опредѣляетъ возможность или невозможность перемѣны направленія скачковъ; если B болѣе нуля, то матерьяльная точка будетъ восходить по оси Ξ и даже послѣ прекращенія скачковъ будетъ имѣть скорость C , направленную по положительной оси Ξ ; если $B=0$, то скорость C будетъ нуль; если же B менѣе нуля, то, начиная съ нѣкотораго n , скачки будутъ совершаться внизъ по плоскости.

Примѣръ 50-й. Опредѣлить результатъ перваго удара матерьяльной точки объ окружность въ примѣрѣ 34-мъ (стр. 241—245).

Прежде всего слѣдуетъ найти точку D первой встрѣчи матерьяльной точки съ окружностью. Означимъ координаты этой точки знаками x_3, y_3 , моментъ встрѣчи — знакомъ t_3 , проекція скорости паденія — знаками x'_3, y'_3 , проекція скорости отраженія — знаками x'_3, y'_3 .

Примѣняя къ этому случаю пріемы, изложенные въ этомъ параграфѣ, мы найдемъ:

$$\begin{aligned} t_3 - t_1 &= \frac{4v_1 x_1}{gR}, \quad x'_3 = v_1 \frac{y_1}{R}, \quad y'_3 = 3v_1 \frac{x_1}{R} \\ x_3 &= x_1 \left(1 - \frac{4y_1^2}{R^2}\right), \quad y_3 = y_1 \left(1 - \frac{4x_1^2}{R^2}\right); \quad \frac{J}{m} = -4v_1 \frac{y_1 x_1^2}{R^2} \\ x'_3 &= v_1 \frac{y_1}{R} - 2 \frac{J}{m} x_3 (1 + \epsilon) \\ y'_3 &= 3v_1 \frac{x_1}{R} - 2 \frac{J}{m} y_3 (1 + \epsilon). \end{aligned}$$

Остановимся на частномъ случаѣ: $b = -\frac{3}{4}R$ и опредѣлимъ дальнѣйшее движеніе матерьяльной точки послѣ перваго удара при предположеніяхъ: $\epsilon = 1$ и $\epsilon = 0$.

Въ этомъ случаѣ ударъ произойдетъ въ самой нижней точкѣ окружности и скорость паденія будетъ имѣть слѣдующія проекціи:

$$x'_3 = -\frac{v_1}{2}, \quad y'_3 = \frac{3\sqrt{3}}{2} v_1, \quad \frac{J}{m} = \frac{3\sqrt{3}}{4R} v_1.$$

Если $\epsilon = 1$, то матерьяльная точка, отразившись о нижнюю точку окружности, опишетъ параболу, симметричную той, которую она описала до удара; въ точкѣ $K_1 \left(x = -\frac{1}{2}R, y = -\frac{R}{2}\right)$ она вступитъ на окружность безъ удара, такъ какъ скорость ея

будетъ направлена по касательной къ окружности; далѣе, матеріальная точка пойдетъ по окружности, пройдетъ черезъ нижнюю точку ея, подымется до точки K , гдѣ снова сойdetъ съ окружности, и такъ далѣе.

Если $\varepsilon=0$, то матеріальная точка потеряетъ скорость по нормали и пойдетъ по окружности со скоростью:

$$x'_2 = -\frac{v_1}{2};$$

дальнѣйшее движеніе она будетъ совершать по нижней части окружности, не подымаясь выше уровня:

$$y = -\left(\frac{v_1^2}{8g} - R\right) = \frac{15}{16} R.$$

Примѣръ 51-й. Тяжелая матеріальная точка брошена изъ начала координатъ на наклонную плоскость, движущуюся поступательно и равномерно; уравненіе этой плоскости:

$$-(y + x \operatorname{tg} J + wt) = 0.$$

Представимъ себѣ неизмѣняемую движущуюся среду, которой принадлежитъ плоскость, и опредѣлимъ относительное движеніе матеріальной точки по отношенію къ этой средѣ, причемъ результатъ каждаго удара будемъ разсчитывать на томъ основаніи, что:

$$u_n \sin \rho_n = u_n \sin \sigma_n, \quad u_n \cos \rho_n = \pm u_n \cos \sigma_n,$$

гдѣ u_n есть относительная скорость паденія, u_n — относительная скорость отраженія, ρ_n — относительный уголъ отраженія, σ_n — относительный уголъ паденія при n -номъ ударѣ.

Въ результатѣ получимъ формулы, отличающіяся отъ формулъ примѣра 49-го тѣмъ, что въ нихъ, вмѣсто $V \cos r$, $V \sin r$, и $\operatorname{tg} r$ будутъ входить слѣдующія величины:

$$\begin{array}{ll} V \cos r - w \cos J & \text{вмѣсто } V \cos r \\ V \sin r - w \sin J & \text{вмѣсто } V \sin r \\ \frac{V \sin r - w \sin J}{V \cos r - w \cos J} & \text{вмѣсто } \operatorname{tg} r. \end{array}$$

Примѣръ 52-й. Матеріальная тяжелая точка свободно пущена въ моментъ $t=0$ изъ точки ($x=a$, $y=-h$); опредѣлить результатъ ея удара о плоскость:

$$\frac{x t}{a} \sqrt{\frac{2}{3}} gh - y = 0,$$

вращающуюся вокругъ горизонтальной оси Z^{00} .

Движеніе точки до удара выражается такъ:

$$x=a, \quad y=\frac{gt^2}{2} - h.$$

Моментъ встрѣчи точки съ плоскостью опредѣлится изъ уравненія:

$$\frac{gt^2}{2} - t \sqrt{\frac{2}{3} gh} - h = 0.$$

Изъ двухъ рѣшеній этого уравненія:

$$t = - \sqrt{\frac{2h}{3g}}, \quad t_1 = 3 \sqrt{\frac{2h}{3g}}$$

второе опредѣляетъ дѣйствительный моментъ встрѣчи. Въ этотъ моментъ матерьяльная точка имѣетъ слѣдующія координаты и слѣдующія проэкціи скорости паденія:

$$x_0=a, \quad y_0=2h, \quad x'_0=0, \quad y'_0=\sqrt{6gh}.$$

Для вычисленія J мы должны составить выраженія производныхъ:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{t_1}{a} \sqrt{\frac{2}{3} gh} = \frac{2h}{a}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -1, \quad \frac{\partial f}{\partial t} = \sqrt{\frac{2}{3} gh}.$$

Величина J выразится такъ:

$$J = \frac{2ma^2}{4h^2 + a^2} \sqrt{\frac{2}{3} gh};$$

проэкціи скорости отраженія на оси координатъ будутъ имѣть слѣдующія величины:

$$x' = \frac{4ha}{4h^2 + a^2} (1 + \varepsilon) \sqrt{\frac{2}{3} gh}$$

$$y' = \sqrt{6gh} - \frac{2a^2}{4h^2 + a^2} (1 + \varepsilon) \sqrt{\frac{2}{3} gh}.$$

Въ этомъ случаѣ происходитъ потеря живой силы вслѣдствіе удара; въ самомъ дѣлѣ:

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = - \frac{2ma^2}{4h^2 + a^2} \frac{2}{3} gh (1 + \varepsilon) (2 - \varepsilon),$$

если даже коэффиціентъ возстановленія будетъ равенъ единицѣ, то все таки будетъ потеря живой силы, равная:

$$\frac{4ma^2}{4h^2 + a^2} \frac{2}{3} gh.$$





КУРСЪ АНАЛИТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ.



СОСТАВИЛЪ

Д. БОБЫЛЕВЪ

Профессоръ С.-Петербургскаго Университета.

— — —

II.

ЧАСТЬ КИНЕТИЧЕСКАЯ.

ВЫПУСКЪ ВТОРОЙ:

**МЕХАНИКА СИСТЕМЪ, СОСТАВЛЕННЫХЪ ИЗЪ
МАТЕРЬЯЛЬНЫХЪ ТОЧЕКЪ.**

— — —

ЛИСТЫ ТЕКСТА: ОТЪ 20 ДО 36-ГО ВКЛЮЧИТЕЛЬНО.

ЛИСТЫ ЧЕРТЕЖЕЙ: 2-й и 3-й.

ИЗДАНИЕ ВТОРОЕ.



С.-ПЕТЕРБУРГЪ.

Типографія М. М. Стасюлевича, Вас. Остр., 2 лнш., 7.

1889.



1614

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВТОРОГО ВЫПУСКА.

Части кинетической.

§§	Стр.
ГЛАВА V. Дифференціальныя уравненія движенія системы матерьяльныхъ точекъ.	
59. Понятіе о системѣ матерьяльныхъ точекъ. Связи. Прим. 53-й, 54-й 55-й, 56-й	
60. Зависимость между скоростями точекъ, связанныхъ удерживающею связью	308
61. Дифференціальныя параметры связи и ихъ направленія	312
62. Разсмотрѣніе равенства (493). Примѣры 53-й, 57-й, 58-й, 59-й . .	315
63. Зависимость между скоростями точекъ, связанныхъ неудерживающею связью. Примѣры 54-й, 55-й, 56-й, 60-й	321
64. Совокупныя дифференціальныя уравненія движенія системы свободныхъ матерьяльныхъ точекъ. Примѣры 61-й, 62-й, 63-й . . .	325
65. Дифференціальныя уравненія движенія системы матерьяльныхъ точекъ, подверженныхъ преградамъ, но не связанныхъ между собою никакими связями	328
66. Условіе, которому должны удовлетворять ускоренія точекъ, связываемыхъ какою-либо связью	328
67. Совокупность реакцій связи. (Примѣры 53-й, 57-й, 58-й, 59-й) . .	329
68. Реакціи неудерживающей связи. (Примѣры 54-й, 55-й, 56-й) . . .	340
69. Совокупныя дифференціальныя уравненія движенія системы матерьяльныхъ точекъ, связанныхъ одною связью	347
70. Совокупныя дифференціальныя уравненія движенія системы точекъ, связанныхъ нѣсколькими связями	349
71. Приведеніе совокупности (517) къ $(3n - p)$ совокупнымъ дифференціальнымъ уравненіямъ съ такимъ же числомъ искомымъ функций времени	354
72. Координатныя параметры; число независимыхъ координатныхъ параметровъ для данной системы несвободныхъ точекъ	354
73. Дифференціальныя уравненія Лагранжа. Примѣры 64-й, 65-й, 66-й.	361
74. Гамильтонова форма дифференциальныхъ уравненій движенія . .	372
75. Возможныя варьяціи положеній данной системы точекъ; возможные варьяціи координатъ и координатныхъ параметровъ	377

II

§§	Стр.
76. Равенство, соединяющее въ себѣ всю совокупность дифференціаль- ныхъ уравненій движенія точекъ системы	383
77. Варьяція скорости точки и скорость варьяціи движущейся точки.	390
78. Выводъ дифференціальныхъ уравненій Лагранжа изъ равенства (567).	396
79. Положенія равновѣсія системы матерьяльныхъ точекъ. Уравненія равновѣсія силъ, приложенныхъ къ системѣ матерьяльныхъ то- чекъ. Условія равновѣсія задаваемыхъ силъ	398
80. Равенство, соединяющее въ себѣ всю совокупность уравненій рав- новѣсія	399
✓ 81. Такъ называемыя начала: возможныхъ перемѣщеній и д'Аламбера.	400
✓ 82. Нѣкоторыя свѣдѣнія относительно исторіи открытія начала воз- можныхъ перемѣщеній и нѣкоторые способы непосредственного доказательства этого начала	406

ГЛАВА VI. Объ интегралахъ совокупныхъ дифференціальныхъ уравненій движенія системы точекъ.

83. Первые и вторые интегралы дифференціальныхъ уравненій движе- нія данной системы точекъ; число постоянныхъ произвольныхъ .	416
84. Интегралы совокупности (554) дифференціальныхъ уравненій пер- вого порядка	422

ГЛАВА VII. Законъ движенія центра инерціи.

85. Составленіе дифференціальныхъ уравненій движенія центра инер- ціи системы матерьяльныхъ точекъ	425
86. Центръ инерціи системы матерьяльныхъ точекъ :	426
87. Законъ движенія центра инерціи системы матерьяльныхъ точекъ.	427
88. Нѣсколько замѣчаній относительно опредѣленія положенія центра инерціи системы матерьяльныхъ точекъ	429
89. О томъ, какъ разсматривается сплошное тѣло въ механикѣ си- стемы матерьяльныхъ точекъ	431
90. Центръ инерціи сплошного тѣла	434
91. Опредѣленіе положенія центра инерціи сплошныхъ тѣлъ, поверх- ностей и линій. Примѣры: 67-й, 68, 69, 70, 71, 72, 73, 74, 75, 76, 77, 78, 79, 80, 81, 82, 83, 84	435
92.	447

ГЛАВА VII. Законъ площадей.

93. Составленіе трехъ дифференціальныхъ уравненій	448
94. Главный моментъ силъ вокругъ даннаго центра. Перемѣна центра моментовъ. Главный векторъ	449
95. Главный моментъ количествъ движенія системы матерьяльныхъ точекъ	454
✓ 96. Значеніе дифференціальныхъ уравненій (628), составленныхъ въ § 93.	456
97. Видъ дифференціальныхъ уравненій (628) въ тѣхъ случаяхъ, въ которыхъ главный моментъ реакцій равенъ нулю	456
98. Интегралы, выражающіе законъ площадей. Неизмѣняемая плоскость.	457

§§	Стр.
99. Законъ площадей въ относительномъ движеніи системы материаль- ныхъ точекъ по отношенію къ неизмѣняемой средѣ, имѣющей по- ступательное движеніе вмѣстѣ съ центромъ инерціи системы . .	461
100. Примѣры случаевъ, въ которыхъ законы площадей имѣютъ мѣсто. Примѣры 61-й, 62-й, 85-й, 66-й	466
101. Главный моментъ количествъ движенія сложнаго тѣла	470
102. Главный моментъ количествъ движенія неизмѣняемой системы то- чекъ или твердаго тѣла; проэкціи его на неподвижныя оси коор- динатъ	470
103. Проэкціи главнаго момента количествъ движенія неизмѣняемой системы точекъ на оси координатъ, неизмѣнно связанныя съ этою системою	472
104. Моменты инерціи	474
105. Зависимость между моментами инерціи вокругъ осей, проходящихъ черезъ одну и ту же точку. Эллипсоидъ инерціи. Главныя оси инерціи.	475
106. Зависимость между моментами инерціи вокругъ параллельныхъ осей.	480
107. По центральнымъ главнымъ осямъ и моментамъ инерціи могутъ быть опредѣлены эллипсоиды инерціи во всѣхъ прочихъ точкахъ пространства.	481
108. Эллиптическія координаты	486
109. Квадратичные моменты: полярные и относительно плоскостей. Эллипсоиды: основной и гираціонный. Плечи инерціи	488
110. Примѣры вычисленія моментовъ инерціи нѣкоторыхъ тѣлъ. При- мѣры: 86-й, 87, 88, 89, 90, 91, 92, 93, 94, 95, 96, 97, 98. . . .	491
111.	500

ГЛАВА IX. Законъ живой силы.

112. Составленіе дифференціальнаго уравненія.	501
113. Силы, имѣющія потенціалъ	501
114. Законъ живой силы	506
115. Работа задаваемыхъ силъ. Потенціальная энергія	507
116. Живая сила системы равна живой силѣ движенія центра инер- ціи, сложенной съ суммою живыхъ силъ относительныхъ движеній точекъ системы по отношенію къ воображаемой неизмѣняемой средѣ, совершающей поступательное движеніе вмѣстѣ съ центромъ инерціи.	511
117. Живая сила движенія твердаго тѣла	512
118.	513

ГЛАВА X. Примѣры и задачи.

Примѣръ 61-й	515
Примѣръ 62-й, 63-й	516
Примѣръ 64-й, 66-й	517
Задачи: 19—35	519

ГЛАВА XI. О движеніи твердаго тѣла.

119.	Дифференціальныя уравненія движенія свободнаго твердаго тѣла.	536
120.	Такъ называемое вращеніе твердаго тѣла по инерціи	549
121.	Различіе между главными осями инерціи по отношенію къ устойчивости вращенія	566
122.	Вращательное движеніе по инерціи такого твердаго тѣла, центральный эллипсоидъ котораго есть эллипсоидъ вращенія или шаръ.	571
123.	Примѣры силъ, при дѣйствіи которыхъ свободное твердое тѣло вращается по инерціи вокругъ своего центра инерціи. Примѣры 99-й, 100-й.	573
124.	Главный векторъ и главный моментъ силъ, приложенныхъ къ твердому тѣлу и имѣющихъ потенциалъ	574

ЗАМѢЧЕННЫЯ ОШИБКИ.

Стран.	Строка	Формула	Напечатано:	Должно быть:
315	—	(503 bis)	(P_i, Y)	(P_i, y)
327	3 снизу	—	изъ системы точекъ	изъ точекъ
355	13 сверху	—	u	n
363	—	(530, j, k)	$\frac{\partial x_i}{\partial q_k}$	$\frac{\partial z_i}{\partial q_k}$
392	4 сверху	—	сторона $M_1 m$	сторона $M_1 m'$
409	12	—	мощь	мощь
465	13	—	ΞZ	ΞY
469	последняя	—	Передъ скобкою поставить: 2	
484	3 снизу	(683)	r_{2k}	r_k^2
489	—	(694)	B_k, C_k	B'_k, C'_k
—	—	—	$2D_k, 2E_k, 2F_k$	$-2D_k, -2E_k, -2F_k$
489	—	(695)	" " "	" " "
504	3 сверху	—	вниминіе	вниманіе
510	последняя	—	пропущено Θ	

II.

ЧАСТЬ КИНЕТИЧЕСКАЯ.

МЕХАНИКА СИСТЕМЪ, СОСТАВЛЕННЫХЪ ИЗЪ
МАТЕРЬЯЛЬНЫХЪ ТОЧЕКЪ.

ГЛАВА V.

Дифференціальныя уравненія движенія системы матерьяльных точекъ.

§ 59. Понятіе о системѣ матерьяльныхъ точекъ. Связи.

Если нѣсколько матерьяльныхъ точекъ подвержены такимъ силамъ или подчинены такимъ условіямъ, что, при опредѣленіи движенія одной изъ точекъ, приходится принимать въ расчетъ все прочія точки безъ исключенія, то такая группа точекъ называется *системою матерьяльныхъ точекъ*.

Можно еще выразиться иначе: нѣсколько матерьяльныхъ точекъ образуютъ одну систему, если существуютъ обстоятельства, дѣлающія эти точки настолько зависимыми одна отъ другой, что, при опредѣленіи движенія, совершаемаго одною изъ нихъ, приходится неизбежно принимать въ расчетъ движенія всѣхъ прочихъ точекъ.

Обстоятельства, устанавливающія зависимость между матерьяльными точками системы, могутъ заключаться:

- а) въ томъ, что силы, приложенныя къ точкамъ системы, зависятъ отъ координатъ и скоростей другихъ точекъ той же системы;
- б) въ существованіи кинематическихъ *связей* между точками системы.

Связью (liaison) называется условіе, въ силу котораго координаты нѣсколькихъ точекъ системы должны удовлетворять нѣкоторому равенству или неравенству.

Напримѣръ:

Примѣръ 53. Условіе, въ силу котораго разстояніе между двумя точками m_1 (координаты x_1, y_1, z_1) и m_2 (координаты x_2, y_2, z_2) должно оставаться постояннымъ, выразится слѣдующимъ равенствомъ:

$$(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2 - l^2 = 0,$$

или

$$+ \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2} - l = 0,$$

гдѣ l есть величина разстоянія.

Эту связь можно представить себѣ въ видѣ вполнѣ твердаго безконечно-тонкаго стержня, на концахъ котораго находятся связываемыя имъ матерьяльныя точки.

Примѣръ 54. Связь, представляемая безконечно-тонкою, гибкою, перастяжимою и неизмѣнною массы нитью, связывающею точки m_1 и m_2 , выразится слѣдующимъ условіемъ:

$$l^2 \geq (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2,$$

такъ какъ разстояніе между точками не должно быть болѣе длины l нити, но можетъ быть равно или менѣе l .

Примѣръ 55. Условіе:

$$(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2 \geq l^2$$

выражаетъ, что разстояніе между двумя точками не должно быть менѣе l , но можетъ быть равно или болѣе l ; эту связь можно представить себѣ такимъ образомъ, какъ будто-бы точки m_1 и m_2 были центрами двухъ твердыхъ шаровъ, сумма радіусовъ которыхъ равняется l .

Примѣръ 56. Условіе:

$$l \geq r_{12} + r_{23},$$

гдѣ

$$r_{12} = + \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}$$

$$r_{23} = + \sqrt{(x_2 - x_3)^2 + (y_2 - y_3)^2 + (z_2 - z_3)^2},$$

связывающае координаты трехъ точекъ m_1 , m_2 , m_3 , выражаетъ, что сумма разстояній точекъ m_1 и m_3 отъ точки m_2 должна быть не болѣе l , связь эту можно представить себѣ подъ слѣдующимъ видомъ: точки m_1 и m_3 прикрѣплены къ концамъ гибкой, перастяжимой нити (длины l), вдоль по которой, не сходя съ нея, можетъ скользить точка m_2 .

Аналитическое выраженіе связи между точками можетъ заключать въ себѣ, кромѣ координатъ точекъ и постоянныхъ параметровъ, еще и время; напимѣръ, если стержень, связывающій точки m_1 и m_2 измѣняетъ съ теченіемъ времени свою длину по закону:

$$l = L + (l_0 - L)e^{-kt},$$

гдѣ l_0 есть длина стержня въ моментъ $t = 0$, а l — длина его въ моментъ t , то связь эта выразится слѣдующимъ равенствомъ:

$$+ \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2} = L + (l_0 - L)e^{-kt},$$

гдѣ $x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2$ суть координаты положеній, занимаемыхъ точками m_1 и m_2 въ моментъ t .

Всякія связи между точками $m_1, m_2, m_3, \dots, m_i, \dots, m_n$ могутъ быть выражены: однѣ — равенствами:

$$u(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \dots, x_n, y_n, z_n, t) = 0, \dots \quad (491)$$

другія — условіями:

$$u(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \dots, x_n, y_n, z_n, t) \geq 0, \dots \quad (492)$$

гдѣ $x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \dots, x_i, y_i, z_i, \dots, x_n, y_n, z_n$ суть координаты положеній, занимаемыхъ точками $m_1, m_2, \dots, m_i, \dots, m_n$ въ моментъ t , а u^*) означаетъ функцію этихъ координатъ и времени t ; эта функція можетъ не заключать времени и нѣкоторыхъ изъ координатъ; видъ ея опредѣляется конструкціею связи.

(Составляя аналитическое выраженіе какой-либо связи, мы будемъ писать его такимъ образомъ, чтобы всѣ члены равенства или неравенства заключались въ первой его части; если тогда получится выраженіе вида:

$$f(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \dots, x_n, y_n, z_n, t) \leq 0,$$

*) Эту букву мы предназначаемъ исключительно для обозначенія нер-
вныхъ частей выраженій связей

то мы можемъ привести его къ виду (492) положивъ:

$$s = -f_{\frac{1}{2}}$$

{ Связи, выражаемыя равенствами, называются *удерживающими связями*, а тѣ связи, которыя выражаются условіями вида (492), называются *связями неудерживающими* *).

§ 60. Зависимость между скоростями точекъ, связанныхъ удерживающею связью.

Удерживающая связь (491), существующая между точками $m_1, m_2, \dots, m_i, \dots, m_n$, допускаетъ только такія движенія этихъ точекъ, при которыхъ одновременныя скорости точекъ удовлетворяютъ слѣдующему уравненію:

$$\begin{aligned} \frac{ds}{dt} = & \frac{\partial s}{\partial x_1} \frac{dx_1}{dt} + \frac{\partial s}{\partial x_2} \frac{dx_2}{dt} + \dots + \frac{\partial s}{\partial x_i} \frac{dx_i}{dt} + \dots + \frac{\partial s}{\partial x_n} \frac{dx_n}{dt} + \\ & + \frac{\partial s}{\partial y_1} \frac{dy_1}{dt} + \frac{\partial s}{\partial y_2} \frac{dy_2}{dt} + \dots + \frac{\partial s}{\partial y_i} \frac{dy_i}{dt} + \dots + \frac{\partial s}{\partial y_n} \frac{dy_n}{dt} + \\ & + \frac{\partial s}{\partial z_1} \frac{dz_1}{dt} + \frac{\partial s}{\partial z_2} \frac{dz_2}{dt} + \dots + \frac{\partial s}{\partial z_i} \frac{dz_i}{dt} + \dots + \frac{\partial s}{\partial z_n} \frac{dz_n}{dt} + \frac{\partial s}{\partial t} = 0, \quad (493) \end{aligned}$$

линейному относительно проежцій на оси координатъ скоростей точекъ.

Первую часть этого равенства, представляющую полную производную отъ функціи s по t , мы будемъ изображать, для краткости, такъ:

*) Сомовъ называетъ связи первого рода — *закрѣпляющими*, а связи второго рода — *незакрѣпляющими*; см. Рациональную механику, кинематику. стр. 266.

$$\frac{d\mathfrak{s}}{dt} = \frac{\partial \mathfrak{s}}{\partial t} + \sum_{i=1}^{i=n} \left(\frac{\partial \mathfrak{s}}{\partial x_i} x'_i + \frac{\partial \mathfrak{s}}{\partial y_i} y'_i + \frac{\partial \mathfrak{s}}{\partial z_i} z'_i \right); \dots \quad (494)$$

поэтому, равенство (493) будемъ писать въ такомъ видѣ:

$$\frac{d\mathfrak{s}}{dt} = \frac{\partial \mathfrak{s}}{\partial t} + \sum_{i=1}^{i=n} \left(\frac{\partial \mathfrak{s}}{\partial x_i} x'_i + \frac{\partial \mathfrak{s}}{\partial y_i} y'_i + \frac{\partial \mathfrak{s}}{\partial z_i} z'_i \right) = 0, \dots \quad (493)$$

а иногда даже и въ такомъ:

$$\frac{d\mathfrak{s}}{dt} = 0 \dots \dots \dots (493)$$

Уравненіе (493) и другія равенства, проистекающія изъ су-

*) По прежнему мы будемъ обозначать частныя производныя помощью круглыхъ ∂ , а полныя производныя помощью прямыхъ d ; напримѣръ:

$$\frac{\partial \mathfrak{s}}{\partial t}, \quad \frac{\partial \mathfrak{s}}{\partial x_1}, \quad \frac{\partial \mathfrak{s}}{\partial y_1}$$

суть частныя производныя отъ функціи \mathfrak{s} по t , x_1 и y_1 , а

$$\frac{d\mathfrak{s}}{dt}$$

есть полная производная отъ \mathfrak{s} по t .

**) Знакъ:

$$\sum_{i=1}^{i=n}$$

служить для сокращеннаго писанія суммы n членовъ одинаковаго вида, различающихся только численными значеніями нѣкотораго индекса, который равенъ единицѣ въ первомъ членѣ суммы, двумъ — во второмъ, тремъ — въ третьемъ, и т. д.; напримѣръ:

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \dots + x_n^2 = \sum_{i=1}^{i=n} x_i^2,$$

$$\left(\frac{\partial V}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial x_2} \right)^2 + \dots + \left(\frac{\partial V}{\partial x_n} \right)^2 = \sum_{i=1}^{i=n} \left(\frac{\partial V}{\partial x_i} \right)^2.$$

ществованія удерживающей связи, могут быть выведены слѣдующимъ образомъ.

Координаты

$$x_1, x_2, \dots x_i, \dots x_n$$

$$y_1, y_2, \dots y_i, \dots y_n$$

$$z_1, z_2, \dots z_i, \dots z_n$$

движущихся точекъ

$$m_1, m_2, \dots m_i, \dots m_n$$

могутъ быть выражены непрерывными функціями времени; приращенія

$$Dx_1, Dx_2, \dots Dx_i, \dots Dx_n$$

$$Dy_1, Dy_2, \dots Dy_i, \dots Dy_n$$

$$Dz_1, Dz_2, \dots Dz_i, \dots Dz_n$$

этихъ координатъ, полученныя ими въ теченіе какого-либо весьма малаго промежутка времени ϑ , могутъ быть выражены рядами, расположенными по возрастающимъ степенямъ ϑ , напимѣръ:

$$Dx_i = x'_i \vartheta + x''_i \frac{\vartheta^2}{1.2} + x'''_i \frac{\vartheta^3}{1.2.3} + \dots$$

$$Dy_i = y'_i \vartheta + y''_i \frac{\vartheta^2}{1.2} + y'''_i \frac{\vartheta^3}{1.2.3} + \dots$$

$$Dz_i = z'_i \vartheta + z''_i \frac{\vartheta^2}{1.2} + z'''_i \frac{\vartheta^3}{1.2.3} + \dots$$

Выраженіе:

$$\vartheta (x_1 + Dx_1, y_1 + Dy_1, z_1 + Dz_1, \dots z_n + Dz_n, t + \vartheta),$$

которое, для краткости, будемъ изображать знакомъ:

$$\vartheta((t + \vartheta)),$$

можетъ быть разложено въ рядъ, расположенный по возрастающимъ

степенямъ величинъ: $\vartheta, Dx_1, Dy_1, Dz_1, \dots, Dz_n$; но такъ какъ приращенія координатъ могутъ быть выражены въ видѣ рядовъ, расположенныхъ по возрастающимъ степенямъ ϑ , то $\varphi((t + \vartheta))$ можно представить въ видѣ слѣдующаго ряда:

$$\varphi((t + \vartheta)) = \varphi + \frac{d\varphi}{dt} \vartheta + \frac{d^2\varphi}{dt^2} \frac{\vartheta^2}{1.2} + \frac{d^3\varphi}{dt^3} \frac{\vartheta^3}{1.2.3} + \dots; \quad (495)$$

здѣсь $\frac{d\varphi}{dt}$ означаетъ полную производную отъ функціи φ по t , выражаемую формулою (494); $\frac{d^2\varphi}{dt^2}$ есть полная производная второго порядка отъ той же функціи по t ; она выражается слѣдующею формулою:

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = \sum_{i=1}^{i=n} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} x_i'' + \frac{\partial \varphi}{\partial y_i} y_i'' + \frac{\partial \varphi}{\partial z_i} z_i'' \right) + K\varphi, \dots \quad (496)$$

гдѣ:

$$\begin{aligned} K\varphi = & \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + 2 \sum_{i=1}^{i=n} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t \partial x_i} x_i' + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t \partial y_i} y_i' + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t \partial z_i} z_i' \right) + \\ & + \sum_{j=1}^{j=n} x_j' \sum_{i=1}^{i=n} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_j \partial x_i} x_i' + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_j \partial y_i} y_i' + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_j \partial z_i} z_i' \right) + \\ & + \sum_{j=1}^{j=n} y_j' \sum_{i=1}^{i=n} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y_j \partial x_i} x_i' + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y_j \partial y_i} y_i' + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y_j \partial z_i} z_i' \right) + \\ & + \sum_{j=1}^{j=n} z_j' \sum_{i=1}^{i=n} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z_j \partial x_i} x_i' + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z_j \partial y_i} y_i' + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z_j \partial z_i} z_i' \right); \dots \quad (497) \end{aligned}$$

далѣе, $\frac{d^3\varphi}{dt^3}$ есть полная производная третьяго порядка отъ функціи φ по t , и т. д.

Разсматриваемая нами связь — удерживающая, слѣдовательно:

$$\varphi(x_1, y_1, z_1, \dots, z_n, t) = 0, \quad \varphi((t + \vartheta)) = 0,$$

а потому нижеслѣдующій рядъ долженъ быть равенъ нулю, при всякихъ значеніяхъ весьма малаго промежутка времени δ :

$$\frac{ds}{dt} + \frac{d^2s}{dt^2} \frac{\delta}{1.2} + \frac{d^3s}{dt^3} \frac{\delta^2}{1.2.3} + \dots = 0;$$

а это можетъ имѣть мѣсто только при существованіи равенствъ:

$$\frac{ds}{dt} = 0 \dots \dots \dots (493)$$

$$\frac{d^2s}{dt^2} = 0 \dots \dots \dots (498)$$

$$\frac{d^3s}{dt^3} = 0 \dots \dots \dots (499)$$

.....

Такимъ образомъ, существованіе удерживающей связи влечетъ за собою существованіе ряда равенствъ (493), (498), (499)....

Полученное нами равенство (493), выражающее зависимость между скоростями точекъ, связанныхъ удерживающею связью, можетъ быть представлено еще въ одномъ видѣ, какъ будетъ указано въ § 62.

§ 61. Дифференціальныя параметры связи и ихъ направленія.

Положимъ, что точки $m_1, m_2, m_3, \dots m_i, \dots m_n$ связаны связью удерживающею (491) или неудерживающею (492); выберемъ произвольный моментъ времени и положимъ, что въ этотъ моментъ точки $m_1, m_2, \dots m_n$ находятся въ положеніяхъ $M_1, M_2, \dots M_i, \dots M_n$; для отличія намѣченнаго нами момента отъ другихъ моментовъ времени и точекъ $M_1, M_2, \dots M_n$ отъ другихъ точекъ пространства, означимъ этотъ моментъ буквою τ и координаты точекъ

$$M_1 \ M_2 \dots M_i \dots M_n$$

буквами:

$$a_1, a_2, \dots a_i, \dots a_n$$

$$b_1, b_2, \dots b_i, \dots b_n$$

$$c_1, c_2, \dots c_i, \dots c_n$$

Если въ функціи ψ придать величинамъ $x_2, y_2, z_2, \dots, x_n, y_n, z_n$ постоянныя и произвольныя значенія $a_2, b_2, c_2, \dots, a_n, b_n, c_n$, то уравненіе (491) обратится въ уравненіе:

$$\psi(x_1, y_1, z_1, a_2, b_2, c_2, \dots, a_n, b_n, c_n, t) = 0 \dots (500)$$

той удерживающей преграды для точки m_1 , въ которую обратится удерживающая связь (491), когда остальные точки $m_2, m_3, \dots, m_i, \dots, m_n$ будутъ закрѣплены въ положеніяхъ $M_2, M_3, \dots, M_i, \dots, M_n$. Уравненіе (500) выражаетъ въ некоторую поверхность измѣняемаго вида; въ моментъ τ эта поверхность имѣетъ видъ и положеніе, выражаемое уравненіемъ:

$$\psi(x_1, y_1, z_1, a_2, b_2, c_2, \dots, a_n, b_n, c_n, \tau) = 0, \dots (501)$$

и тогда навѣрно проходить черезъ точку M_1 .

Косинусы угловъ, составленныхъ съ осями координатъ положительную нормалью N_1 къ поверхности (501) въ точкѣ M_1 выражаются, какъ извѣстно (см. (154) стр. 112 и (259) стр. 175), слѣдующими формулами:

$$\cos(N_1, X) = \frac{1}{P_1} \frac{\partial \psi}{\partial x_1},$$

$$\cos(N_1, Y) = \frac{1}{P_1} \frac{\partial \psi}{\partial y_1},$$

$$\cos(N_1, Z) = \frac{1}{P_1} \frac{\partial \psi}{\partial z_1}, \quad P_1 = \sqrt{\left(\frac{\partial \psi}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial y_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial z_1}\right)^2};$$

здѣсь, въ производныхъ, вмѣсто x_1, y_1, z_1 , должно подставить a_1, b_1, c_1 , а вмѣсто $x_2, y_2, z_2, \dots, x_n, y_n, z_n, t$, заключающихся въ функціи ψ , подставлены: $a_2, b_2, c_2, \dots, a_n, b_n, c_n, \tau$.

Если же закрѣпимъ всѣ точки, исключая m_i въ положеніяхъ $M_1, M_2, \dots, M_{i-1}, M_{i+1}, M_n$, то связь (491) обратится въ удерживающую преграду для точки m_i ; преграда эта въ моментъ τ будетъ имѣть видъ и положеніе поверхности, проходящей черезъ точку M_i и представляемой уравненіемъ:

$$\psi(a_1, b_1, c_1, \dots, x_i, y_i, z_i, \dots, a_n, b_n, c_n, \tau) = 0, \dots (502)$$

(первая часть этого уравненія заключаетъ только три переменныя: x_i, y_i, z_i ; всё остальные величины: $a_1, b_1, c_1, \dots, a_{i-1}, b_{i-1}, c_{i-1}, a_{i+1}, b_{i+1}, c_{i+1}, \dots, a_n, b_n, c_n$, τ — постоянны).

Положительная нормаль N_i , восстановленная изъ точки M , къ поверхности (502), составляетъ съ осями координатъ углы, косинусы которыхъ суть:

$$\begin{aligned} \cos(N_i, X) &= \frac{1}{P_i} \frac{\partial v}{\partial x_i}, \\ \cos(N_i, Y) &= \frac{1}{P_i} \frac{\partial v}{\partial y_i}, \\ \cos(N_i, Z) &= \frac{1}{P_i} \frac{\partial v}{\partial z_i}; \quad P_i = + \sqrt{\left(\frac{\partial v}{\partial x_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z_i}\right)^2}. \end{aligned}$$

Эти формулы справедливы и для случая, когда поверхность (502) является частью поверхности, ограниченной координатными плоскостями, если только не $\delta < 0$.

Такимъ образомъ мы видимъ, что частныя производныя отъ функций v по координатамъ могутъ быть выражены помощью величинъ P_1, P_2, \dots, P_n , и направлений N_1, N_2, \dots, N_n ; этимъ обстоятельствомъ мы будемъ часто пользоваться въ нашихъ разсужденіяхъ, а потому условимся относительно наименованія и обозначенія этихъ величинъ и направлений.

Величины P_1, P_2, \dots, P_n называются *дифференціальными параметрами перваго порядка функции v въ точкахъ m_1, m_2, \dots, m_n* ; мы условимся называть ихъ *дифференціальными параметрами связи (491) или (492) въ точкахъ m_1, m_2, \dots, m_n* ; такимъ образомъ связь имѣетъ въ каждой изъ связываемыхъ ею точекъ особый дифференціальный параметръ.

Направленія N_1, N_2, \dots, N_n называются *направлениями дифференціальныхъ параметровъ P_1, P_2, \dots, P_n* ; слѣдовательно, эти параметры разсматриваются, подобно радіусамъ векторовъ, скоростямъ, ускореніямъ, силамъ и количествамъ движенія, какъ величины, изображаемыя длинами, отложенными по надлежащимъ направленіямъ.

По этой причинѣ мы будемъ обозначать направленія N_1, N_2, \dots, N_n теми же знаками P_1, P_2, \dots, P_n , какими обозначаемъ величины параметровъ, а такъ какъ одна и та же точка можетъ быть подчинена нѣсколькимъ связямъ, то для отличія знаковъ дифферен-

ціальныхъ параметровъ различныхъ связей въ одной и той же точкѣ, мы будемъ присоединять къ P еще знакъ, обозначающій самую связь; такимъ образомъ знаки:

$$(P_{1u}), (P_{2u}), \dots (P_{ju}), \dots (P_{nu})$$

будутъ обозначать и величины и направленія дифференціальныхъ параметровъ связи (491) или связи (492) въ точкахъ:

$$m_1, m_2, \dots m_i, \dots m_n.$$

Величина и направленіе дифференціального параметра P_u определяются слѣдующими формулами:

$$\left. \begin{aligned} \cos(P_u, X) &= \frac{1}{(P_u)} \frac{\partial u}{\partial x}, \\ \cos(P_u, Y) &= \frac{1}{(P_u)} \frac{\partial u}{\partial y}, \\ \cos(P_u, Z) &= \frac{1}{(P_u)} \frac{\partial u}{\partial z}, \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (503)$$

$$(P_u) = + \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2} \dots (503 \text{ bis})$$

§ 62. Уравненіе (493) можетъ быть представлено подъ слѣдующимъ видомъ:

$$v_1(P_{1u}) \cos(P_{1u}, v_1) + v_2(P_{2u}) \cos(P_{2u}, v_2) + \dots + v_n(P_{nu}) \cos(P_{nu}, v_n) + \frac{\partial u}{\partial t} = 0, \dots (493, a)$$

или:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \sum_{i=1}^n v_i(P_{iu}) \cos(P_{iu}, v_i) = 0 \dots (493, a)$$

4. Если функція u не заключаетъ явнымъ образомъ времени, то частная производная отъ u по t равна нулю; слѣдовательно зависимость между скоростями точекъ, связаннымъ удерживающею связью, уравненіе которой:

$$u(x_1, y_1, z_1, \dots x_i, y_i, z_i, \dots x_n, y_n, z_n) = 0 \dots (491, b)$$

не заключает явным образом времени t , выражается равенством:

$$\sum_{i=1}^n v_i(P_i) \cos(P_i, v_i) = 0 \dots (493, b)$$

Въ этомъ уравненіи заключаются собственно не самыя скорости точекъ, но проэкции скорости каждой точки на направленіе дифференціального параметра связи въ той же точкѣ; поэтому, только эти проэкции подлежатъ ограниченію, выражаемому уравненіемъ (493, b).

Изъ этого уравненія (493, b) мы выведемъ нѣсколько заключеній относительно тѣхъ ограниченій, которымъ должны подчиняться скорости точекъ, связываемыхъ удерживающею связью (491, b).

1. Уравненіе (493, b) не допускаетъ, чтобы сказыныя проэкции могли быть положительными для всѣхъ точекъ одновременно; точно также онѣ не могутъ быть и одновременно отрицательными для всѣхъ точекъ, связываемыхъ удерживающею связью (491, b). Необходимо, чтобы проэкции эти у одной части всего числа точекъ были положительныя, а у остальныхъ — отрицательныя.

Эти проэкции могутъ быть равны нулю у всѣхъ точекъ одновременно, то-есть удерживающая связь (491, b) допускаетъ, чтобы всѣ точки имѣли произвольныя скорости перпендикулярныя къ своимъ дифференціальнымъ параметрамъ.

Если всѣ точки, за исключеніемъ одной, имѣютъ скорости перпендикулярныя къ своимъ параметрамъ, то уравненіе (493, b) требуетъ, чтобы и эта точка имѣла скорость перпендикулярную къ ея параметру.

Если всѣ точки, за исключеніемъ двухъ, имѣютъ скорости перпендикулярныя къ своимъ параметрамъ, то скорость одной изъ двухъ оставшихся точекъ должна составлять острый уголъ съ ея параметромъ, а скорость другой должна быть направлена подъ тупымъ угломъ къ ея параметру.

Всѣ точки, связанныя удерживающею связью (491, b), могутъ

имѣть одновременно скорости равныя между собою и параллельныя всякому такому направленію H , для котораго имѣетъ мѣсто равенство:

$$\sum_{i=1}^n (P_{i,v}) \cos(P_{i,v}, H) = 0. \dots \dots \dots (504)$$

Для опредѣленія этихъ направленій надо изобразить дифференціальныя параметры $P_{1v}, P_{2v}, \dots, P_{nv}$ длинами и построить геометрическую сумму P_v этихъ длинъ; по свойству геометрической суммы:

$$(P_v) \cos(P_v, H) = \sum_{i=1}^n (P_{i,v}) \cos(P_{i,v}, H),$$

поэтому искомыя направленія суть всѣ тѣ, которыя перпендикулярны къ направленію геометрической суммы P_v дифференціальныхъ параметровъ, $P_{1v}, P_{2v}, \dots, P_{nv}$.

§ Если геометрическая сумма дифференціальныхъ параметровъ $P_{1v}, P_{2v}, \dots, P_{nv}$ равна нулю, то тогда равенство (504) имѣетъ мѣсто для какого угодно направленія.

Примѣръ 53. Дифференціальныя параметры удерживающей связи

$$+ \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2} - l = 0$$

равны единицѣ и направлены по продолженіямъ линій, соединяющей обѣ точки m_1 и m_2 . Для этой связи равенство (493, b) получаетъ слѣдующій видъ:

$$v_1 \cos(M, \overline{M}_1, v_1) - v_2 \cos(M, \overline{M}_2, v_2) = 0,$$

гдѣ $\overline{M}_1 \overline{M}_2$ означаетъ направленіе, проведенное изъ точки m_1 къ точкѣ m_2 , это равенство выражаетъ, что скорости точекъ m_1 и m_2 должны имѣть равныя проеціи на направленіе $\overline{M}_1 \overline{M}_2$; такая зависимость между скоростями точекъ, связаныхъ связью, удерживающею ихъ въ постоянномъ разстояніи одна отъ другой

Примѣръ 57. Удерживающая связь:

$$r_1 + r_2 - l = 0,$$

$$r_1 = +\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}, r_2 = +\sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}$$

не заключаетъ любого образа времени t , выражается равенствомъ:

$$\sum_{i=1}^{n} r_i (P_i) \cos (P_i, v_i) = 0 \dots (493, b)$$

Въ этомъ уравненіи заключаются собственно не самыя скорости точекъ, но проэктіа скорости каждой точки на направленіе дифференціальнаго параметра связи въ той же точкѣ; поэтому, только эти проэктіа подлежатъ ограниченію, выражаемому уравненіемъ (493, b).

Изъ этого уравненія (493, b) мы выведемъ нѣсколько заключеній относительно тѣхъ ограниченій, которымъ должны подчиняться скорости точекъ, связываемыхъ удерживающею связью (491, b).

1. Уравненіе (493, b) не допускаетъ, чтобы связанныя проэктіа могли быть положительными для всѣхъ точекъ одновременно; точно также онѣ не могутъ быть и одновременно отрицательными для всѣхъ точекъ, связываемыхъ удерживающею связью (491, b). Необходимо, чтобы проэктіа эти у одной части всего числа точекъ были положительныя, а у остальныхъ — отрицательныя.

Эти проэктіа могутъ быть равны нулю у всѣхъ точекъ одновременно, то-есть удерживающая связь (491, b) допускаетъ, чтобы всѣ точки имѣли произвольныя скорости перпендикулярныя къ своимъ дифференціальнымъ параметрамъ.

Если всѣ точки, за исключеніемъ одной, имѣютъ скорости перпендикулярныя къ своимъ параметрамъ, то уравненію (493, b) требуетъ, чтобы и эта точка имѣла скорость перпендикулярную къ ея параметру.

Если всѣ точки, за исключеніемъ двухъ, имѣютъ скорости перпендикулярныя къ своимъ параметрамъ, то скорость одной изъ двухъ оставшихся точекъ должна составлять острый уголъ съ ея параметромъ, а скорость другой должна быть направлена подъ тупымъ угломъ къ ея параметру.

Всѣ точки, связанныя удерживающею связью (491, b), могутъ

имѣть одновременно скорости равныя между собою и параллельныя всякому такому направленію H , для котораго имѣетъ мѣсто равенство:

$$\sum_{i=1}^n (P_{i,s}) \cos(P_{i,s}, H) = 0. \dots \dots \dots (504)$$

Для опредѣленія этихъ направленій надо изобразить дифференціальныя параметры $P_{1s}, P_{2s}, \dots, P_{ns}$ длинами и построить геометрическую сумму P_s этихъ длинъ; по свойству геометрической суммы:

$$(P_s) \cos(P_s, H) = \sum_{i=1}^n (P_{i,s}) \cos(P_{i,s}, H),$$

поэтому искомыя направленія суть всѣ тѣ, которыя перпендикулярны къ направленію геометрической суммы P_s дифференціальныхъ параметровъ, $P_{1s}, P_{2s}, \dots, P_{ns}$.

6. Если геометрическая сумма дифференціальныхъ параметровъ $P_{1s}, P_{2s}, \dots, P_{ns}$ равна нулю, то тогда равенство (504) имѣетъ мѣсто для какого угодно направленія.

Примѣръ 53. Дифференціальныя параметры удерживающей связи

$$+ \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2} - l = 0$$

равны единицѣ и направлены по продолженіямъ линій, соединяющей обѣ точки m_1 и m_2 . Для этой связи равенство (493, b) получаетъ слѣдующій видъ:

$$v_1 \cos(M_1 M_2, v_1) - v_2 \cos(M_1 M_2, v_2) = 0,$$

гдѣ $\overline{M_1 M_2}$ означаетъ направленіе, проведенное изъ точки m_2 къ точкѣ m_1 ; это равенство выражаетъ, что скорости точекъ m_1 и m_2 должны имѣть равныя проекціи на направленіе $\overline{M_1 M_2}$; такая зависимость между скоростями точекъ, связанныхъ связью, удерживающею ихъ въ постояннотѣ разстояніи одна отъ другой.

Примѣръ 57. Удерживающая связь:

$$r_1 + r_2 - l = 0,$$

$$r_1 = +\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}, r_2 = +\sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}$$

имѣтъ дифференціальныя параметры, равныя единицѣ и направленные по продолженіямъ радіусовъ векторовъ $\overline{OM}_1 = r_1$ и $\overline{OM}_2 = r_2$. Для этой связи равенство (493, b) получаетъ слѣдующій видъ:

$$v_1 \cos(r_1, v_1) + v_2 \cos(r_2, v_2) = 0$$

и выражаетъ, что проэкція скорости точки m_1 на направление \overline{OM}_1 должна имѣть величину, равную величинѣ проэкціи скорости точки m_2 на направление $\overline{M_2O}$.

Скорости обѣихъ точекъ могутъ быть равны и параллельны одна другой, но для этого направление скоростей должно быть перпендикулярно къ линіи, дѣлящей уголъ M_1OM_2 пополамъ.

Примѣръ 58. Представимъ себѣ, что двѣ точки m_1 и m_2 подвержены удерживающей связи, выражаемой равенствомъ:

$$r_1 + r_{12} + r_{a2} - l = 0,$$

гдѣ

$$r_1^2 = x_1^2 + y_1^2 + z_1^2, \quad r_{a2}^2 = (x_2 - a)^2 + y_2^2 + z_2^2$$

$$r_{12}^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2.$$

Эту связь можно представить себѣ въ видѣ нерастяжимой нити длины l , которая концами своими прикрѣплена къ началу координатъ и къ неподвижной точкѣ A (черт. 34) на оси X ; точки m_1 и m_2 должны оставаться на нити, но могутъ скользить по ней; нить всегда натянута, такъ что сумма длинъ OM_1 , M_1M_2 , M_2A постоянно равна l .

Изъ равенствъ:

$$P_1 \cos(P_1, X) = \frac{x_1}{r_1} + \frac{x_1 - x_2}{r_{12}}, \quad P_2 \cos(P_2, X) = \frac{x_2 - x_1}{r_{12}} + \frac{x_2 - a}{r_{a2}}$$

и изъ четырехъ прочихъ мы найдемъ, что

$$P_1 = 2 \cos \frac{\alpha_1}{2}, \quad P_2 = 2 \cos \frac{\alpha_2}{2},$$

гдѣ α_1 есть величина угла OM_1M_2 , а α_2 — величина угла M_1M_2A ; направлены P_1 и P_2 по линіямъ, дѣлящимъ внѣшніе углы OM_1M_2 и M_1M_2A пополамъ (см. черт. 34).

Уравненіе (493, b) получаетъ въ этомъ случаѣ такой видъ:

$$v_1 \cos \frac{\alpha_1}{2} \cos(P_1, v_1) + v_2 \cos \frac{\alpha_2}{2} \cos(P_2, v_2) = 0.$$

Направление геометрической суммы параметров P_1 и P_2 дѣлит пополамъ уголъ между направленіями OM_1 и OM_2 , поэтому точки m_1 и m_2 могутъ имѣть одновременно равныя и параллельныя скорости только по направленіямъ перпендикулярнымъ къ линіи MP (см. черт. 34).

Примѣръ 59. Двѣ точки m_1 , m_2 , остающіяся постоянно въ плоскости XU , связаны удерживающею связью, выражаемою уравненіемъ:

$$x_1y_2 - y_1x_2 - a = 0;$$

это уравненіе выражаетъ, что удвоенная площадь треугольника OM_1M_2 сохраняетъ постоянную величину a .

Составимъ равенства:

$$P_1 \cos(P_1, X) = y_2, \quad P_1 \cos(P_2, X) = -y_1$$

$$P_1 \cos(P_1, Y) = -x_2, \quad P_2 \cos(P_2, Y) = x_1;$$

изъ нихъ оказывается, что параметръ P_2 равенъ длинѣ OM_1 и направленъ перпендикулярно къ направленію OM_1 въ такую сторону, что наблюдатель стоящему въ O по оси Z и смотрящему на M_1 , онъ кажется направленнымъ слѣва на право (см. черт. 35); параметръ P_1 равенъ длинѣ OM_2 и направленъ перпендикулярно къ этой длинѣ, какъ показано на черт. 35-мъ.

Скорости точекъ m_1 и m_2 должны удовлетворять слѣдующему равенству:

$$r_2v_1 \cos(P_1, v_1) + r_1v_2 \cos(P_2, v_2) = 0.$$

Б По отношенію къ такимъ удерживающимъ связямъ, въ уравненіи которыхъ время входитъ явнымъ образомъ, мы обратимъ вниманіе на слѣдующія обстоятельства.

1) Уравненіе (493, а) не допускаетъ, чтобы скорости всѣхъ точекъ были равны нулю или чтобы всѣ точки имѣли скорости перпендикулярныя къ своимъ дифференціальнымъ параметрамъ.

2) Если частная производная отъ n по t есть величина положительная, то изъ равенства (493, а) слѣдуетъ, что всѣ точки могутъ обладать скоростями, составляющими тупые углы съ ихъ дифференціальными параметрами; обратно, если указанная частная производная есть величина отрицательная, то всѣ точки могутъ

обладать скоростями, составляющими острые углы съ ихъ дифференціальными параметрами; напримѣръ, если

$$\frac{\partial s}{\partial t} < 0,$$

то точки

$$m_1, m_2, \dots m_i, \dots m_n$$

могутъ обладать скоростями:

$$AP_1, AP_2, \dots AP_i, \dots AP_n,$$

направленными по этимъ параметрамъ; здѣсь A означаетъ величину отношенія:

$$A = \frac{\frac{\partial s}{\partial t}}{\sum_{i=1}^{i=n} P_i^2}$$

3) Пусть

$$v_1, v_2, \dots v_i, \dots v_n$$

$$w_1, w_2, \dots w_i, \dots w_n$$

суть двѣ какія-либо совокупности скоростей точекъ

$$m_1, m_2, \dots m_i, \dots m_n,$$

удовлетворяющія уравненію (493, а); вычтя уравненіе

$$\frac{\partial s}{\partial t} + \sum_{i=1}^{i=n} w_i P_i \cos (P_i, w_i) = 0$$

изъ уравненія

$$\frac{\partial s}{\partial t} + \sum_{i=1}^{i=n} v_i P_i \cos (P_i, v_i) = 0,$$

получимъ

$$\sum_{i=1}^{i=n} u_i (P_{i,8}) \cos (P_{i,8}, u_i) = 0, \dots \dots \dots (505)$$

гдѣ u_i есть геометрическая разность между скоростями v_i и w_i , то есть:

$$u_1 = v_1 - w_1, \quad u_2 = v_2 - w_2, \quad \dots \quad u_n = v_n - w_n. \quad (505 \text{ bis})$$

§ 63. Зависимость между скоростями точекъ, связанныхъ неудерживающею связью

1) Когда координаты точекъ, связанныхъ неудерживающею связью (492), дѣлають функцію n , большую нуля, то есть удовлетворяють неравенству:

$$n(x_1, y_1, z_1, \dots, x_n, y_n, z_n, t) > 0,$$

тогда скорости точекъ (а также и ускоренія ихъ) не подлежатъ никакому органиченію.

2) Когда же координаты точекъ дѣлають функцію n равною нулю, тогда скорости точекъ должны удовлетворять слѣдующему условию:

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \sum_{i=1}^n v_i(P, v) \cos(P, v_i) \geq 0 \quad \dots \quad (506, \text{ а})$$

Въ самомъ дѣлѣ, такъ какъ въ моментъ t координаты точекъ удовлетворяють уравненію:

$$n(x_1, y_1, z_1, \dots, x_n, y_n, z_n, t) = 0,$$

и такъ какъ въ послѣдующій весьма близкій моментъ $(t + \theta)$ онѣ должны удовлетворять условию:

$$n((t + \theta)) \geq 0,$$

то, на основаніи равенства (495), должно быть удовлетворено условіе:

$$\frac{\partial n}{\partial t} \theta + \frac{\partial^2 n}{\partial t^2} \frac{\theta^2}{1.2} + \frac{\partial^3 n}{\partial t^3} \frac{\theta^3}{1.2.3} \dots + \geq 0$$

при всякихъ значеніяхъ весьма малаго промежутка времени θ ; но, при надлежащей степени малости промежутка времени θ , знакъ всего вышеприведеннаго ряда опредѣляется знакомъ члена, заклю-

чающаго низшую степень ϑ , поэтому полная производная первого порядка отъ ϑ по t должна быть не менѣ нуля, то есть должно быть:

$$\frac{d\vartheta}{dt} \geq 0, \dots \dots \dots (506, a)$$

какъ сказано выше.

Если

$$\frac{d\vartheta}{dt} > 0,$$

то полныя производныя второго и высшихъ порядковъ не подлежатъ никакому ограниченію,*^{*)} если же

$$\frac{d\vartheta}{dt} = 0, \dots \dots \dots (493)$$

то полная производная второго порядка должна быть не менѣ нуля, то есть должно быть:

$$\frac{d^2\vartheta}{dt^2} \geq 0 \dots \dots \dots (507)$$

Если скорости точекъ системы удовлетворяютъ равенству (493), а ускоренія — равенству:

$$\frac{d^2\vartheta}{dt^2} = 0, \dots \dots \dots (498)$$

то должно быть:

$$\frac{d^3\vartheta}{dt^3} \geq 0, \dots \dots \dots (508)$$

и такъ далѣе.

Б. Если функція ϑ не заключаетъ времени явнымъ образомъ, то есть то условіе (506, а) получаетъ слѣдующій видъ:

$$\sum_{i=1}^{i=n} v_i(P_{i\vartheta}) \cos(P_{i\vartheta}, v_i) \geq 0 \dots \dots \dots (506, b)$$

Когда координаты точекъ $m_1, m_2, \dots \dots m_i, \dots \dots m_n$, подчиненныхъ неукрѣпленной связи:

$$\vartheta(x_1, y_1, z_1, \dots \dots x_n, y_n, z_n) \geq 0 \dots \dots \dots (492, b)$$

**) см. § 66, 2.

(выраженіе которой не заключаетъ времени явнымъ образомъ) *удовлетворяютъ равенству:*

$$v(x_1, y_1, z_1, \dots, x_n, y_n, z_n) = 0,$$

тогда скорости точекъ должны удовлетворять условию (506, b).

Это условіе не допускаетъ, чтобы углы, составляемые направлениемъ скорости и направлениемъ дифференціального параметра въ каждой точкѣ, были тупыми во всѣхъ точкахъ одновременно.

Если между углами:

$$(P_1, v_1), (P_2, v_2), \dots, (P_n, v_n), \dots, (P_n, v_n)$$

нѣтъ ни одного тупаго, то скорости могутъ быть совершенно произвольны.

Напримѣръ, всѣ точки могутъ обладать одновременно произвольными скоростями, направленными вдоль по положительнымъ направленіямъ дифференціальныхъ параметровъ.

Примѣръ 54. Дифференціальныя параметры неудерживающей связи:

$$l^2 - r_{12}^2 \geq 0,$$

(гдѣ r_{12} есть разстояніе между точками m_1 и m_2) направлены внутрь кратчайшаго разстоянія между точками (черт. 36) и равны:

$$P_1 = P_2 = 2r_{12},$$

какъ это слѣдуетъ изъ равенствъ

$$P_1 \cos(P_1, X) = -2(x_1 - x_2), \quad P_2 \cos(P_2, X) = -2(x_2 - x_1)$$

и изъ четырехъ остальныхъ; если же эту самую связь выразимъ такъ:

$$l - r_{12} \geq 0,$$

то величины дифференціальныхъ параметровъ окажутся равными единицѣ.

Условіе (506, b) для этой связи можетъ быть представлено подъ слѣдующимъ видомъ:

$$v_1 \cos(M_1 M_2, v_1) - v_2 \cos(M_1 M_2, v_2) \geq 0,$$

то есть проэкция скорости точки m_1 на направление $\overline{M_1 M_2}$ должна быть *больше* проэкции на то же направление скорости точки m_2 .

Примѣръ 55. Дифференціальныя параметры неударивающей связи

$$r_{12} - l \geq 0$$

равны единицѣ и направлены внаружу кратчайшаго разстоянія между точками m_1 и m_2 (черт. 37). Условіе (506, b):

$$v_2 \cos(\overline{M_1 M_2}, v_2) - v_1 \cos(\overline{M_1 M_2}, v_1) \geq 0$$

въ этомъ случаѣ имѣетъ смыслъ обратный смыслу условія предыдущаго примѣра, то есть оно требуетъ, чтобы проэкция скорости v_1 на направление $\overline{M_1 M_2}$ была *меньше* проэкции скорости v_2 .

Примѣръ 56.

$$l - r_{12} - r_{23} \geq 0.$$

Параметры P_1 и P_3 въ точкахъ M_1 и M_3 равны единицѣ и направлены по линіямъ $\overline{M_1 M_2}$ и $\overline{M_3 M_2}$ (черт. 38); параметръ P_2 въ точкѣ M_2 равенъ $2 \cos \frac{\alpha}{2}$ (гдѣ α означаетъ величину угла $M_1 M_2 M_3$) и направленъ по линіи, дѣлящей уголъ $M_1 M_2 M_3$ пополамъ.

Скорости точекъ m_1, m_2, m_3 должны удовлетворять слѣдующему условію:

$$v_1 \cos(\overline{M_1 M_2}, v_1) + v_3 \cos(\overline{M_3 M_2}, v_3) + 2v_2 \cos \frac{\alpha}{2} \cos(P_2, v_2) \geq 0.$$

Примѣръ 60. На гибкой нерастяжимой нити длины l находятся точки $m_1, m_2, \dots, m_{n-1}, m_n$; точки m_1 и m_n прикрѣплены къ концамъ нити, всѣ же остальные могутъ скользить вдоль по ней, причемъ, однако, не долженъ нарушаться порядокъ расположенія точекъ вдоль нити; эта связь можетъ быть выражена слѣдующею формулою:

$$l - r_{12} - r_{23} - r_{34} - \dots - r_{(n-1)n} \geq 0.$$

Дифференціальныя параметры въ точкахъ M_1 и M_n равны единицѣ и направлены вдоль по нити (см. черт. 39); дифференціальныя же параметры въ остальныхъ точкахъ равны:

$$P_2 = 2 \cos \frac{\alpha_2}{2}, \quad P_3 = 2 \cos \frac{\alpha_3}{2}, \quad \dots \quad P_{n-1} = 2 \cos \frac{\alpha_{n-1}}{2}$$

и направлены по линіямъ, дѣлящимъ пополамъ углы $\alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_{n-1}$.

Замечаніе: условіе, которое должно удовлетворять системамъ точекъ, связаннымъ между собою нитями, можетъ быть выражено формулою

§ 64. Совокупныя дифференціальныя уравненія движенія системы свободныхъ матеріальныхъ точекъ.

Матеріальныя точки:

$$m_1, m_2, \dots, m_i, \dots, m_n^*)$$

свободны, если нѣтъ преградъ, ограничивающихъ свободу движенія точекъ и если нѣтъ никакихъ связей между ними; тогда каждая изъ этихъ точекъ можетъ имѣть какую угодно скорость и какое угодно ускореніе по произвольному направленію и притомъ независимо отъ остальныхъ точекъ.

Составимъ дифференціальныя уравненія движенія этихъ точекъ.

Пусть X_i, Y_i, Z_i суть проекціи на оси координатъ равнодѣйствующей F_i всѣхъ силъ, приложенныхъ къ точкѣ m_i , такъ какъ она, подобно всѣмъ прочимъ точкамъ, свободна, то дифференціальныя уравненія ея движенія будутъ:

$$m_i \frac{d^2 x_i}{dt^2} = X_i, \quad m_i \frac{d^2 y_i}{dt^2} = Y_i, \quad m_i \frac{d^2 z_i}{dt^2} = Z_i, \quad \dots \quad (509, i)$$

Подобныя же уравненія напишемъ для всѣхъ прочихъ точекъ; всего будемъ имѣть $3n$ дифференціальныхъ уравненій:

$$\left. \begin{aligned} m_1 x_1'' &= X_1, \dots, m_i x_i'' = X_i, \dots, m_n x_n'' = X_n \\ m_1 y_1'' &= Y_1, \dots, m_i y_i'' = Y_i, \dots, m_n y_n'' = Y_n \\ m_1 z_1'' &= Z_1, \dots, m_i z_i'' = Z_i, \dots, m_n z_n'' = Z_n \end{aligned} \right\} \dots \quad (509)$$

Вторыя части этихъ дифференціальныхъ уравненій (то есть выраженія силъ $X_1, Y_1, Z_1, \dots, Z_n$) суть, вообще говоря, нѣкоторыя функціи времени, координатъ точекъ и проекцій ихъ скоростей на оси координатъ.

Коль скоро всѣ эти функціи извѣстны, то, для опредѣленія движенія точекъ, надо дифференціальныя уравненія (509) интегрировать.

*) Буквы $m_1, m_2, \dots, m_i, \dots, m_n$ означаютъ массы матеріальныхъ точекъ.

Если опредѣленіе движенія каждой изъ этихъ точекъ требуетъ интегрированія всѣхъ уравненій (509) въ совокупности и не можетъ быть отдѣлено отъ опредѣленія движенія всѣхъ остальныхъ точекъ, то тогда эти точки $m_1, m_2, \dots, m_i, \dots, m_n$ образуютъ *систему свободныхъ материальныхъ точекъ*.

Силы, приложенныя къ свободнымъ точкамъ и связывающія ихъ въ одну систему, могутъ быть весьма различнаго характера; къ числу такихъ силъ принадлежатъ всякія силы взаимодѣйствія между материальными точками.

Примѣръ 61. Система состоитъ изъ двухъ свободныхъ точекъ m_1 и m_2 , взаимно-отталкиваемыхъ (по линіи ихъ соединяющей) силами

$$F(r_{12}),$$

(гдѣ r_{12} означаетъ величину расстоянія между точками).

Совокупныя дифференціальныя уравненія движенія этой системы будутъ слѣдующія:

$$\begin{aligned} m_1 x_1'' &= F(r_{12}) \frac{x_1 - x_2}{r_{12}}, m_1 x_2'' = F(r_{12}) \frac{x_2 - x_1}{r_{12}} \\ m_1 y_1'' &= F(r_{12}) \frac{y_1 - y_2}{r_{12}}, m_1 y_2'' = F(r_{12}) \frac{y_2 - y_1}{r_{12}} \\ m_1 z_1'' &= F(r_{12}) \frac{z_1 - z_2}{r_{12}}, m_1 z_2'' = F(r_{12}) \frac{z_2 - z_1}{r_{12}}. \end{aligned}$$

Примѣръ 62. Система состоитъ изъ n свободныхъ материальныхъ точекъ; каждыя двѣ точки взаимно притягиваются силами, пропорціональными произведенію изъ массы этихъ точекъ и изъ расстоянія между ними, напримѣръ, силы взаимнаго притяженія точекъ m_1 и m_k равны

$$\mu m_1 m_k r_{1k},$$

гдѣ численный множитель μ одинаковъ для всѣхъ паръ точекъ.

Составимъ дифференціальныя уравненія движенія для точки m_1 . Проекція на ось X равнодѣйствующей всѣхъ силъ, приложенныхъ къ этой точкѣ, равна:

$$X_1 = -\mu m_1 [m_2(x_1 - x_2) + m_3(x_1 - x_3) + \dots + m_n(x_1 - x_n)],$$

а это выражение можно представить такъ:

$$X_1 = -\mu m_1 \sum_{k=1}^k \sum_{l=1}^n m_k (x_1 - x_k);$$

поэтому дифференціальныя уравненія точки m_1 будутъ слѣдующія:

$$m_1 x_1'' = -\mu m_1 \sum_{k=1}^k \sum_{l=1}^n m_k (x_1 - x_k)$$

$$m_1 y_1'' = -\mu m_1 \sum_{k=1}^k \sum_{l=1}^n m_k (y_1 - y_k)$$

$$m_1 z_1'' = -\mu m_1 \sum_{k=1}^k \sum_{l=1}^n m_k (z_1 - z_k).$$

Примѣръ 63. Система состоитъ изъ двухъ точекъ, находящихся въ плоскости XU , между точками существуютъ взаимодѣйствія равныя, противоположныя, но направленныя перпендикулярно къ линіи, соединяющей обѣ точки, силы эти равны:

$$F = \mu \frac{m_1 m_2}{r_{12}^2}.$$

Дифференціальныя уравненія движенія будутъ:

$$m_1 x_1'' = \pm \mu m_1 m_2 \frac{y_1 - y_2}{r_{12}^3}, \quad m_2 x_2'' = \mp \mu m_1 m_2 \frac{y_2 - y_1}{r_{12}^3},$$

$$m_1 y_1'' = \mp \mu m_1 m_2 \frac{x_1 - x_2}{r_{12}^3}, \quad m_2 y_2'' = \pm \mu m_1 m_2 \frac{x_2 - x_1}{r_{12}^3},$$

верхніе знаки относятся къ тому случаю, когда взаимодѣйствія направлены въ стороны, указанныя на чертежѣ 40-мъ, нижніе - въ противоположномъ случаѣ (черт. 41).

§ 65. Дифференціальныя уравненія движенія системы матеріальныхъ точекъ, подверженныхъ преградамъ, но не связанныхъ между собою никакими связями.

Если которая-либо изъ системы точекъ $m_1, m_2, \dots, m_i, \dots, m_n$ ограничена въ своемъ движеніи какими-либо поверхностями, то во вторыхъ частяхъ дифференціальныхъ уравненій этой точки будутъ

заклучаться проэкціи реакцій этихъ поверхностей; напрымѣръ, если свобода движенія точки m_1 ограничена двумя преградами:

$$f_1(x_1, y_1, z_1, t) = 0, \quad f_2(x_1, y_1, z_1, t) = 0,$$

то дифференціальныя уравненія движенія этой точки будутъ: (см. д. 374)

$$\left\{ \begin{aligned} m_1 x_1'' &= X_1 + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial x_1}, \\ m_1 y_1'' &= Y_1 + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial y_1} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial y_1}, \\ m_1 z_1'' &= Z_1 + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial z_1} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial z_1}; \end{aligned} \right.$$

если, далѣе, свобода движенія точки m_2 ограничена одною преградою:

$$f_3(x_2, y_2, z_2, t) = 0,$$

то дифференціальныя уравненія движенія этой точки будутъ: (см. д. 314)

$$\left\{ \begin{aligned} m_2 x_2'' &= X_2 + \lambda_3 \frac{\partial f_3}{\partial x_2}, \\ m_2 y_2'' &= Y_2 + \lambda_3 \frac{\partial f_3}{\partial y_2}, \\ m_2 z_2'' &= Z_2 + \lambda_3 \frac{\partial f_3}{\partial z_2}, \end{aligned} \right.$$

и т. д.

§ 66. Условіе, которому должны удовлетворять ускоренія точекъ, связываемыхъ какою-либо связью.

1) Если точки m_1, m_2, \dots, m_n связаны какою-либо удерживающею связью, то, какъ было уже выведено въ § 60-мъ, ускоренія ихъ должны удовлетворять равенству (498), которое можетъ быть представлено подъ слѣдующимъ видомъ:

выводится изъ 496
какъ 493 а изъ 493.
(см. § 63)

$$\sum_{i=1}^{i=n} \ddot{v}_i (P_{i*}) \cos (P_{i*}, \dot{v}_i) + K_* = 0 \quad \dots \quad (498, a) \rightarrow$$

2) Если же связь неудерживающая, то, когда скорости точекъ удовлетворяютъ равенству:

$$\sum_{i=1}^n v_i(P_{i,u}) \cos(P_{i,u}, v_i) + \frac{dv}{dt} = 0 \dots (493, a)$$

тогда ускоренія ихъ должны удовлетворять условію: $(\cos(P_{i,u}, F_{i,u}) = 0)$

$$\sum_{i=1}^n \ddot{v}_i(P_{i,u}) \cos(P_{i,u}, \dot{v}_i) + K_u = 0; \dots (507, a)$$

когда же скорости точекъ удовлетворяютъ неравенству: $\cos(P_{i,u}, v_i) > 0$

$$\sum_{i=1}^n v_i(P_{i,u}) \cos(P_{i,u}, v_i) + \frac{dv}{dt} > 0,$$

тогда ускоренія ихъ не подлежатъ никакому ограниченію.

§ 67. Совокупность реакцій связи.

Положимъ, что система матерьяльныхъ точекъ:

$$m_1, m_2, \dots m_i, \dots m_n$$

подвержена тѣмъ же самымъ силамъ, какъ и въ параграфѣ 64-мъ; но теперь предположимъ, что точки не вполнѣ свободны, а связаны между собою удерживающею связью:

$$u(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \dots x_n, y_n, z_n, t) = 0 \dots (491)$$

При существованіи этой связи матерьяльныя точки могутъ получить тѣ самыя ускоренія, которыя сообщаютъ имъ приложенныя къ нимъ задаваемыя силы $F_1, F_2, \dots F_n$ *), если только эти силы удовлетворяютъ тому условію, что сумма

$$\sum_{i=1}^n \frac{F_i}{m_i} \cos(P_i, F_i) + K_u$$

*) $F_i \cos(P_i, X) = X_i, F_i \cos(P_i, Y) = Y_i, F_i \cos(P_i, Z) = Z_i.$

(см. § 66.1)
равна нулю; если же эта сумма болѣе или менѣе нуля, то связь воспрепятствуетъ точкамъ получать вышесказанныя ускоренія и заставить ихъ принять другія ускоренія, удовлетворяющія равенству (498, а).

Такое дѣйствіе связи должно заключаться въ образованіи силъ, дѣйствующихъ со стороны связи и приложенныхъ къ матеріальнымъ точкамъ; эти силы появляются только тогда, когда прочія причины движенія побуждаютъ точки преодолѣть или разорвать связь.

Пусть $R_{1\kappa}$ или R_1 означаетъ величину и направленіе силы дѣйствія связи на точку m_1 ; $R_{2\kappa}$ или R_2 — означаетъ силу дѣйствія связи на точку m_2 ; $R_{i\kappa}$ или R_i — означаетъ силу дѣйствія связи на точку m_i ; $R_{n\kappa}$ или R_n — означаетъ силу дѣйствія связи на точку m_n .

Эти силы мы будемъ называть *силами дѣйствія связи* κ , а остальные силы F_1, F_2, \dots, F_n — *задаваемыми силами*.

Ускореніе, получаемое точкою m_1 , сообщается ей равнодѣйствующею изъ приложенныхъ къ ней задаваемыхъ силъ и силы дѣйствія на нее связи κ , то есть:

$$\left. \begin{aligned} m_1 x_1'' &= X_1 + R_{1\kappa} \cos(R_{1\kappa}, X), \\ m_1 y_1'' &= Y_1 + R_{1\kappa} \cos(R_{1\kappa}, Y), \\ m_1 z_1'' &= Z_1 + R_{1\kappa} \cos(R_{1\kappa}, Z); \end{aligned} \right\} \dots (510, 1)$$

это суть дифференціальныя уравненія движенія точки m_1 .

Дифференціальныя уравненія движенія прочихъ точекъ будутъ:

$$\left. \begin{aligned} m_2 x_2'' &= X_2 + R_{2\kappa} \cos(R_{2\kappa}, X), \\ m_2 y_2'' &= Y_2 + R_{2\kappa} \cos(R_{2\kappa}, Y), \\ m_2 z_2'' &= Z_2 + R_{2\kappa} \cos(R_{2\kappa}, Z), \\ &\dots \dots \dots \end{aligned} \right\} \dots (510, 2)$$

и такъ далѣе.

Ускоренія, заключающіяся въ первыхъ частяхъ этихъ уравненій, должны удовлетворять равенству (498, а), а потому силы R_1, R_2, \dots, R_n должны удовлетворять равенству:

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{m_i} R_i P_i \cos(R_i, P_i) + \sum_{i=1}^n \frac{1}{m_i} (X_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + Y_i \frac{\partial u}{\partial y_i} + Z_i \frac{\partial u}{\partial z_i}) + K_u = 0 \quad (498, б)$$

Это равенство заключаетъ въ себѣ не самыя силы R_1, R_2, \dots, R_n , но только проэкціи ихъ на направленія соответственныхъ дифференціальныхъ параметровъ; отмѣтимъ эти проэкціи слѣдующими знаками:

$$R_1 \cos(R_1, P_1) = \mathfrak{R}_1, R_2 \cos(R_2, P_2) = \mathfrak{R}_2, \dots, R_n \cos(R_n, P_n) = \mathfrak{R}_n,$$

тогда равенство (498, б) получитъ такой видъ:

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{m_i} \mathfrak{R}_i P_i + \sum_{i=1}^n \frac{1}{m_i} F_i P_i \cos(F_i, P_i) + K_u = 0. \quad (498, в)$$

Остальныя части или составляющія силъ R_1, R_2, \dots, R_n , не входящія въ это равенство, обозначимъ слѣдующими знаками:

$$R_1 \sin(R_1, P_1) = T_1, R_2 \sin(R_2, P_2) = T_2, \dots, R_n \sin(R_n, P_n) = T_n;$$

T_1 есть сила, приложенная къ точкѣ m_1 и направленная въ плоскости, перпендикулярной къ дифференціальному параметру P_1 , T_2 есть сила, приложенная къ точкѣ m_2 и направленная въ плоскости, перпендикулярной къ P_2 , и т. д.

Такъ какъ силы $\mathfrak{R}_1, \mathfrak{R}_2, \dots, \mathfrak{R}_n$ направлены вдоль по дифференціальнымъ параметрамъ или противоположно имъ (напряжѣнъ \mathfrak{R}_i , если знакъ ея положительный, направлена вдоль по P_i , если же знакъ ея отрицательный, то она направлена противо-

положно P_i), то проэкціи ихъ на оси координатъ могутъ быть выражены слѣдующимъ образомъ:

произвольные константы,
то \mathfrak{N}_i и P_i представляютъ
силы, при действии
и т. д.

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{N}_1 \cos(P_1, X) &= \frac{\mathfrak{N}_1}{P_1} \frac{\partial \mathfrak{z}}{\partial x_1} = \lambda_1 \frac{\partial \mathfrak{z}}{\partial x_1} \\ \mathfrak{N}_1 \cos(P_1, Y) &= \frac{\mathfrak{N}_1}{P_1} \frac{\partial \mathfrak{z}}{\partial y_1} = \lambda_1 \frac{\partial \mathfrak{z}}{\partial y_1} \\ \mathfrak{N}_1 \cos(P_1, Z) &= \frac{\mathfrak{N}_1}{P_1} \frac{\partial \mathfrak{z}}{\partial z_1} = \lambda_1 \frac{\partial \mathfrak{z}}{\partial z_1} \end{aligned} \right\} \dots \dots (511, 1)$$

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{N}_2 \cos(P_2, X) &= \frac{\mathfrak{N}_2}{P_2} \frac{\partial \mathfrak{z}}{\partial x_2} = \lambda_2 \frac{\partial \mathfrak{z}}{\partial x_2} \\ \mathfrak{N}_2 \cos(P_2, Y) &= \frac{\mathfrak{N}_2}{P_2} \frac{\partial \mathfrak{z}}{\partial y_2} = \lambda_2 \frac{\partial \mathfrak{z}}{\partial y_2} \\ \mathfrak{N}_2 \cos(P_2, Z) &= \frac{\mathfrak{N}_2}{P_2} \frac{\partial \mathfrak{z}}{\partial z_2} = \lambda_2 \frac{\partial \mathfrak{z}}{\partial z_2} \end{aligned} \right\} \dots \dots (511, 2)$$

.....

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{N}_n \cos(P_n, X) &= \frac{\mathfrak{N}_n}{P_n} \frac{\partial \mathfrak{z}}{\partial x_n} = \lambda_n \frac{\partial \mathfrak{z}}{\partial x_n} \\ \mathfrak{N}_n \cos(P_n, Y) &= \frac{\mathfrak{N}_n}{P_n} \frac{\partial \mathfrak{z}}{\partial y_n} = \lambda_n \frac{\partial \mathfrak{z}}{\partial y_n} \\ \mathfrak{N}_n \cos(P_n, Z) &= \frac{\mathfrak{N}_n}{P_n} \frac{\partial \mathfrak{z}}{\partial z_n} = \lambda_n \frac{\partial \mathfrak{z}}{\partial z_n} \end{aligned} \right\} \dots \dots (511, n)$$

Величины λ_i , выражающія величины отношеній ($\mathfrak{N}_i : P_i$), введемъ, при помощи равенствъ.

$$\mathfrak{N}_1 = \lambda_1 P_1, \mathfrak{N}_2 = \lambda_2 P_2, \dots \dots \mathfrak{N}_n = \lambda_n P_n, \dots \dots (511, 8)$$

въ равенство (498, с); получимъ:

$$\sum_{i=1}^{i=n} \frac{\lambda_i}{m_i} P_i^2 + \sum_{i=1}^{i=n} \frac{1}{m_i} F_i P_i \cos(F_i, P_i) + K \mathfrak{z} = 0 \dots \dots (498, d)$$

Примѣчаніе. Впослѣдствіи, когда будемъ разсматривать систему точекъ, связанную нѣсколькими связями, придется обозначать силы \mathfrak{N} и множители λ болѣе сложными знаками; для того, чтобы отличить силы R, T, \mathfrak{N} и множители λ , относящіеся къ связи \mathfrak{z}_1 , отъ такихъ же силъ и множителей, относящихся къ прочимъ связямъ: $\mathfrak{z}_2, \mathfrak{z}_3, \dots$, мы условимся обозначать ихъ слѣдующими знаками:

Силы и множители, относящиеся къ связи:

$$u_1 = 0.$$

обозначимъ символами:

$$\mathfrak{N}_{1u_1}, \mathfrak{N}_{2u_1}, \dots \mathfrak{N}_{nu_1},$$

$$T_{1u_1}, T_{2u_1}, \dots T_{nu_1},$$

$$\lambda_{1u_1}, \lambda_{2u_1}, \dots \lambda_{nu_1};$$

силы и множители, относящиеся къ связи:

$$u_2 = 0,$$

обозначимъ символами:

$$\mathfrak{N}_{1u_2}, \mathfrak{N}_{2u_2}, \dots \mathfrak{N}_{nu_2},$$

$$T_{1u_2}, T_{2u_2}, \dots T_{nu_2},$$

$$\lambda_{1u_2}, \lambda_{2u_2}, \dots \lambda_{nu_2},$$

и такъ далѣе.)

Каковы бы ни были множители $\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_n$, удовлетворяющіе равенству (49S, d), мы всегда можемъ замѣнить каждый изъ нихъ суммою двухъ другихъ величинъ:

$$\lambda_1 = \lambda + \Delta_1, \lambda_2 = \lambda + \Delta_2, \dots \lambda_i = \lambda + \Delta_i, \dots \lambda_n = \lambda + \Delta_n, \dots (A)$$

такихъ, что одна изъ нихъ λ во всѣхъ этихъ суммахъ одинакова, а остальные величины $\Delta_1, \Delta_2, \dots \Delta_i, \dots \Delta_n$ удовлетворяютъ слѣдующему условію:

$$\frac{\Delta_1}{m_1} P_1^2 + \frac{\Delta_2}{m_2} P_2^2 + \dots + \frac{\Delta_i}{m_i} P_i^2 + \dots + \frac{\Delta_n}{m_n} P_n^2 = 0; \dots (512)$$

такое разложеніе величинъ $\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_i, \dots \lambda_n$ всегда возможно и, для каждой совокупности значеній $\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_n, P_1, P_2, \dots P_n, m_1, m_2, \dots m_n$, величина λ имѣетъ одно опредѣленное значеніе, равно какъ и каждая изъ величинъ $\Delta_1, \Delta_2, \dots \Delta_n$. Въ самомъ дѣлѣ, если помножимъ первое изъ равенствъ (A) на $(P_1^2 : m_1)$, второе — на $P_2^2 : m_2$, и т. д., все полученное сложимъ, то въ

силу условія (512) получимъ равенство, изъ котораго найдемъ, что λ имѣетъ слѣдующее въполнѣ опредѣленное значеніе:

$$\lambda = \frac{\lambda_1 P_1^2}{m_1} + \frac{\lambda_2 P_2^2}{m_2} + \dots + \frac{\lambda_n P_n^2}{m_n} = \frac{P_1^2}{m_1} + \frac{P_2^2}{m_2} + \dots + \frac{P_n^2}{m_n} \quad (498, d)$$

Величины $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ однако намъ неизвѣстны; изъ равенства (498, d), которому онѣ должны удовлетворять, мы ихъ опредѣлить не можемъ; но если произведемъ вышесказанное разложеніе величинъ $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ (A), то будемъ въ состояніи изъ равенства (498, d) опредѣлять величину λ , такъ какъ это равенство, вслѣдствіе соотношенія (512), получить слѣдующій видъ:

$$\lambda \sum_{i=1}^n \frac{P_i^2}{m_i} + \sum_{i=1}^n \frac{1}{m_i} F_i P_i \cos(F_i, P_i) + K_n = 0. \quad (498, e)$$

Послѣ этого каждая изъ силъ $R_{i,n}$ окажется разложенною на три силы:

$$(\lambda_n) \cdot (P_{i,n}); \quad S_{i,n} = (\Delta_{i,n}) \cdot (P_{i,n}); \quad T_{i,n} = (R_{i,n}) \sin(R_{i,n}, P_{i,n});$$

первыя двѣ направлены вдоль по P_i или противоположно P_i , смотря по знаку величинъ λ и $\Delta_{i,n}$, сила же $T_{i,n}$ направлена въ плоскости, перпендикулярной къ P_i ; такимъ образомъ всѣ силы R_1, R_2, \dots, R_n , дѣйствующія со стороны связи α на точки m_1, m_2, \dots, m_n , приведутся къ слѣдующимъ тремъ группамъ силъ:

а) силы:

$$\lambda P_1, \lambda P_2, \dots, \lambda P_i, \dots, \lambda P_n,$$

направленныя по дифференціальнымъ параметрамъ, если λ болѣе нуля, или противоположно дифференціальнымъ параметрамъ, если λ менѣе нуля; λ опредѣляется изъ уравненія (498, e);

б) силы:

$$S_1 = \Delta_1 P_1, \quad S_2 = \Delta_2 P_2, \quad \dots, \quad S_i = \Delta_i P_i, \quad \dots, \quad S_n = \Delta_n P_n,$$

которыя должны удовлетворять равенству (512); каждая изъ этихъ силъ направлена по дифференціальному параметру связи въ той точкѣ, къ которой она приложена, или противоположно этому

параметру, смотря по знаку множителя Λ , заключающагося въ выраженіи этой силы;

с) силы:

$$T_1 = R_1 \sin(R_1, P_1), T_2 = R_2 \sin(R_2, P_2), \dots T_n = R_n \sin(R_n, P_n);$$

каждая изъ нихъ направлена перпендикулярно къ дифференціальному параметру связи въ той точкѣ, къ которой она приложена.

Всѣ силы группы (а) представляютъ собою, такъ сказать, одну совокупность силъ, зависящую отъ величины множителя λ , общаго всѣмъ силамъ этой группы; какъ этотъ множитель, такъ и всѣ силы этой совокупности *вполнѣ определяются* слѣдующими функциями и величинами:

- 1) видомъ функціи λ , то есть аналитическимъ выраженіемъ связи $\lambda = 0$.
- 2) величинами и направленіями задаваемыхъ силъ $F_1, F_2, \dots F_n$,
- 3) величинами и направленіями скоростей точекъ (скорости входить въ выраженіе K_λ),
- 4) величинами массъ точекъ.

Каждая связь воспроизводится въ дѣйствительности въ видѣ нѣкотораго механизма, обуславливающаго требуемую зависимость между движеніями материальныхъ точекъ; нѣредко одна и та же связь можетъ быть воспроизведена помощью механизмовъ различныхъ конструкцій. Однако эти обстоятельства не имѣютъ никакого значенія при опредѣленіи силъ группы (а), то есть эти силы вовсе не зависятъ ни отъ природы тѣлъ, входящихъ въ составъ механизма, воспроизводящаго связь $\lambda = 0$, ни отъ конструкціи этого механизма.

Силы же $T_1, T_2, \dots T_n, S_1, S_2, \dots S_n$ не опредѣляются тѣми функциями и величинами, которые опредѣляютъ совокупность силъ (а), а при ближайшемъ ознакомленіи съ дѣйствіями механизмовъ, воспроизводящихъ связи, оказывается, что величины и направленія этихъ силъ ($T_1, T_2, \dots T_n, S_1, S_2, \dots S_n$) зависятъ отъ природы тѣлъ, образующихъ механизмъ и отъ конструкціи механизма.

Кромѣ того, слѣдуетъ еще замѣтить, что назначеніе силъ R_1, R_2, \dots, R_n (заключающееся въ томъ, чтобы вмѣстѣ съ задаваемыми силами сообщать точкамъ системы такіа ускоренія, которыя удовлетворяли бы равенству (498, а), выполняется одними только силами (а), безъ содѣйствія силъ (b) и (с); въ самомъ дѣлѣ, въ этомъ смыслѣ силы группъ (b) и (с) не играютъ никакой существенной роли, потому что проеція всякой силы T_i на соответственный параметръ P_i равна нулю, а силы S_1, S_2, \dots, S_n , должны удовлетворять равенству (512).

На основаніи этихъ замѣчаній мы вправе признать группу силъ (а) существенною и необходимою составною частью системы силъ (R_1, R_2, \dots, R_n) дѣйствія связи на связываемыя ею точки; мы будемъ называть силы этой группы *реакціями связи*, а всю совокупность силъ (а) — *совокупностью реакцій связи* «=0.

Силы же $T_1, T_2, \dots, T_n, S_1, S_2, \dots, S_n$ слѣдуетъ отнести къ числу силъ, зависящихъ отъ физическихъ свойствъ и отъ конструкціи того механизма, который воспроизводитъ рассматриваемую нами связь.

Для примѣра опредѣленія реакцій обратимся къ тѣмъ удерживающимъ связямъ, которыя упомянуты въ § 62.

Примѣръ 53. Если выразить эту связь равенствомъ:

$$r_{12} - l = 0,$$

то дифференціальныя параметры будутъ равны единицѣ и будутъ направлены по продолженіямъ разстоянія M_1M_2 (какъ на черт. 37-мъ); реакции этой связи будутъ равны λ , гдѣ:

$$\lambda = - \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (Q + K),$$

$$Q = \left(\frac{X_1}{m_1} - \frac{X_2}{m_2} \right) \frac{x_1 - x_2}{r_{12}} + \left(\frac{Y_1}{m_1} - \frac{Y_2}{m_2} \right) \frac{y_1 - y_2}{r_{12}} + \left(\frac{Z_1}{m_1} - \frac{Z_2}{m_2} \right) \frac{z_1 - z_2}{r_{12}}.$$

$$K = \frac{1}{r_{12}} \left[(x_1' - x_2')^2 + (y_1' - y_2')^2 + (z_1' - z_2')^2 \right] -$$

$$- \frac{1}{r_{12}^3} \left[(x_1 - x_2)(x_1' - x_2') + (y_1 - y_2)(y_1' - y_2') + (z_1 - z_2)(z_1' - z_2') \right]^2;$$

онѣ будутъ направлены вдоль по дифференціальнымъ параметрамъ (какъ на чертежѣ 38-мъ), если λ имѣетъ величину положительную; обратно, если λ имѣетъ величину отрицательную, то реакціи будутъ направлены противоположно дифференціальнымъ параметрамъ (т.-е. такъ, какъ представлено на чертежѣ 36-мъ).

Что касается до силъ T_1 , T_2 , S_1 , S_2 , то эти силы могутъ быть различны, смотря по конструкціи и природѣ механизма, воспроизводящаго эту связь.

Обыкновенно эту связь представляютъ себѣ въ видѣ бесконечно-тонкаго однороднаго и идеально-твердаго стержня, въ концамъ котораго привѣшены точки m_1 и m_2 ; при такомъ представленіи связи считаютъ очевиднымъ, что, если не принимать въ расчетъ массы стержня, то силы дѣйствія этой связи на точки m_1 и m_2 должны состоять только изъ реакцій связи (то-есть, изъ нѣкоторой силы, приложенной къ точкѣ m_1 и направленной къ точкѣ m_2 или отъ нея, и изъ другой силы, равной и прямопротивоположной первой, приложенной къ точкѣ m_2), силъ же T_1 , T_2 , S_1 , S_2 не существуетъ вовсе.

Однако, для того, чтобы это стало очевиднымъ, должно прибавить слѣдующее:

Стержень рассматривается, какъ физическое тѣло, то-есть, какъ система частицъ; каждая частица замѣняется материальною точкою; предполагается, что между каждыми двумя частицами дѣйствуютъ молекулярныя взаимодѣйствія, равныя, прямопротивоположныя и направленные по линіи, соединяющей частицы; величины этихъ силъ предполагаются равными:

$$\mu_1 \mu_2 f(r_{12}),$$

гдѣ μ_1 и μ_2 суть массы частицъ, r_{12} — разстояніе между ними, f — функція, общая для всѣхъ паръ частицъ и притомъ такая, которая обращается въ нуль для r_{12} , равнаго или большаго нѣкоторой весьма малой (но не бесконечно-малой) длины ρ , называемой радіусомъ дѣйствія молекулярныхъ силъ; для r_{12} меньшихъ ρ функція f быстро возрастаетъ съ приближеніемъ r_{12} къ нулю.

Далѣе, должно предположить, что частицы стержня расположены симметрично вокруг линіи M_1M_2 , соединяющей матерьяльныя точки m_1 и m_2 , и выѣстъ съ тѣмъ симметрично по отношенію къ плоскости, перпендикулярной къ $\overline{M_1M_2}$ и проходящей черезъ середину этого разстоянія, къ этому еще присоединимъ предположеніе, что такая симметрія не нарушается, ни при движеніи, ни вслѣдствіе приложенія задаваемыхъ силъ.

При всѣхъ этихъ предложеніяхъ станетъ, дѣйствительно, очевиднымъ, что равнодѣйствующая молекулярныхъ силъ, приложенныхъ къ точкѣ m_1 , направлена по оси симметріи и притомъ равна и прямопротивоположна равнодѣйствующей молекулярныхъ силъ, приложенныхъ къ точкѣ m_2 .

Такую удерживающую связь между точками m_1 и m_2 , при которой разстояніе между ними должно оставаться неизмѣннымъ и при которой силъ T_1 , T_2 , S_1 , S_2 не существуетъ, мы будемъ называть *идеальною неизмѣняемою связью* между точками m_1 и m_2 или *идеальнымъ стержнемъ*, связывающимъ эти точки.

Примѣръ 57. Реакціи связи

$$r_1 + r_2 - l = 0$$

равны между собою и имѣютъ величину:

$$\lambda = - \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (Q + K);$$

$$Q = \frac{X_1 x_1 + Y_1 y_1 + Z_1 z_1}{m_1 r_1} + \frac{X_2 x_2 + Y_2 y_2 + Z_2 z_2}{m_2 r_2}$$

$$K = \frac{v_1^2}{r_1} + \frac{v_2^2}{r_2} - \frac{(x_1 x'_1 + y_1 y'_1 + z_1 z'_1)^2}{r_1^3} - \frac{(x_2 x'_2 + y_2 y'_2 + z_2 z'_2)^2}{r_2^3}.$$

Онѣ направлены по продолженіямъ радіусовъ векторовъ r_1 и r_2 , если λ есть величина положительная.

Если точки m_1 и m_2 остаются постоянно въ плоскости XU , то связь эту можно воспроизвести въ видѣ механизма, состоящаго изъ зубчатаго колеса R (черт. 42), вращающагося вокругъ оси Z , и изъ двухъ зубчатыхъ полосъ AB и CD , сдѣланныхъ съ этимъ

колесомъ; на концѣ первой полосы находится точка m_1 , на концѣ второй — точка m_2 ; надлежащее приспособленіе не позволяетъ зубцамъ полосу соскочить съ зубцовъ колеса. Для того, чтобы этотъ механизмъ вполне точно воспроизводилъ условіе, что сумма разстояній Om_1 и Om_2 должна оставаться постоянною при всякихъ положеніяхъ точекъ m_1 и m_2 , необходимо, чтобы колесо R имѣло ничтожно-малый радіусъ.

Существованіе тренія между частями механизма составляетъ одну изъ главнѣйшихъ причинъ образованія силъ T_1 , T_2 , S_1 , S_2 и другихъ силъ, направленныхъ, подобно S_1 и S_2 , вдоль по параметрамъ P_1 и P_2 или противоположно этимъ параметрамъ, но неудовлетворяющихъ равенству (512). Въ механизмѣ, разсматриваемомъ теперь, возникаетъ треніе между шипами оси колеса R и ихъ подшипниками, а кромѣ того и треніе на зубчатыхъ зацепленіяхъ. Если даже предположить, что нѣтъ тренія на зубчатыхъ зацепленіяхъ, то уже одно треніе на шипахъ оси служитъ причиною образованія приложенныхъ къ точкамъ m_1 и m_2 силъ T_1 и T_2 , пропорціональныхъ λ и противодѣйствующихъ вращеніямъ радіусовъ векторовъ r_1 и r_2 вѣкругъ O ; кромѣ того, то же самое треніе шиповъ въ подшипникахъ служитъ причиною образованія силъ пропорціональныхъ λ , приложенныхъ къ тѣмъ же точкамъ и противодѣйствующихъ движеніямъ ихъ вдоль по радіусамъ векторамъ; эти силы могутъ удовлетворять или не удовлетворять равенству (512), въ послѣднемъ случаѣ придется причислять ихъ къ силамъ задаваемымъ.

Примѣръ 58. Удерживающая связь

$$r_1 + r_{12} + r_{22} - l = 0$$

оказываетъ реакціи, имѣющія слѣдующія величины:

въ точкѣ m_1 реакція равна $2\lambda \cos \frac{\alpha_1}{2}$,

въ точкѣ m_2 реакція равна $2\lambda \cos \frac{\alpha_2}{2}$;

$$\lambda = - \frac{m_1 m_2}{4 (m_2 \cos^2 \frac{\alpha_1}{2} + m_1 \cos^2 \frac{\alpha_2}{2})} (Q + K),$$

$$Q = \frac{X_1 x_1 + Y_1 y_1 + Z_1 z_1}{m_1 r_1} + \frac{X_2 (x_2 - a) + Y_2 y_2 + Z_2 z_2}{m_2 r_{2a}} +$$

$$+ \left(\frac{X_1}{m_1} - \frac{X_2}{m_2} \right) \frac{x_1 - x_2}{r_{12}} + \left(\frac{Y_1}{m_1} - \frac{Y_2}{m_2} \right) \frac{y_1 - y_2}{r_{12}} + \left(\frac{Z_1}{m_1} - \frac{Z_2}{m_2} \right) \frac{z_1 - z_2}{r_{12}} ;$$

$$K = \frac{v_1^2 \sin^2 (v_1, r_1)}{r_1} + \frac{v_2^2 \sin^2 (v_2, r_{2a})}{r_{2a}} + \frac{u_{12}^2 \sin^2 (u_{12}, r_{12})}{r_{12}} ;$$

здѣсь u_{12} означаетъ геометрическую разность между скоростями v_1 и v_2 точекъ m_1 и m_2 , то-есть:

$$u_{12} = v_1 - v_2.$$

Примѣръ 59. Удерживающая связь:

$$x_1 y_2 - y_1 x_2 - a = 0$$

имѣетъ въ точкѣ m_1 реакцію $\lambda \sqrt{x_2^2 + y_2^2} = \lambda r_2$

и въ точкѣ m_2 — реакцію $\lambda \sqrt{x_1^2 + y_1^2} = \lambda r_1 ;$

$$\lambda = - \frac{m_1 m_2}{m_2 r_2^2 + m_1 r_1^2} (Q + K);$$

$$Q = \frac{X_1 y_2 - Y_1 x_2}{m_1} + \frac{Y_2 x_1 - X_2 y_1}{m_2}$$

$$K = 2(x'_1 y'_2 - y'_1 x'_2).$$

Силы T_1, T_2, S_1, S_2 могутъ образоваться и въ этихъ двухъ послѣднихъ связяхъ преимущественно вслѣдствіе существованія тренія между частями механизмовъ, воспроизводящихъ эти связи.

Въ нижеслѣдующихъ параграфахъ мы будемъ нерѣдко представлять себѣ воображаемыя связи, не оказывающія силъ $T_1, T_2, \dots, T_n, S_1, S_2, \dots, S_n$; такія связи мы будемъ называть *идеальными связями*; дѣйствіе ихъ на связываемыя ими точки состоитъ только въ образованіи реакцій, приложенныхъ къ этимъ точкамъ.

Въ тѣхъ же случаяхъ, въ которыхъ нельзя будетъ разсматривать связь какъ идеальную, а придется принять въ расчетъ и

силы $T_1, T_2, \dots, T_n, S_1, S_2, \dots, S_n$, можно будет эти силы причислить къ задаваемымъ силамъ, тѣмъ болѣе, что для сужденія объ нихъ мы должны знать самый механизмъ, воспроизводящій связь, и должны имѣть вѣкторыя экспериментальныя данныя относительно физическихъ свойствъ этого механизма.

§ 68. Реакціи неудерживающей связи.

Положимъ, что точки m_1, m_2, \dots, m_n связаны каково-либо неудерживающею связью:

$$u(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \dots, x_n, y_n, z_n, t) = 0 \dots (492)$$

Какъ уже извѣстно изъ § 63, когда координаты точекъ удовлетворяютъ неравенству $u > 0$, тогда ни скорости, ни ускоренія точекъ не подлежатъ никакимъ ограниченіямъ и *связь*, такъ сказать, не дѣйствуетъ вовсе, находясь въ состояніи ослабленія.

Когда же координаты точекъ удовлетворяютъ равенству $u = 0$, тогда, вслѣдствіе дѣйствія связи, находящейся въ состояніи напряженія, скорости точекъ и ускоренія ихъ должны удовлетворять условіямъ, приведеннымъ въ §§ 63 и 66.

Переходы связи изъ перваго состоянія во второе и обратный могутъ быть опредѣлены словами *связь слабѣетъ* и *связь крѣпнѣетъ*. про точки, связывающія связью, можно сказать, что онѣ *сходятся со связью* (когда связь слабѣетъ) или *вступаютъ на связь* (когда связь крѣпнѣетъ).

Неудерживающая связь, находясь въ состояніи ослабленія, не можетъ оказывать никакихъ реакцій на связываемыя ею точки, такъ какъ ускоренія этихъ точекъ не подлежатъ никакимъ ограниченіямъ со стороны связи.

Находясь въ состояніи напряженія, неудерживающая связь не можетъ оказывать реакцій причинамъ, побуждающимъ точки сойти со связи, такъ какъ она этому сходу не препятствуетъ, напротивъ, при дѣйствіи усилія, стремящихся разорвать или разрушить связь, въ ней необходимо развиваются реакціи, тому противодѣйствующія.

Неудерживающая связь, находясь въ состояніи напряженія, не препятствуетъ точкамъ получить скорости, удовлетворяющія неравенству

$$\sum_{i=1}^n v_i P_i \cos(P_i, v_i) + \frac{du}{dt} > 0;$$

а потому, если какія-либо причины побуждаютъ точки получить такіа скорости, то связь не оказываетъ тому никакихъ противодѣйствій и точки

$$\lambda = - \frac{m_1 m_2}{4 (m_2 \cos^2 \frac{\alpha_1}{2} + m_1 \cos^2 \frac{\alpha_2}{2})} (Q + K),$$

$$Q = \frac{X_1 x_1 + Y_1 y_1 + Z_1 z_1}{m_1 r_1} + \frac{X_2 (x_2 - a) + Y_2 y_2 + Z_2 z_2}{m_2 r_{2a}} +$$

$$+ \left(\frac{X_1}{m_1} - \frac{X_2}{m_2} \right) \frac{x_1 - x_2}{r_{12}} + \left(\frac{Y_1}{m_1} - \frac{Y_2}{m_2} \right) \frac{y_1 - y_2}{r_{12}} + \left(\frac{Z_1}{m_1} - \frac{Z_2}{m_2} \right) \frac{z_1 - z_2}{r_{12}};$$

$$K = \frac{v_1^2 \sin^2 (v_1, r_1)}{r_1} + \frac{v_2^2 \sin^2 (v_2, r_{2a})}{r_{2a}} + \frac{u_{12}^2 \sin^2 (u_{12}, r_{12})}{r_{12}};$$

здѣсь u_{12} означаетъ геометрическую разность между скоростями v_1 и v_2 точекъ m_1 и m_2 , то-есть:

$$\overline{u_{12}} = \overline{v_1} - \overline{v_2}.$$

Примѣръ 59. Удерживающая связь:

$$x_1 y_2 - y_1 x_2 - a = 0$$

имѣетъ въ точкѣ m_1 реакцію $\lambda \sqrt{x_2^2 + y_2^2} = \lambda r_2$

и въ точкѣ m_2 — реакцію $\lambda \sqrt{x_1^2 + y_1^2} = \lambda r_1$;

$$\lambda = - \frac{m_1 m_2}{m_2 r_2^2 + m_1 r_1^2} (Q + K);$$

$$Q = \frac{X_1 y_2 - Y_1 x_2}{m_1} + \frac{Y_2 x_1 - X_2 y_1}{m_2}$$

$$K = 2(x'_1 y'_2 - y'_1 x'_2).$$

Силы T_1, T_2, S_1, S_2 могутъ образоваться и въ этихъ двухъ послѣднихъ связяхъ преимущественно вслѣдствіе существованія тренія между частями механизмовъ, воспроизводящихъ эти связи.

и не.
св. или
св. или
св. или
св. или

Въ нижеслѣдующихъ параграфахъ мы будемъ нерѣдко представлять себѣ воображаемыя связи, не оказывающія силъ $T_1, T_2, \dots, T_n, S_1, S_2, \dots, S_n$; такія связи мы будемъ называть *идеальными связями*; дѣйствіе ихъ на связываемыя ими точки состоитъ только въ образованіи реакцій, приложенныхъ къ этимъ точкамъ.

Въ тѣхъ же случаяхъ, въ которыхъ нельзя будетъ разсматривать связь какъ идеальную, а придется принять въ расчетъ и

силы $T_1, T_2, \dots, T_n, S_1, S_2, \dots, S_n$, можно будет причислить къ задаваемымъ силамъ, тѣмъ болѣе, что движенія объ нихъ мы должны знать самый механизмъ, ведущій связь, и должны имѣть нѣкоторыя извѣстныя данныя относительно физическихъ свойствъ этой связи.

§ 68. Реакціи неудерживающей связи.

Положимъ, что точки m_1, m_2, \dots, m_n связаны между собою неудерживающею связью:

$$v(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \dots, x_n, y_n, z_n) = 0.$$

Какъ уже извѣстно изъ § 63, когда координаты точекъ удовлетворяютъ неравенству $v > 0$, тогда ни скорости, ни ускоренія точекъ никакимъ ограниченіямъ и силамъ, такъ сказать, не подлежатъ, находясь въ состояніи ослабленія.

Когда же координаты точекъ удовлетворяютъ равенству $v = 0$, въ результатѣ дѣйствія связи, находящейся въ состояніи сжатія, скорости точекъ и ускоренія ихъ должны удовлетворять условиямъ, указаннымъ въ §§ 63 и 66.

Переходы связи изъ перваго состоянія въ второе, т. е. когда v переходитъ изъ положительныхъ въ отрицательныя, могутъ быть опредѣлены словами: связь *слабѣетъ* или *переходитъ въ состояніе ослабленія*, когда $v > 0$; связь *сжимается* или *переходитъ въ состояніе сжатія*, когда $v < 0$.

Неудерживающая связь, находясь въ состояніи сжатія, не оказываетъ никакихъ реакцій на связываемыя точки, движенія этихъ точекъ не подлежатъ никакимъ ограниченіямъ.

Находясь въ состояніи ослабленія, связь не оказываетъ реакцій причиннымъ, побуждающимъ ее къ движению, такъ она этому сходу не препятствуетъ, не оказываетъ сопротивленія, стремящихся разорвать или разорвать ее, т. е. не оказываютъ реакцій, тому противодѣйствующихъ.

Неудерживающая связь, находясь въ состояніи сжатія, оказываетъ реакціи, препятствующія точкамъ, получающимъ скорости, удовлетворяющія

уравненію
 $\sum_{i=1}^n v_i P_i \cos \alpha_i = 0$
 и задающимъ координаты A_1, A_2, \dots, A_n и задающимъ координаты A_1, A_2, \dots, A_n .

$$\sum_{i=1}^n v_i P_i \cos \alpha_i = 0$$

а потому, если какія-либо изъ точекъ получаютъ скорости, то связь не оказываетъ реакцій, препятствующихъ имъ.

дѣйствительно получаютъ эти скорости; имѣя эти скорости, точки сходятъ со связи.

Если скорости точекъ удовлетворяютъ равенству:

$$\sum_{i=1}^{i=n} v_i P_i \cos(P_i, v_i) + \frac{\partial v}{\partial t} = 0, \dots \dots (493, a)$$

то неудерживающая связь, находясь въ состояніи напряженія, не можетъ препятствовать точкамъ получить ускоренія, удовлетворяющія неравенству:

$$\sum_{i=1}^{i=n} \dot{v}_i P_i \cos(P_i, \dot{v}_i) + K_v > 0; \dots \dots \dots (513)$$

а потому, если задаваемые силы

$$F_1, F_2, \dots F_i, \dots F_n,$$

приложенныя къ точкамъ

$$m_1, m_2, \dots m_i, \dots m_n,$$

побуждаютъ ихъ принять ускоренія, удовлетворяющія неравенству (513), то-есть, если силы $F_1, F_2, \dots F_n$ удовлетворяютъ неравенству:

$$\sum_{i=1}^{i=n} \frac{1}{m_i} F_i P_i \cos(F_i, P_i) + K_v > 0, \dots \dots \dots (514)$$

то связь не можетъ оказать никакихъ реакцій и точки дѣйствительно получаютъ эти ускоренія; имѣя такія скорости и ускоренія, точки сходятъ со связи.

Если бы та же самая связь была удерживающею, то, при тѣхъ же самыхъ положеніяхъ точекъ, при тѣхъ же скоростяхъ и задаваемыхъ силахъ, она оказала бы совокупность реакцій, направленныхъ противоположно дифференціальнымъ параметрамъ, такъ какъ множитель λ , выражаемый формулою:

$$\lambda = - \frac{\sum_{i=1}^{i=n} \frac{1}{m_i} F_i P_i \cos(F_i, P_i) + K_v}{\sum_{i=1}^{i=n} \frac{1}{m_i} P_i^2}, \dots \dots (498, f)$$

имѣетъ, на основаніи неравенства (514), величину отрицательную.

Таких отрицательных реакций неудерживающая связь оказать не может.

Если неудерживающая связь находится въ состояніи напряженія, точки имѣют скорости, удовлетворяющія равенству (493, а), а задаваемые силы, приложенныя къ точкамъ, удовлетворяютъ неравенству

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{m_i} F_i P_i \cos(F_i, P_i) + K_v < 0, \dots \dots (515)$$

то эти силы стремятся разрушить связь, потому что онѣ побуждаютъ точки принять ускоренія, удовлетворяющія неравенству:

$$\sum_{i=1}^n \dot{v}_i P_i \cos(P_i, \dot{v}_i) + K_v < 0;$$

а этого, при скоростяхъ, удовлетворяющихъ равенству (493, а), связь не допускаетъ. Въ такомъ случаѣ неудерживающая связь должна дѣйствовать такъ же, какъ удерживающая, а именно она должна оказывать реакции, множитель λ которыхъ опредѣляется по формулѣ (498, f) такъ какъ, на основаніи неравенства (515), этотъ множитель имѣетъ величину положительную, то *реакціи* будутъ *положительными*, то-есть, будутъ направлены по положительнымъ направленіямъ дифференціальныхъ параметровъ.

Эти реакціи, вмѣстѣ съ задаваемыми силами, сообщаютъ точкамъ такія ускоренія, которыя удовлетворяютъ равенству:

$$\sum_{i=1}^n \dot{v}_i P_i \cos(P_i, \dot{v}_i) + K_v = 0.$$

Связь остается въ состояніи напряженія до тѣхъ поръ, пока задаваемые силы удовлетворяютъ неравенству (515), въ тѣхъ положеніяхъ A_1, A_2, \dots, A_n точекъ m_1, m_2, \dots, m_n , въ которыхъ скорости точекъ и задаваемые силы будутъ удовлетворять равенству:

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{m_i} F_i P_i \cos(F_i, P_i) + K_v = 0,$$

реакціи связи обратятся въ нуль.

Чтобы узнать, что станетъ послѣ этого съ неудерживающею связью (то-есть, ослабѣетъ ли она, или останется напряженною), надо опредѣлить, какой знакъ стала бы пріобрѣтать сумма:

$$Q + K = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{1}{m_i} F_i P_i \cos (F_i, P_i) + K_8,$$

если бы связь была обращена въ удерживающую и матерьяльныя точки продолжали бы свое движеніе, не сходя съ нея.

Если бы оказалось, что сумма $(Q+K)$, послѣ своего обращенія въ нуль, пріобрѣтаетъ при сказанныхъ предположеніяхъ опять *отрицательное значеніе*, то это значитъ, что неудерживающая связь *не ослабѣваетъ* и послѣ прохожденія точекъ m_1, m_2, \dots, m_n , чрезъ положенія A_1, A_2, \dots, A_n .

Обратно, если бы сумма $(Q+K)$ стала пріобрѣтать при сказанныхъ предположеніяхъ *положительное значеніе*, то предполагаемое дальнѣйшее движеніе точекъ могло бы совершаться только при дѣйствіи отрицательныхъ реакцій со стороны связи; но неудерживающая связь такихъ реакцій оказать не можетъ, а потому *матерьяльныя точки необходимо сойдутъ со связи* и послѣдняя ослабѣетъ. Дальнѣйшее движеніе освободившихся точекъ будетъ совершаться подѣ вліяніемъ приложенныхъ къ нимъ задаваемыхъ силъ, причемъ начальными скоростями будутъ тѣ скорости, съ которыми матерьяльныя точки m_1, m_2, \dots, m_n , находясь въ положеніяхъ A_1, A_2, \dots, A_n , сошли со связи; эти скорости удовлетворяютъ равенству (493, а).

Кромѣ положительныхъ реакцій, въ неудерживающихъ связяхъ могутъ развиваться силы T_i и S_i , преимущественно вслѣдствіе тренія частей механизма между собою и также вслѣдствіе несовершенной гибкости нитей, входящихъ въ составъ тѣхъ механизмовъ, которыми воспроизводятся не-удерживающія связи.

Примѣръ 54-й. Неудерживающая связь:

$$(l - r_{1,2}) \geq 0,$$

какъ уже упомянуто въ § 59-мъ, можетъ быть воспроизведена въ видѣ тонкой, вполне гибкой, но вполне нерастяжимой нити длины l , къ концамъ которой прикрѣплены точки m_1 и m_2 . Эта связь находится въ со-

стоянии напряженія тогда, когда разстояніе между точками m_1 и m_2 равно l ; если тогда скорости точекъ удовлетворяютъ равенству:

$$v_1 \cos(v_1, r_{12}) - v_2 \cos(v_2, r_{12}) = 0,$$

и задаваемые силы — условію:

$$(Q_1 + K_1) < 0,$$

(гдѣ

$$Q_1 = \frac{1}{m_1} F_1 \cos(F_1, r_{12}) - \frac{1}{m_2} F_2 \cos(F_2, r_{12}),$$

$$K_1 = - \frac{u^2 \sin^2(u, r_{12})}{r_{12}},$$

гдѣ направленіе r_{12} означаетъ направленіе, проведенное изъ точки m_1 черезъ точку m_2 , а u означаетъ геометрическую разность между скоростью v_1 и скоростью v_2 , то-есть:

$$u \cos(u, X) = x_1' - x_2', u \cos(u, Y) = y_1' - y_2', u \cos(u, Z) = z_1' - z_2',$$

то точки m_1 и m_2 будутъ испытывать со стороны связи реакціи, равныя

$$\lambda = - \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (Q_1 + K_1)$$

и направленныя по дифференціальнымъ параметрамъ этой связи, то-есть, *внутрь оліны* $M_1 M_2$, какъ представлено на чертежѣ 36-мъ; реакцій же, направленныхъ внаружу разстоянія $M_1 M_2$, эта связь оказывать не можетъ.

Примѣръ 55-й. Неудерживающая связь:

$$(r_{12} - l) \geq 0$$

можетъ оказывать реакціи, направленныя не иначе, какъ *выпущу оліны* $M_1 M_2$, (какъ на чертежѣ 37-мъ); такія реакціи оказываетъ она тогда, когда разстояніе между точками m_1 и m_2 равно l и если притомъ скорости ихъ удовлетворяютъ равенству:

$$v_2 \cos(v_2, r_{12}) - v_1 \cos(v_1, r_{12}) = 0,$$

а задаваемые силы — условию:

$$(Q + K) < 0,$$

гдѣ Q и K суть тѣ же самыя выраженія, которыя означены этими знаками въ предыдущемъ параграфѣ при изложеніи примѣра 53-го.

Величины реакцій, испытываемыхъ точками m_1 и m_2 со стороны этой связи, выражаются формулою:

$$\lambda = - \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (Q + K).$$

Примѣръ 56-й. Обратимся теперь къ неударивающей связи

$$l - r_{12} - r_{23} \geq 0,$$

дифференціальныя параметры которой были опредѣлены въ § 63-мъ.

Матерьяльныя точки m_1, m_2, m_3 испытываютъ со стороны этой связи реакціи тогда, когда сумма разстояній r_{12} и r_{23} равна l и если притомъ скорости точекъ удовлетворяютъ равенству:

$$v_1 \cos(v_1, r_{12}) - v_2 \cos(v_2, r_{12}) + v_2 \cos(v_2, r_{23}) - v_3 \cos(v_3, r_{23}) = 0,$$

(которое можно представить такъ:

$$u_{12} \cos(u_{12}, r_{12}) + u_{23} \cos(u_{23}, r_{23}) = 0),$$

а задаваемые силы — условию:

$$(Q + K) < 0;$$

здѣсь Q и K означаютъ слѣдующія выраженія:

$$Q = \frac{1}{m_1} F_1 \cos(F_1, r_{12}) - \frac{1}{m_3} F_3 \cos(F_3, r_{23}) + \\ + \frac{1}{m_2} F_2 (\cos(F_2, r_{23}) - \cos(F_2, r_{12})),$$

$$K = - \frac{u_{12}^2 \sin^2(u_{12}, r_{12})}{r_{12}} - \frac{u_{23}^2 \sin^2(u_{23}, r_{23})}{r_{23}};$$

подъ направленіемъ r_{12} подразумѣвается направленіе, проведенное изъ точки m_1 черезъ точку m_2 ; направленіе r_{23} идетъ отъ точки m_2 черезъ

точку m_1 ; u_{12} есть геометрическая разность между скоростью точки m_1 и скоростью точки m_2 ; u_{23} — геометрическая разность между скоростями точек m_2 и m_3 , то-есть:

$$u_{12} = v_1 - v_2, \quad u_{23} = v_2 - v_3.$$

При этих условиях точки m_1 и m_3 испытывают со стороны связи реакции равныя между собою, равныя:

$$\lambda = - \frac{m_1 m_3 m_2}{m_2 (m_1 + m_3) + 4 m_1 m_3 \cos^2 \left(\frac{\alpha}{2} \right)} (Q + K)$$

и направленныя къ точкѣ m_2 (то-есть, по направленіямъ P_1 и P_3 , см. чертѣжъ 38-й); точка же m_2 испытываетъ реакцію, имѣющую величину и направленіе геометрической суммы двухъ силъ, равныхъ λ , приложенныхъ къ точкѣ m_2 и направленныхъ — одна къ точкѣ m_1 , другая — къ точкѣ m_3 .

Эта связь можетъ быть воспроизведена въ видѣ весьма тонкой, гибкой нерастяжимой нити длины l , пропущенной черезъ колечко ничтожно-малыхъ размѣровъ; къ концамъ нити прикрѣплены точки m_1 и m_3 , а къ колечку — точка m_2 .

Несмотря на свою кажущуюся простоту, механизмъ этотъ заключаетъ въ себѣ двѣ причины образованія силъ T_1 , S_1 и имъ подобныхъ, которыя мы принуждены будемъ относить къ числу задаваемыхъ силъ; одною изъ причинъ служить неполная гибкость нити, или, правильнѣе сказать, сопротивленіе нити изгибу, другая причина — треніе нити о кольцо.

Нетрудно подобнымъ же образомъ составить надлежащія формулы и выраженія для неудерживающей связи примѣра 60-го, а также и для всякихъ другихъ неудерживающихъ связей, каковы бы онѣ ни были.

§ 69. Совокупныя дифференціальныя уравненія движенія системы матеріальныхъ точекъ, связанныхъ одною связью.

Предположимъ, что имѣемъ систему матеріальныхъ точекъ

$$m_1, m_2, \dots, m_{n-1}, \dots, m_n,$$

§ 70. Совокупныя дифференціальныя уравненія движенія системы точекъ, связанныхъ нѣсколькими связями.

1. Положимъ, что система точекъ m_1, m_2, \dots, m_n связана идеальными удерживающими связями, выражаемыми равенствами:

$$u_1(x_1, y_1, z_1, \dots, x_n, y_n, z_n, t) = 0 \dots (491, 1)$$

$$u_2(x_1, y_1, z_1, \dots, x_n, y_n, z_n, t) = 0 \dots (491, 2)$$

.....

$$u_p(x_1, y_1, z_1, \dots, x_n, y_n, z_n, t) = 0; \dots (491, p)$$

p есть число этихъ связей, $u_1, u_2, u_3, \dots, u_p$ суть какія-либо функціи координатъ точекъ и времени.

Въ этомъ случаѣ къ каждой изъ точекъ системы, кромѣ задаваемыхъ силъ, приложена реакція каждой изъ связей; такъ напримѣръ къ точкѣ m_1 приложены:

задаемыя силы (для равнодѣйствующей этихъ силъ и для проеціей ея на оси координатъ сохранимъ прежнія обозначенія F_1, X_1, Y_1, Z_1);

реакція связи (491, 1), направленная по дифференціальному параметру этой связи въ этой точкѣ m_1 и равная

$$\lambda(u_1) \cdot P_{u_1};$$

реакція связи (491, 2), направленная по дифференціальному параметру этой связи въ точкѣ m_1 и равная

$$\lambda(u_2) \cdot P_{u_2};$$

.....

и наконецъ реакція связи (491, p), направленная по дифференціальному параметру этой связи въ точкѣ m_1 и равная

$$\lambda(u_p) \cdot P_{u_p}.$$

Каждый из входящих здѣсь знаковъ:

$$\lambda(u), \lambda(u_2), \dots \lambda(u_p)$$

обозначаетъ нѣкоторый множитель, общій всѣмъ реакціямъ одной изъ связей; напримѣръ, величины реакцій связи (491, 1) въ точкахъ

$$m_1, m_2, \dots m_i, \dots m_n$$

выражаются произведеніями:

$$\lambda(u_1) \cdot P_{1u_1}; \lambda(u_1) \cdot P_{2u_1}; \dots \lambda(u_1) \cdot P_{iu_1}; \dots \lambda(u_1) \cdot P_{nu_1}.$$

Совокупность дифференціальныхъ уравненій этой системы материальныхъ точекъ получимъ, составивъ равенства, выражающія, что ускореніе, получаемое каждою точкою, имѣетъ направленіе равнодѣйствующей всѣхъ приложенныхъ къ ней реакцій и задаваемыхъ силъ и что величина ускоренія равна величинѣ этой равнодѣйствующей, дѣленной на массу точки: самыя уравненія будутъ слѣдующія: $(3n \text{ ур-н})$:

для форм-
Латран-
бсхх диф-
е нс, нс, нс
х 2 у 12 а 6-
нн 2 6 н
нн нс
нс нс
нс нс

$$m_1 \frac{d^2x_1}{dt^2} = X_1 + \lambda(u_1) \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \lambda(u_2) \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \dots + \lambda(u_p) \frac{\partial u_p}{\partial x_1} \quad (517, a1)$$

$$m_1 \frac{d^2y_1}{dt^2} = Y_1 + \lambda(u_1) \frac{\partial u_1}{\partial y_1} + \lambda(u_2) \frac{\partial u_2}{\partial y_1} + \dots + \lambda(u_p) \frac{\partial u_p}{\partial y_1} \quad (517, b1)$$

$$m_1 \frac{d^2z_1}{dt^2} = Z_1 + \lambda(u_1) \frac{\partial u_1}{\partial z_1} + \lambda(u_2) \frac{\partial u_2}{\partial z_1} + \dots + \lambda(u_p) \frac{\partial u_p}{\partial z_1}, \quad (517, c1)$$

$$m_2 \frac{d^2x_2}{dt^2} = X_2 + \lambda(u_1) \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \lambda(u_2) \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \dots + \lambda(u_p) \frac{\partial u_p}{\partial x_2}, \quad (517, a2)$$

.....
.....

$$m_i \frac{d^2x_i}{dt^2} = X_i + \lambda(u_1) \frac{\partial u_1}{\partial x_i} + \lambda(u_2) \frac{\partial u_2}{\partial x_i} + \dots + \lambda(u_p) \frac{\partial u_p}{\partial x_i}, \quad (517, ai)$$

$$m_i \frac{d^2y_i}{dt^2} = Y_i + \lambda(u_1) \frac{\partial u_1}{\partial y_i} + \lambda(u_2) \frac{\partial u_2}{\partial y_i} + \dots + \lambda(u_p) \frac{\partial u_p}{\partial y_i}, \quad (517, bi)$$

$$m_i \frac{d^2 z_i}{dt^2} = Z_i + \lambda(u_1) \frac{\partial u_1}{\partial z_i} + \lambda(u_2) \frac{\partial u_2}{\partial z_i} + \dots + \lambda(u_p) \frac{\partial u_p}{\partial z_i}, \quad (517, \text{cl})$$

$$m_n \frac{d^2 z_n}{dt^2} = Z_n + \lambda(u_1) \frac{\partial u_1}{\partial z_n} + \lambda(u_2) \frac{\partial u_2}{\partial z_n} + \dots + \lambda(u_p) \frac{\partial u_p}{\partial z_n}. \quad (517, \text{cn})$$

При этомъ надо имѣть въ виду, что координаты $x_1, y_1, z_1, x_2, \dots, z_n$, (число которыхъ: $3n$), заключающіяся въ этихъ $3n$ дифференціальныхъ уравненіяхъ, связаны между собою p уравненіями связей (отъ (491, 1) до (491, p)); кромѣ того, эти дифференціальныя уравненія заключаютъ въ себѣ p множителей:

$$\lambda(u_1), \lambda(u_2), \dots, \lambda(u_p),$$

которые опредѣляются изъ уравненій, приведенныхъ ниже.

Такъ какъ всѣ связи удерживающія, то скорости точекъ системы должны удовлетворять p равенствамъ:

$$\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_i} x_i' + \frac{\partial u_1}{\partial y_i} y_i' + \frac{\partial u_1}{\partial z_i} z_i' \right) + \frac{\partial u_1}{\partial t} = 0, \quad (493, 1)$$

$$\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_i} x_i' + \frac{\partial u_2}{\partial y_i} y_i' + \frac{\partial u_2}{\partial z_i} z_i' \right) + \frac{\partial u_2}{\partial t} = 0, \quad (493, 2)$$

$$\dots \dots \dots$$

$$\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial u_p}{\partial x_i} x_i' + \frac{\partial u_p}{\partial y_i} y_i' + \frac{\partial u_p}{\partial z_i} z_i' \right) + \frac{\partial u_p}{\partial t} = 0, \quad (493, p)$$

а ускоренія ихъ должны удовлетворять такому же числу равенствъ:

$$\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_i} x_i'' + \frac{\partial u_1}{\partial y_i} y_i'' + \frac{\partial u_1}{\partial z_i} z_i'' \right) + K_{u_1} = 0, \quad (498, 1)$$

$$\sum_{i=1}^{i=n} \left(\frac{\partial v_2}{\partial x_i} x_i'' + \frac{\partial v_2}{\partial y_i} y_i'' + \frac{\partial v_2}{\partial z_i} z_i'' \right) + K_{v_2} = 0, \quad (498, 2)$$

.....

$$\sum_{i=1}^{i=n} \left(\frac{\partial v_p}{\partial x_i} x_i'' + \frac{\partial v_p}{\partial y_i} y_i'' + \frac{\partial v_p}{\partial z_i} z_i'' \right) + K_{v_p} = 0. \quad (498, p)$$

(Подъ знаками

$$K_{v_1}, K_{v_2}, \dots K_{v_p}$$

пр. 31! подразумеваются многочлены вида (497); см. § 60-й).

и посредст-
венно при ис-
польз. (577)
в урн (498)
да не пере-
писыв. <б>де-
е координ-
атных на-
метр. сист.

Равенства (498, 1), (498, 2), (498, p) послужат для опредѣленія множителей λ ; для этого надо рѣшить дифференціальныя уравненія (517) относительно ускореній $x_1'', y_1'', z_1'', \dots x_i'', y_i'', z_i'', \dots x_n'', y_n'', z_n''$ и полученныя оттуда выраженія этихъ ускореній подставить въ равенства (498, 1), (498, 2), (498, p); тогда эти равенства примутъ слѣдующій видъ:

$$\lambda(v_1)P_{11} + \lambda(v_2)P_{12} + \dots + \lambda(v_p)P_{1p} + Q_1 + K_{v_1} = 0 \dots (518, 1)$$

$$\lambda(v_1)P_{21} + \lambda(v_2)P_{22} + \dots + \lambda(v_p)P_{2p} + Q_2 + K_{v_2} = 0 \dots (518, 2)$$

.....

$$\lambda(v_1)P_{p1} + \lambda(v_2)P_{p2} + \dots + \lambda(v_p)P_{pp} + Q_p + K_{v_p} = 0 \dots (518, p)$$

Для сокращеннаго писанія здѣсь введены знаки, имѣющіе слѣдующія значенія:

$$Q_1 = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{1}{m_i} \left(X_i \frac{\partial v_1}{\partial x_i} + Y_i \frac{\partial v_1}{\partial y_i} + Z_i \frac{\partial v_1}{\partial z_i} \right),$$

или, что то же самое:

$$Q_1 = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{1}{m_i} (P_{i v_1}) F_i \cos(P_{i v_1}, F_i);$$

подобнымъ же образомъ Q_k означать:

$$\left. \begin{aligned} Q_k &= \sum_{i=1}^{i=n} \frac{1}{m_i} \left(X_i \frac{\partial u_k}{\partial x_i} + Y_i \frac{\partial u_k}{\partial y_i} + Z_i \frac{\partial u_k}{\partial z_i} \right) = \\ &= \sum_{i=1}^{i=n} \frac{1}{m_i} (P_{i,u_k}) F_i \cos (P_{i,u_k} F_i) \end{aligned} \right\} \dots \dots (519)$$

Коэффициенты у множителей λ въ равенствахъ (518) суть слѣдующія выраженія:

$$\left. \begin{aligned} P_{i,1} = P_{i,2} &= \sum_{j=1}^{j=n} \frac{1}{m_j} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_i} \frac{\partial u_2}{\partial x_j} + \frac{\partial u_1}{\partial y_i} \frac{\partial u_2}{\partial y_j} + \frac{\partial u_1}{\partial z_i} \frac{\partial u_2}{\partial z_j} \right) = \\ &= \sum_{j=1}^{j=n} \frac{1}{m_j} (P_{i,u_1}) \cdot (P_{j,u_2}) \cos (P_{i,u_1}, P_{j,u_2}) \end{aligned} \right\} \dots \dots (520)$$

$$P_{i,1} = \sum_{j=1}^{j=n} \frac{1}{m_j} \left(\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_i} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_1}{\partial y_i} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_1}{\partial z_i} \right)^2 \right) = \sum_{j=1}^{j=n} \frac{1}{m_j} (P_{i,u_1})^2,$$

и т. д.

2. Если которая-либо изъ связей принадлежитъ къ числу неустойчивыхъ, то надо принять во вниманіе, что она можетъ оказывать только положительныя реакціи, то-есть, реакціи, направленные по положительнымъ направленіямъ дифференціальныхъ параметровъ, поэтому, какъ только множитель λ , соответствующій этой неустойчивающей связи, обратится въ нуль и послѣ этого начнетъ пріобрѣтать отрицательныя значенія, то это будетъ значить, что матеріальныя точки сходятъ съ этой связью, а потому связь ослабѣваетъ и реакція ея уничтожается.

3. Если по характеру вопроса приходится разсматривать связи подъ видомъ механизмовъ даннаго устройства и необходимо принимать въ расчетъ силы, образующіяся вслѣдствіе тренія и прочихъ физическихъ причинъ, то эти силы придется помѣстить въ предыдущихъ формулахъ и уравненіяхъ въ числѣ задаваемыхъ силъ.

§ 71. Приведеніе совокупности (517) къ $(3n - p)$ совокупнымъ дифференціальнымъ уравненіямъ съ такимъ же числомъ искомымъ функцій времени.

Число $(3n - p)$ означимъ черезъ n .

Исключивъ изъ дифференціальнымъ уравненій (517) множители:

$$\lambda(v_1), \lambda(v_2), \dots, \lambda(v_p),$$

будемъ имѣть n дифференціальнымъ уравненій, заключающихъ въ себѣ: время t , $3n$ координатъ $x_1, y_1, z_1, \dots, x_n, y_n, z_n$ и производныя этихъ координатъ по времени, первыя и вторыя.

Всѣ $3n$ координатъ связаны между собою и съ временемъ n уравненіями (491, 1), (491, 2), \dots (491, p); поэтому p изъ числа этихъ координатъ могутъ быть выражены функціями времени и остальныхъ n координатъ; условимся называть послѣднія координатами независимыми, а первыя — координатами зависимыми.

Всѣхъ n изъ числа $3n$ координатъ могутъ быть приняты за независимыя.

Сдѣлавъ надлежащій выборъ независимыхъ координатъ и рѣшивъ уравненія связей относительно координатъ зависимыхъ, получимъ выраженія послѣднихъ въ функціяхъ независимыхъ координатъ и времени.

Производныя по времени отъ зависимыхъ координатъ выражаются функціями: времени, независимыхъ координатъ и ихъ производныхъ по времени.

Найдя этими выраженіями воспользуемся для того, чтобы изъ n дифференціальнымъ уравненій, не заключающихъ множителей λ , исключить зависимыя координаты и ихъ производныя.

Такимъ образомъ мы получимъ n совокупнымъ дифференціальнымъ уравненій, заключающихъ: время, независимыя координаты, ихъ первыя и вторыя производныя

§ 72. Координатные параметры; число независимыхъ координатныхъ параметровъ для данной системы свободныхъ точекъ.

{. Положенія, занимаемыя n точками въ пространствѣ, могутъ быть выражены въ прямолинейныхъ прямоугольныхъ или косоугольныхъ, въ криволинейныхъ цилиндрическихъ, сферическихъ или какихъ бы то ни было ортогональныхъ или косоугольныхъ координатахъ; кромѣ того, могутъ существовать и существуютъ еще многіе другіе способы для той же цѣли; наприимѣръ, положеніе n точекъ въ пространствѣ можетъ быть выражено слѣдующимъ образомъ:

Представимъ себѣ неизмѣняемую среду (и оси координатъ $ЮЕ$, $ЮГ$, $ЮЗ$, связанныя съ нею), точка $Ю$ которой совпадаетъ съ точкою № 1, ось $ЮЗ$ проходитъ черезъ точку № 2 и плоскость $ЗЮЕ$ заключаетъ въ себѣ точку № 3; тогда положенія всѣхъ n точекъ въ пространствѣ могутъ быть выражены слѣдующими $3n$ величинами: абсолютными координатами $x_1 = x_0$, $y_1 = y_0$, $z_1 = z_0$, точки № 1, углами ϕ , ψ , ϑ , разстояніемъ ζ_2 точки № 2 отъ точки № 1, относительными координатами ξ_3 и ζ_3 точки № 3 и относительными координатами ξ_4 , η_4 , ζ_4 , ξ_n , η_n , ζ_n остальныхъ точекъ. Абсолютныя декартовы координаты x_i , y_i , z_i всякой изъ n точекъ выразятся по известнымъ формуламъ (формулы (45) кинематической части стр. 56) въ функцияхъ отъ x_0 , y_0 , z_0 , ϕ , ψ , ϑ , ξ_i , η_i , ζ_i .

Если точки n образуютъ собою неизмѣняемую систему точекъ, то-есть, если разстояніе между каждымъ двумя изъ этихъ точекъ остается постояннымъ, то тогда, при измѣненіи положенія системы въ пространствѣ, измѣняются только шесть величинъ x_0 , y_0 , z_0 , ϕ , ψ и ϑ изъ числа всѣхъ $3n$, перечисленныхъ выше, прочія же $(3n-6)$ остаются постоянными.

Вообще, тѣмъ или другимъ способомъ, положеніе въ пространствѣ системы n точекъ, связанныхъ p связями вида (491, b) (§ 62, *) можетъ быть выражено посредствомъ нѣсколькихъ величинъ:

$$q_1, q_2, q_3, \dots, q_r,$$

обладающихъ слѣдующими свойствами:

*) То-есть, связями, уравненія которыхъ не заключаютъ времени.

Все сказанное до сихъ поръ въ этомъ параграфѣ примѣняется съ надлежащими измѣненіями къ n точкамъ, связаннымъ между собою p связями, уравненія которыхъ (491, 1), (491, 2).... (491, p) (§ 70) заключаютъ время t .

Въ этихъ случаяхъ лучше всего выбрать такіе координатные параметры, которые выражаются функциями декартовыхъ координатъ, не зависящими отъ времени.

Положимъ, что такіе координатные параметры найдены и что число ихъ равно $n = 3n - p$; пусть они выражаются въ декартовыхъ координатахъ слѣдующими функциями:

$$\left. \begin{aligned} q_1 &= \chi_1(x_1, y_1, z_1, \dots, y_n, z_n) \\ q_2 &= \chi_2(x_1, y_1, z_1, \dots, y_n, z_n) \\ &\dots \dots \dots \\ q_n &= \chi_n(x_1, y_1, z_1, \dots, y_n, z_n) \end{aligned} \right\}; \dots \dots (525)$$

рѣшивъ равенства (525) и уравненія (491, 1).... (491, p) относительно декартовыхъ координатъ, получимъ выраженія:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= b_1(q_1, q_2, \dots, q_n, t) \\ y_1 &= b_2(q_1, q_2, \dots, q_n, t) \\ z_1 &= b_3(q_1, q_2, \dots, q_n, t) \\ &\dots \dots \dots \\ &\dots \dots \dots \\ z_n &= b_{3n}(q_1, q_2, \dots, q_n, t) \end{aligned} \right\}; \dots \dots (526)$$

время войдетъ въ эти выраженія изъ уравненій связей.

Слѣдовательно, въ этихъ случаяхъ опредѣленіе 3-го свойства координатныхъ параметровъ должно быть измѣнено слѣдующимъ образомъ:

Каждая совокупность опредѣленныхъ значеній координатныхъ параметровъ q_1, q_2, \dots, q_n вполне опредѣляетъ положеніе системы точекъ въ пространствѣ въ каждый моментъ времени.

есть, первыя части ихъ должны быть равны нулю при всякихъ значеніяхъ t, q_1, q_2, \dots, q_n , каковы бы эти значенія ни были; уравненія же группы E обращаются помощью выражений (527) въ *уравненія*, связывающія координатные параметры между собою и съ временемъ.

Приведенныя здѣсь разсужденія и замѣчанія справедливы и въ тѣхъ случаяхъ, въ которыхъ вторыя части выражений (521) и (525) заключаютъ время.

§ 73. Дифференціальныя уравненія Лагранжа.

Въ § 71 было объяснено, что изъ совокупныхъ дифференціальныхъ уравненій (517) можно исключить всѣ множители λ и получить $n = (3n - p)$ дифференціальныхъ уравненій со столькимъ же числомъ исконыхъ функций времени; эти функции суть тѣ декартовы координаты, которыя приняты за независимыя.

Если декартовы координаты могутъ быть выражены функциями (526) времени и n координатныхъ параметровъ q_1, q_2, \dots, q_n и мыжелаемъ ввести послѣдніе вмѣсто декартовыхъ координатъ въ дифференціальныя уравненія движенія, то мы можемъ это сдѣлать въ тѣхъ n дифференціальныхъ уравненіяхъ, о которыхъ говорили выше и въ § 71.

Поступая такимъ образомъ, намъ придется произвести по крайней мѣрѣ два процесса: процессъ исключенія множителей λ и процессъ преобразованія координатъ; оба эти процесса могутъ быть весьма сложны, а потому мы покажемъ Лагранжевъ приемъ полученія n дифференціальныхъ уравненій движенія въ координатныхъ параметрахъ q_1, q_2, \dots, q_n .

По этому способу процессъ исключенія множителей λ упрощается весьма значительно при помощи соображеній, выводимыхъ на основаніи замѣчанія (C') предыдущаго параграфа; въ этомъ замѣчаніи сказано, что выраженія (526) обращаютъ уравненія связей (491, 1) . . . (491, p) въ *тождества*:

$$\begin{aligned} & \omega_1[q_1, q_2, \dots, q_n, t], \omega_2[q_1, q_2, \dots, q_n, t], \dots \\ & \dots \omega_m[q_1, q_2, \dots, q_n, t] = 0 \end{aligned} \quad (528, 1)$$

и прочія.

гдѣ j есть какое-либо изъ чиселъ 1, 2, 3, p ,

а k есть какое-либо изъ чиселъ 1, 2, 3, n .

Эти же тождества можно представить такъ:

$$\sum_{i=1}^{i=n} \left(\frac{\partial v_j}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial q_k} + \frac{\partial v_j}{\partial y_i} \frac{\partial y_i}{\partial q_k} + \frac{\partial v_j}{\partial z_i} \frac{\partial z_i}{\partial q_k} \right) = 0; \dots\dots (530, j, k)$$

гдѣ декартовы координаты выражены по формуламъ (526) функциями отъ $t, q_1, q_2, \dots q_n$.

Самый видъ первыхъ частей тождества (530) показываетъ, что для исключенія величинъ λ изъ дифференціальныхъ уравненій (517) должно поступить слѣдующимъ образомъ.

Замѣнивъ въ этихъ дифференціальныхъ уравненіяхъ (517) декартовы координаты ихъ выраженіями (526), надо помножить каждое изъ нихъ на производную отъ соотвѣтственной декартовой координаты по q_k (эти производныя получаются изъ выраженій (526)) и полученныя равенства сложить; въ силу тождествъ (530), результатъ этихъ дѣйствій не будетъ заключать величинъ λ и будетъ имѣть слѣдующій видъ:

$$\sum_{i=1}^{i=n} m_i \left(x_i \frac{\partial^2 x_i}{\partial q_k^2} + y_i \frac{\partial^2 y_i}{\partial q_k^2} + z_i \frac{\partial^2 z_i}{\partial q_k^2} \right) = Q_k, \dots\dots (531, k)$$

гдѣ:

$$Q_k = \sum_{i=1}^{i=n} \left(X_i \frac{\partial x_i}{\partial q_k} + Y_i \frac{\partial y_i}{\partial q_k} + Z_i \frac{\partial z_i}{\partial q_k} \right); \dots\dots\dots (532, k)$$

здѣсь k есть каждое изъ чиселъ: 1, 2, 3, n , а потому мы будемъ имѣть n уравненій вида (531).

Въ полученныхъ уравненіяхъ (531) декартовы координаты должны быть выражены по формуламъ (526), а первыя производныя декартовыхъ координатъ по времени должны быть замѣнены выраженіями:

$$x_i' = \frac{\partial x_i}{\partial t} + \frac{\partial x_i}{\partial q_1} q_1' + \frac{\partial x_i}{\partial q_2} q_2' + \dots + \frac{\partial x_i}{\partial q_n} q_n',$$

и проч.; эти выраженія мы будемъ писать подъ слѣдующимъ видомъ, напริมѣръ:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx_i}{dt} = x_i' &= \frac{\partial x_i}{\partial t} + \frac{\partial x_i}{\partial q_1} q_1' + \frac{\partial x_i}{\partial q_2} q_2' + \dots + \frac{\partial x_i}{\partial q_n} q_n' \\ \frac{dy_i}{dt} = y_i' &= \frac{\partial y_i}{\partial t} + \frac{\partial y_i}{\partial q_1} q_1' + \frac{\partial y_i}{\partial q_2} q_2' + \dots + \frac{\partial y_i}{\partial q_n} q_n' \\ \frac{dz_i}{dt} = z_i' &= \frac{\partial z_i}{\partial t} + \frac{\partial z_i}{\partial q_1} q_1' + \frac{\partial z_i}{\partial q_2} q_2' + \dots + \frac{\partial z_i}{\partial q_n} q_n' \end{aligned} \right\} \dots (533, i)$$

Подъ видомъ заключающихся здѣсь частныхъ производныхъ отъ декартовыхъ координатъ по времени должно всегда подразумѣвать частныя производныя по t отъ соответствующихъ функций θ и вслѣдуетъ смѣшивать ихъ съ полными производными x_i', y_i', z_i' , выражающими проекціи на оси координатъ скоростей матеріальныхъ точекъ.

Вмѣсто составленія выраженій для производныхъ x_i'', y_i'', z_i'' , произведемъ слѣдующія преобразованія въ первыхъ частяхъ дифференціальнахъ уравненій (531).

Каждый изъ членовъ первой части уравненія (531, k) можно преобразовать такъ:

$$m_i x_i' \frac{\partial x_i}{\partial q_k} = \frac{d}{dt} \left(m_i x_i' \frac{\partial x_i}{\partial q_k} \right) - m_i x_i' \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial x_i}{\partial q_k} \right);$$

а поэтому дифференціальное уравненіе (531, k) можно представить подъ видомъ:

$$\frac{dp_k}{dt} - G_k = Q_k,$$

гдѣ:

$$p_k = \sum_{i=1}^n m_i \left(x_i' \frac{\partial x_i}{\partial q_k} + y_i' \frac{\partial y_i}{\partial q_k} + z_i' \frac{\partial z_i}{\partial q_k} \right) \dots (534, k)$$

$$G_k = \sum_{i=1}^n m_i \left(x_i' \frac{d \partial x_i}{dt \partial q_k} + y_i' \frac{d \partial y_i}{dt \partial q_k} + z_i' \frac{d \partial z_i}{dt \partial q_k} \right).$$

Теперь намъ придется выразить p_k и G_k въ координатныхъ параметрахъ q_1, q_2, \dots, q_n и въ производныхъ q_1', q_2', \dots, q_n' .

Изъ выражений (533) слѣдуетъ:

$$\frac{\partial x_i'}{\partial q_k} = \frac{\partial x_i}{\partial q_k}, \quad \frac{\partial y_i'}{\partial q_k} = \frac{\partial y_i}{\partial q_k}, \quad \frac{\partial z_i'}{\partial q_k} = \frac{\partial z_i}{\partial q_k};$$

а потому p_k можетъ быть приведено въ виду частной производной по q_k' :

$$p_k = \sum_{i=1}^n m_i \left(x_i' \frac{\partial x_i'}{\partial q_k} + y_i' \frac{\partial y_i'}{\partial q_k} + z_i' \frac{\partial z_i'}{\partial q_k} \right) = \frac{\partial T}{\partial q_k'}$$

отъ выраженія суммы живыхъ силъ системы точекъ

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i v_i^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i \left[(x_i')^2 + (y_i')^2 + (z_i')^2 \right] \dots (535)$$

въ координатныхъ параметрахъ q_1, q_2, \dots, q_n и въ ихъ производныхъ по времени.

Сумма живыхъ силъ точекъ системы называется *живою силою* этой системы; выраженіе ея въ координатныхъ параметрахъ и ихъ производныхъ по времени (это выраженіе легко получить изъ (535) при помощи выражений (533)) можетъ быть представлено въ видѣ суммы:

$$T = T(0) + T(1) + T(2); \dots (535, a)$$

$T(0)$ есть сумма членовъ, не заключающихъ производныхъ q_1', q_2', \dots, q_n' :

$$T(0) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i \left[\left(\frac{\partial x_i}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial y_i}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial z_i}{\partial t} \right)^2 \right]; \dots (536)$$

$T(1)$ есть однородная линейная функція относительно производныхъ отъ координатныхъ параметровъ по времени:

$$T(1) = \sum_{k=1}^n a_k q_k', \dots (537)$$

$$\alpha_k = \sum_{i=1}^{i=n} m_i \left[\frac{\partial x_i}{\partial t} \frac{\partial x_i}{\partial q_k} + \frac{\partial y_i}{\partial t} \frac{\partial y_i}{\partial q_k} + \frac{\partial z_i}{\partial t} \frac{\partial z_i}{\partial q_k} \right]; \dots (537, \text{bis})$$

$T(2)$ есть однородная квадратичная функция относительно тѣхъ же производныхъ:

$$T(2) = \frac{1}{2} \sum_{e=1}^{e=n} q_e' \sum_{k=1}^{k=n} a_{ek} q_k' \dots (538)$$

$$a_{ek} = a_{ke} = \sum_{i=1}^{i=n} m_i \left[\frac{\partial x_i}{\partial q_k} \frac{\partial x_i}{\partial q_e} + \frac{\partial y_i}{\partial q_k} \frac{\partial y_i}{\partial q_e} + \frac{\partial z_i}{\partial q_k} \frac{\partial z_i}{\partial q_e} \right] \dots (538, \text{bis})$$

Производныя второго порядка, заключающіяся въ суммѣ G_k , могутъ быть представлены какъ частныя производныя по q_k отъ скоростей x_i' , y_i' , z_i' , выраженныхъ по формуламъ (533) въ функцияхъ отъ t , q_1 , q_2 , \dots , q_n , q_1' , \dots , q_n' ; въ самомъ дѣлѣ, составимъ выраженіе полной производной отъ $\frac{\partial x_i}{\partial q_k}$ по t :

$$\frac{d \left(\frac{\partial x_i}{\partial q_k} \right)}{dt} = \frac{\partial^2 x_i}{\partial t \partial q_k} + \frac{\partial^2 x_i}{\partial q_1 \partial q_k} q_1' + \frac{\partial^2 x_i}{\partial q_2 \partial q_k} q_2' + \dots + \frac{\partial^2 x_i}{\partial q_n \partial q_k} q_n';$$

съ другой стороны изъ выраженій (533) можемъ получить слѣдующее выраженіе для частной производной отъ x_i' по q_k :

$$\frac{\partial x_i'}{\partial q_k} = \frac{\partial^2 x_i}{\partial q_k \partial t} + \frac{\partial^2 x_i}{\partial q_k \partial q_1} q_1' + \frac{\partial^2 x_i}{\partial q_k \partial q_2} q_2' + \dots + \frac{\partial^2 x_i}{\partial q_k \partial q_n} q_n';$$

сравнивъ между собою вторыя части этихъ равенствъ, мы заключимъ, что:

$$\frac{d \partial x_i}{dt \partial q_k} = \frac{d \left(\frac{\partial x_i}{\partial q_k} \right)}{dt} = \frac{\partial x_i'}{\partial q_k}.$$

Поэтому сумма G_k есть частная производная отъ T по q_k :

$$G_k = \sum_{i=1}^{i=n} m_i \left(x_i' \frac{\partial x_i'}{\partial q_k} + y_i' \frac{\partial y_i'}{\partial q_k} + z_i' \frac{\partial z_i'}{\partial q_k} \right) = \frac{\partial T}{\partial q_k}.$$

Такимъ образомъ мы получимъ и совокупныхъ дифференциальныхъ уравненій:

$$\frac{dp_1}{dt} - \frac{\partial T}{\partial q_1} = Q_1, \quad \frac{dp_2}{dt} - \frac{\partial T}{\partial q_2} = Q_2, \quad \dots \quad \frac{dp_n}{dt} - \frac{\partial T}{\partial q_n} = Q_n, \quad \dots \quad (531)$$

гдѣ:

$$p_1 = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1}, \quad p_2 = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_2}, \quad \dots \quad p_n = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_n}, \quad \dots \quad (539)$$

называемыхъ *дифференціальными уравненіями Лагранжа* *).

Q_1, Q_2, \dots, Q_n суть суммы вида (532), выраженные въ координатныхъ параметрахъ и ихъ производныхъ по времени.

Лагранжевъ способъ преобразованія дифференціальныхъ уравненій движенія можетъ быть примѣненъ также и въ тѣхъ случаяхъ, когда декартовы координаты выражены функциями (527) (§ 72) времени и s координатныхъ параметровъ (s менѣе $3n$ и болѣе n) такимъ образомъ, что выражения (527) обращаютъ $(3n - s)$ уравненія связей въ тождества; тогда Лагранжево преобразованіе приводитъ къ s совокупнымъ дифференціальнымъ уравненіямъ, заключающимъ $(s - n)$ множителей λ .

Положимъ, что уравненія группы I (см. замѣчаніе (D') въ концѣ параграфа 72-го) суть:

$$u_1 = 0, \quad u_2 = 0, \quad u_3 = 0, \quad \dots \quad u_p = 0, \quad (I)$$

гдѣ $n = 3n - s$; остальные изъ уравненій (491, 1) (491, p) образуютъ группу E:

$$u_{p+1} = 0, \quad u_{p+2} = 0, \quad \dots \quad u_r = 0. \quad (E)$$

Выраженія (527) обращаютъ первыя части уравненій группы I въ нуль тождественно при всякихъ значеніяхъ t, q_1, q_2, \dots, q_n , даже при тѣхъ значеніяхъ, которыя не удовлетворяютъ уравненіямъ группы E; поэтому, рассуждая совершенно такъ же, какъ и въ началѣ вѣдущаго параграфа, то-есть, рассматривая всѣ координатные параметры $q_1, q_2, q_3, \dots, q_n$ какъ,

*) Дифференціальныя уравненія (517) также даны Лагранжемъ, потому совокупность (531) слѣдуетъ называть *второй формою Лагранжевыхъ дифференціальныхъ уравненій движенія системы точекъ*, какъ ихъ называетъ Якоби.

КАКЪ БУДТО БЫ ОНИ БЫЛИ НЕЗАВИСИМЫ ДРУГЪ ОТЪ ДРУГА, ПОЛУЧИМЪ *sg* ТОЖДЕСТВЪ СЛѢДУЮЩАГО ВИДА:

$$\frac{\partial u_j((q_1, q_2, \dots, q_s, t))}{\partial q_k} = 0,$$

гдѣ j есть которое-либо изъ чиселъ $1, 2, 3, \dots, g$,

а k есть некоторое-либо изъ чиселъ $1, 2, 3, \dots, s$.

Равенства же, въ которыя обращаются уравненія группы E , а именно:

[illegible]

суть *уравнения*, связывающія координатные параметры между собою и съ временемъ, то-есть, дѣлающія ($s-n$) параметровъ зависимыми отъ остальныхъ; такъ что, если слѣдующія значенія величинъ t, q_1, q_2, \dots, q_s :

$$t = \tau, \quad q_1 = k_1, \quad q_2 = k_2, \quad \dots \dots q_s = k_s,$$

удовлетворяють всѣмъ уравненіямъ (540), то значенія:

$$t = \tau, k_1 + \delta q_1, k_2, \dots, k_s$$

могут и не удовлетворять имъ, а потому частныя производныя:

$$\frac{\partial \varepsilon_{g+1}}{\partial q_1}, \quad \frac{\partial \varepsilon_{g+2}}{\partial q_1}, \quad \dots \quad \frac{\partial \varepsilon_p}{\partial q_1}$$

могутъ быть неравными нулю при значеніяхъ величинъ t, q_1, q_2, \dots, q_s , удовлетворяющихъ уравненіямъ (540); то же самое должно сказать и о частныхъ производныхъ этихъ функцій по прочимъ координатнымъ параметрамъ.

Легко теперь видѣть, что, примѣняя къ рассматриваемымъ случаямъ Лагранжево преобразование, мы получимъ съ совокупныхъ дифференціаль-
ныхъ уравненій слѣдующаго вида:

$$\frac{dp_k}{dt} - \frac{\partial T}{\partial q_k} = Q_k + \lambda(u_{g+1}) \frac{\partial u_{g+1}}{\partial q_k} + \dots + \lambda(u_p) \frac{\partial u_p}{\partial q_k}, \dots (541, k)$$

гдѣ k есть каждое изъ чиселъ $1, 2, 3, \dots, s$; въ этихъ дифференціальныхъ уравненіяхъ осталось $(s-n)$ множителей:

$$\lambda(u_{p+1}), \lambda(u_{p+2}), \dots, \lambda(u_p).$$

Для поясненія сказаннаго въ настоящемъ параграфѣ, приведемъ нѣсколько примѣровъ составленія дифференціальныхъ уравненій Лагранжа.

Вмѣсто перваго примѣра мы укажемъ на приложеніе Лагранжевыхъ уравненій къ составленію дифференціальныхъ уравненій движенія свободной матеріальной точки въ сферическихъ координатахъ: въ этомъ случаѣ $n=1$, $p=0$, $n=3$, $q_1=r$, $q_2=\varphi$, $q_3=\psi$,

$$x = r \cos \psi \sin \varphi, \quad y = r \sin \psi \sin \varphi, \quad z = r \cos \varphi,$$

$$Q_1 = F \cos(F, \alpha), \quad Q_2 = r F \cos(F, \beta), \quad Q_3 = r \sin \varphi F \cos(F, \gamma),$$

гдѣ α , β и γ суть направленія координатныхъ осей сферическихъ координатъ, а F есть сила, приложенная къ матеріальной точкѣ; составивъ Лагранжевы дифференціальные уравненія, получимъ уравненія (38) (страница 42), помноженные: второе — на r и третье — на $r \sin \varphi$.

Подобнымъ же образомъ можно примѣнять Лагранжевы уравненія къ составленію дифференціальныхъ уравненій движенія точки въ какихъ угодно координатахъ; надо только знать, какъ выражаются декартовы координаты въ новыхъ координатныхъ параметрахъ q_1, q_2, q_3 , дальѣйшія же дѣйствія указываются видомъ Лагранжевыхъ уравненій и формулами, приведенными выше.

Примѣръ 64-й. Система состоитъ изъ двухъ матеріальныхъ точекъ m_1 и m_2 , связанныхъ удерживающею связью, приведенною въ примѣрѣ 57-мъ (стр. 317); кромѣ того матеріальная точка m_1 должна постоянно оставаться въ плоскости XU , а точка m_2 — на оси Z . Къ точкѣ m_2 приложена только сила тяжести $m_2 g$, къ точкѣ же m_1 не приложено никакихъ задаваемыхъ силъ и плоскость XU предполагается идеально гладкою; положительная часть оси Z направлена вертикально внизъ.

Въ этомъ случаѣ $n=2$, число связей и преградъ равно 4-мъ:

$$r_1 + r_2 - l = 0, \quad z_1 = 0, \quad x_2 = 0, \quad y_2 = 0,$$

такъ что $p=4$ и $n=2$; примемъ за координатные параметры q_1 и q_2 полярныя координаты ρ и θ точки m_1 въ плоскости XU .

Декартовы координаты выразятся въ координатныхъ параметрахъ такъ:

$$x_1 = \rho_1 \cos \theta_1, \quad y_1 = \rho_1 \sin \theta_1, \quad z_1 = 0, \quad x_2 = 0, \quad y_2 = 0, \quad z_2 = l - \rho_1.$$

и

Живая сила системы:

$$T = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) (\rho_1')^2 + \frac{1}{2} m_1 \rho_1^2 (\theta_1')^2.$$

Лагранжевы дифференциальныя уравненія движенія въ этомъ случаѣ будутъ слѣдующія:

$$(m_1 + m_2) \frac{d^2 \rho_1}{dt^2} - m_1 \rho_1 \frac{d^2 \theta_1}{dt^2} = -m_1 g,$$

$$m_1 \frac{d(\rho_1^2 \theta_1')}{dt} = 0.$$

Примѣръ 65-й. Система состоитъ изъ двухъ тяжелыхъ точекъ m_1 и m_2 ; первая находится въ постоянномъ разстоянн L отъ начала координатъ, а вторая — въ постоянномъ разстоянн l отъ первой; кромѣ того, предположимъ, что обѣ точки остаются въ одной вертикальной плоскости, проходящей черезъ начало координатъ. Пусть эта плоскость есть плоскость XU и ось U направлена вертикально внизъ.

Въ этомъ случаѣ число точекъ равно двумъ, а число преградъ и связей — четыремъ, поэтому $n = 2$.

Означимъ черезъ φ_1 и φ_2 углы, составляемые направлениями OM_1 и M_1M_2 съ осью U , и примемъ эти углы за координатные параметры системы.

Выраженія (526) будутъ здѣсь слѣдующія:

$$x_1 = L \sin \varphi_1, \quad x_2 = L \sin \varphi_1 + l \sin \varphi_2$$

$$y_1 = L \cos \varphi_1, \quad y_2 = L \cos \varphi_1 + l \cos \varphi_2$$

$$z_1 = 0, \quad z_2 = 0.$$

Живая сила системы:

$$T = \frac{(m_1 + m_2)}{2} L^2 (\varphi_1')^2 + \frac{m_2}{2} l^2 (\varphi_2')^2 + m_2 L l \varphi_1' \varphi_2' \cos (\varphi_2 - \varphi_1);$$

$$p_1 = (m_1 + m_2) L^2 \varphi_1' + m_2 L l \varphi_2' \cos \omega,$$

$$p_2 = m_2 l^2 \varphi_2' + m_2 L l \varphi_1' \cos \omega; \quad (\varphi_2 - \varphi_1) = \omega.$$

Два дифференциальныя уравненія будутъ:

Y. 13

$$(m_1 + m_2)L^2\varphi_1'' + m_2Ll \frac{d(\varphi_1' \cos \omega)}{dt} - m_2Ll\varphi_1'\varphi_2' \sin \omega = \\ = - (m_1 + m_2)Lg \sin \varphi_1$$

$$m_2l^2\varphi_2'' + m_2Ll \frac{d(\varphi_1' \cos \omega)}{dt} + m_2Ll\varphi_1'\varphi_2' \sin \omega = - m_2lg \sin \varphi_1.$$

Примеръ 66-й. Система состоитъ изъ четырехъ материальныхъ точекъ M_1, M_2, M_3, M_4 , связанныхъ попарно идеально-твердыми стержнями $M_1M_2, M_2M_3, M_3M_4, M_4M_1$, одинаковой длины l ; все точки притягиваются къ началу координатъ силами, пропорциональными расстояниямъ отъ него и массамъ ихъ; кроме этого, предположимъ, что все точки остаются въ плоскости XU и что массы точекъ, находящихся на противоположащихся вершинахъ ромба $M_1M_2M_3M_4$, равны между собою: $m_1 = m_3, m_2 = m_4$.

Здѣсь $n = 4$; за координатные параметры возьмемъ: полярныя координаты ρ_c, θ_c центра C ромба, расстояние $\xi = CM_1$, точки M_1 отъ этого центра и уголъ ϑ , составляемый направлениемъ CM_1 съ осью X^{000} ; расстояние η , точки M_2 отъ точки C равно корню квадратному изъ разности $(l^2 - \xi^2)$ и направление CM_2 составляетъ съ осью X^{000} уголъ $\left(\frac{\pi}{2} + \vartheta\right)$.

Живая сила этой системы выражается такъ:

$$T = (m_1 + m_2) \left[(\rho_c')^2 + \rho_c^2 (\theta_c')^2 \right] + (m_2l^2 + (m_1 - m_2)\xi^2) (\vartheta')^2 + \\ + \frac{m_1l^2 - (m_1 - m_2)\xi^2}{l^2 - \xi^2} (\xi')^2.$$

Дифференціальныя уравненія движенія (по сокращеніи общихъ множителей) будутъ:

$$\rho_c'' - \rho_c(\theta_c')^2 = -\mu\rho_c; \quad \frac{d}{dt}(\rho_c^2\theta_c') = 0; \\ m_1l^2 \frac{m_1 - m_2}{l^2 - \xi^2} \xi'' + \frac{m_2l^2\xi}{(l^2 - \xi^2)^2} (\xi')^2 - (m_1 - m_2)\xi(\vartheta')^2 = \\ = -\mu(m_1 - m_2)\xi; \\ \frac{d}{dt}[(m_2l^2 + (m_1 - m_2)\xi^2)\vartheta'] = 0.$$

Примѣчаніе I. Число n независимыхъ декартовыхъ координатъ или независимыхъ координатныхъ параметровъ системы точекъ называется *числомъ степеней свободы этой системы*: такъ, свободная матеріальная точка имѣетъ въ пространствѣ три, а на какой-либо поверхности — двѣ степени свободы, въ примѣрахъ 64 и 65-мъ число степеней свободы равно двумъ, а въ примѣрѣ 66 — четыремъ.

Примѣчаніе II. Суммы:

$$X_i \frac{\partial x_i}{\partial q_k} + Y_i \frac{\partial y_i}{\partial q_k} + Z_i \frac{\partial z_i}{\partial q_k}$$

могутъ имѣть измѣренія силъ ((29) стр. 27) только въ исключительныхъ случаяхъ, а не вообще; поэтому первыя части Лагранжевыхъ уравненій не всегда имѣютъ измѣреніе произведенія изъ массы на ускореніе.

§ 74. Гамильтонова форма дифференціальныхъ уравненій движенія.

Лагранжевы уравненія (531), подобно всякой совокупности обыкновенныхъ дифференціальныхъ уравненій второго порядка, могутъ быть приведены къ совокупности двойнаго числа обыкновенныхъ дифференціальныхъ уравненій перваго порядка съ двойнымъ же числомъ искомыхъ функцій времени.

Для этого, принявъ q_1', q_2', \dots, q_n' за новыя искомыя функціи, надо замѣнить, въ уравненіяхъ (531), вторыя производныя $q_1'', q_2'', \dots, q_n''$ — первыми производными отъ новыхъ переменныхъ; послѣ этого дифференціальныя уравненія (531) выйдутъ съ n дифференціальными уравненіями:

$$\frac{dq_1}{dt} = q_1', \quad \frac{dq_2}{dt} = q_2', \quad \dots \quad \frac{dq_n}{dt} = q_n'$$

образуютъ совокупность $2n$ дифференціальныхъ уравненій перваго порядка съ $2n$ искомыми функціями времени: $q_1, q_2, \dots, q_n, q_1', q_2', \dots, q_n'$.

Если же принять величины p_1, p_2, \dots за новыя искомыя функціи, какъ сдѣлалъ Пуассонъ, то можно получить весьма сим-

метричную форму совокупности $2n$ дифференціальных уравненій перваго порядка, найденную Гамильтономъ.

Для этого надо прежде всего выразить производныя q_k' въ функціяхъ отъ величинъ p_k .

По формуламъ (539), (535, а), (537) и (538) вторныя выражаются слѣдующими линейными функціями первыхъ:

$$p_k = \alpha_k + a_{1k}q_1' + a_{2k}q_2' + \dots + a_{nk}q_n'; \dots \dots (542, k)$$

k есть одно изъ чиселъ $1, 2, 3, \dots, n$.

Рѣшивъ эти n равенствъ относительно величинъ q_1', q_2', \dots , получимъ требуемыя выраженія; пусть эти выраженія будутъ:

$$q_j' = \beta_j + h_{1j}p_1 + h_{2j}p_2 + \dots + h_{nj}p_n, \dots \dots (543, j)$$

гдѣ j есть одно изъ чиселъ $1, 2, 3, \dots, n$.

Коэффициенты h и β (съ различными значками внизу) выражаются въ коэффициентахъ a и α , и обратно; зависимость между тѣми и другими представляется рядомъ равенствъ, которыя слѣдуютъ изъ тождествъ, получающихся при подстановленіи выраженій (542) величинъ p_1, p_2, \dots, p_n въ равенства (543); эта зависимость — слѣдующая:

$$\beta_j = -(\alpha_1 h_{1j} + \alpha_2 h_{2j} + \dots + \alpha_n h_{nj}) \dots \dots (544, j)$$

$$h_{1j}a_{1j} + h_{2j}a_{2j} + \dots + h_{nj}a_{nj} = 1 \dots \dots (545, jj)$$

$$h_{1j}a_{1k} + h_{2j}a_{2k} + \dots + h_{nj}a_{nk} = 0, \dots \dots (545, jk)$$

гдѣ j есть каждое изъ чиселъ $1, 2, \dots, n$; k — одно изъ тѣхъ же чиселъ, но неравное j ; конечно: $h_{jj} = h_{jk}$.

Подставивъ выраженія (543) вмѣсто величинъ q_k' въ выраженіе (535, а) живой силы, получимъ другое выраженіе ея, въ функціи отъ $t, q_1, q_2, \dots, q_n, p_1, p_2, \dots, p_n$; это новое выраженіе живой силы, союзное первому, мы будемъ обозначать буквою \mathfrak{L} и будемъ называть вторымъ союзнымъ выраженіемъ живой силы.

Чтобы вывести это выражение, помножимъ первое изъ равенствъ (542) ($k=1$) на q_1' , второе ($k=2$) — на q_2' , и т. д. и сложимъ полученные результаты, получится:

$$\sum_{k=1}^{k=n} p_k q_k' = T(1) + 2 T(2);$$

придавъ же къ обѣимъ частямъ этого равенства сумму $[T(1) + 2 T(0)]$, получимъ:

$$2 T = \sum_{k=1}^{k=n} p_k q_k' + T(1) + 2 T(0) \dots \dots \dots (535, b)$$

Если во второй части этого выраженія замѣнить величины q_k' ихъ выраженіями (543), то она получитъ форму второго союзнаго выраженія удвоенной живой силы.

Сначала преобразуемъ выраженіе $T(1)$:

$$T(1) = \sum_{j=1}^{j=n} \alpha_j q_j' = \sum_{j=1}^{j=n} \alpha_j \beta_j + \sum_{j=1}^{j=n} \alpha_j \sum_{k=1}^{k=n} h_{kj} p_k;$$

если во второмъ членѣ перемѣнимъ порядокъ суммированія и примемъ во вниманіе равенства (544), то будемъ имѣть:

$$T(1) = \sum_{j=1}^{j=n} \alpha_j \beta_j - \sum_{k=1}^{k=n} \beta_k p_k \dots \dots \dots (546)$$

Далѣе:

$$\sum_{k=1}^{k=n} p_k q_k' = \sum_{k=1}^{k=n} \beta_k p_k + \sum_{k=1}^{k=n} p_k \sum_{e=1}^{e=n} h_{ke} p_e;$$

поэтому изъ выраженія (535, b) окажется, что второе союзное выраженіе живой силы имѣетъ слѣдующій видъ:

$$\mathfrak{I} = \mathfrak{I}(2) + \mathfrak{I}(0), \dots \dots \dots (535, c)$$

гда:

$$\mathfrak{I}(2) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{k=n} p_k \sum_{c=1}^{c=n} h_{kc} p_c \dots \dots \dots (547)$$

$$\mathfrak{I}(0) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{k=n} \alpha_k \beta_k + T(0) \dots \dots \dots (548)$$

Такимъ образомъ мы видимъ, что вторая союзная форма выраженія живой силы состоитъ изъ двухъ частей, одна изъ которыхъ не заключаетъ величинъ p_k , другая же есть однородная функція второй степени относительно этихъ величинъ.

Изъ выраженій (543), (535, с), (547), (548) слѣдуетъ, что q_k' могутъ быть выражены такимъ образомъ:

$$q_k' = \beta_k + \frac{\partial \mathfrak{I}}{\partial p_k}, \dots \dots \dots (549, k)$$

а кромѣ того, если еще введемъ въ наши формулы слѣдующую сумму:

$$S = \sum_{k=1}^{k=n} \beta_k p_k, \dots \dots \dots (550)$$

то q_k' выразится въ видѣ частной производной по p_k :

$$q_k' = \frac{\partial (\mathfrak{I} + S)}{\partial p_k} \dots \dots \dots (549, k, \text{bis})$$

Частныя производныя отъ T по q_k могутъ быть тоже выражены помощью частныхъ производныхъ отъ \mathfrak{I} и S ; для этого мы составимъ два слѣдующія выраженія.

Если въ \mathfrak{I} подставить, вмѣсто p_1, p_2, \dots, p_n , выраженія (542), то \mathfrak{I} обратится въ T ; поэтому можно написать слѣдующее равенство:

$$\frac{\partial T}{\partial q_k} = \frac{\partial \mathfrak{I}}{\partial q_k} = \sum_{c=1}^n \frac{\partial \mathfrak{I}}{\partial p_c} \frac{\partial p_c}{\partial q_k}; \dots \dots \dots (551)$$

здѣсь, подъ частными производными отъ p_1, p_2, \dots по q_k , подразумеваются частныя производныя получаемыя изъ выражений (542).

Затѣмъ, если во второй части равенства:

$$2T = \sum_{s=1}^{s=n} q'_s p_s - S + 2\mathfrak{I}(0). \dots (535, d)$$

замѣнить величины p_1, p_2, \dots ихъ выраженіями (542), то вторая часть приметъ видъ, тождественный виду первой части; поэтому можно написать слѣдующее равенство:

$$2 \frac{\partial T}{\partial q_k} = \sum_{s=1}^{s=n} q'_s \frac{\partial p_s}{\partial q_k} - \frac{\partial S}{\partial q_k} - \sum_{s=1}^{s=n} p_s \frac{\partial q'_s}{\partial q_k} + 2 \frac{\partial \mathfrak{I}(0)}{\partial q_k},$$

которое, на основаніи выражений (549), можно еще представить такъ:

$$2 \frac{\partial T}{\partial q_k} = \sum_{s=1}^{s=n} \frac{\partial \mathfrak{I}}{\partial p_s} \frac{\partial p_s}{\partial q_k} - \frac{\partial S}{\partial q_k} + 2 \frac{\partial \mathfrak{I}(0)}{\partial q_k}.$$

Вычтя изъ него равенство (551) получимъ:

$$\frac{\partial T}{\partial q_k} = - \frac{\partial (\mathfrak{I} + S - 2\mathfrak{I}(0))}{\partial q_k} \dots (552, k)$$

Къ этому должно прибавить, что, такъ какъ $\mathfrak{I}(0)$ не заключаетъ въ себѣ величинъ p_1, p_2, \dots , то выраженія (549, k, bis) можно представить такъ:

$$q'_k = \frac{\partial (\mathfrak{I} + S - 2\mathfrak{I}(0))}{\partial p_k} \dots (553, k)$$

Изъ всего выведеннаго и сказаннаго въ настоящемъ параграфѣ слѣдуетъ, что совокупныя дифференціальныя уравненія Лагранжа могутъ быть замѣнены слѣдующею совокупностью $2n$ обыкновенныхъ дифференціальныхъ уравненій перваго порядка:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dp_1}{dt} &= \frac{\partial \Phi}{\partial q_1} + Q_1; & \frac{dq_1}{dt} &= \frac{\partial \Phi}{\partial p_1}; \\ \frac{dp_2}{dt} &= -\frac{\partial \Phi}{\partial q_2} + Q_2; & \frac{dq_2}{dt} &= \frac{\partial \Phi}{\partial p_2}; \\ &\dots & \dots & \\ \frac{dp_n}{dt} &= -\frac{\partial \Phi}{\partial q_n} + Q_n; & \frac{dq_n}{dt} &= \frac{\partial \Phi}{\partial p_n}; \end{aligned} \right\} \dots (554)$$

гдѣ Φ есть функція отъ $t, q_1, q_2, \dots, q_n, p_1, p_2, \dots, p_n$:

$$\Phi = \mathfrak{I} + S - 2\mathfrak{I}(0), \dots \dots \dots (555)$$

значенія величинъ $\mathfrak{I}, \mathfrak{I}(0)$ и S выражаются формулами (535, с), (547), (548), (544), (545), (536); Q_k (532) должны быть выражены функціями отъ $t, q_1, q_2, \dots, q_n, p_1, p_2, \dots, p_n$.

Эти уравненія мы будемъ называть *Гамильтоновыми совокупными дифференціальными уравненіями*.

Такъ какъ $T = \mathfrak{I}$, то изъ равенства (535, d) окажется, что

$$\mathfrak{I} + S - 2\mathfrak{I}(0) = \sum_{i=1}^n p_i q_i' - \mathfrak{I},$$

а потому, если q_i' будутъ выражены въ p_1, p_2, \dots, p_n , то Φ можетъ быть представлена подѣ видою:

$$\Phi = \sum_{i=1}^n p_i q_i' - \mathfrak{I} \dots \dots \dots (556)$$

§ 75. Возможныя варьяціи положеній данной системы точекъ; возможныя варьяціи координатъ и координатныхъ параметровъ.

Въ слѣдующихъ главахъ намъ придется весьма нерѣдко, при перемѣнѣ координатныхъ параметровъ, преобразовывать дифференціальныя уравненія движенія изъ одной формы въ другую; такія преобразованія значительно упрощаются тѣмъ, что вся совокупность дифференціальныхъ уравненій движенія системы точекъ можетъ быть заключена въ одно уравненіе, надъ которымъ процессы преобразованія совершаются скорѣе и проще, чѣмъ надъ отдѣльными дифференціальными уравненіями.

Въ составъ этого уравненія, которое выведемъ въ слѣдующемъ параграфѣ, войдутъ нѣкоторыя весьма малыя величины, о которыхъ дадимъ понятіе въ настоящемъ параграфѣ.

Пусть имѣемъ систему n матеріальныхъ точекъ, подчиненныхъ p связямъ, выражаемымъ уравненіями (491, 1) . . . (491, p) (§ 70); положимъ, что время входитъ въ эти уравненія явнымъ образомъ.

Если $3n$ больше p , то $n = (3n - p)$ декартовыхъ координатъ суть величины независимыя и произвольныя. При всякомъ значеніи t мы можемъ придать n декартовымъ координатамъ произвольныя значенія, а значенія остальныхъ $3n - n = p$ координатъ опредѣлить изъ p уравненій связей; полученная такимъ образомъ система значеній декартовыхъ координатъ опредѣлитъ одну изъ совокупностей положеній точекъ, возможную въ моментъ t ; понятно, что число различныхъ совокупностей положеній системы точекъ, возможныхъ въ одинъ и тотъ же моментъ времени, бесконечно велико.

Возьмемъ двѣ какія-либо весьма близкія совокупности положеній точекъ, возможные въ одинъ и тотъ же моментъ t времени; пусть

$$M_1, M_2, \dots M_i, \dots M_n \quad (I)$$

суть положенія, занимаемыя точками

$$m_1, m_2, \dots m_i, \dots m_n$$

въ первой совокупности, а

$$M'_1, M'_2, \dots M'_i, \dots M'_n \quad (II)$$

положенія, занимаемыя точками во второй совокупности положеній; пусть $x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \dots x_i, y_i, z_i, \dots x_n, y_n, z_n$ суть декартовы координаты положеній $M_1, M_2, \dots M_i, \dots M_n$; декартовы же координаты положеній совокупности (II) означимъ такъ:

$$x_1 + \delta x_1, x_2 + \delta x_2, \dots x_i + \delta x_i, \dots x_n + \delta x_n$$

$$y_1 + \delta y_1, y_2 + \delta y_2, \dots y_i + \delta y_i, \dots y_n + \delta y_n$$

$$z_1 + \delta z_1, z_2 + \delta z_2, \dots z_i + \delta z_i, \dots z_n + \delta z_n.$$

Говоря, что эти двѣ совокупности положеній весьма близки, мы подразумѣваемъ, что разстоянія

$$M_1 M'_1, M_2 M'_2, \dots M_i M'_i, \dots M_n M'_n \dots (557)$$

суть ничтожно-малыя длины произвольной степени малости; поэтому и проеціи ихъ на оси координатъ, то-есть, величины:

$$\left. \begin{array}{l} \delta x_1, \delta x_2, \dots \delta x_n, \dots \delta x_n \\ \delta y_1, \delta y_2, \dots \delta y_n, \dots \delta y_n \\ \delta z_1, \delta z_2, \dots \delta z_n, \dots \delta z_n \end{array} \right\} \dots \dots \dots (558)$$

суть также ничтожно-малыя длины произвольной степени малости.

Координаты какъ первой, такъ и второй совокупности положеній точекъ системы должны удовлетворять уравненіямъ связей; напри-мѣръ, должны быть удовлетворены слѣдующія два равенства

$$u_1(x_1, y_1, \dots z_n, t) = 0, \dots \dots (491, 1)$$

$$u_1(x_1 + \delta x_1, y_1 + \delta y_1, \dots z_n + \delta z_n, t) = 0, \dots \dots (491, 1, \text{bis})$$

гдѣ t имѣетъ одно и то же значеніе въ обоихъ уравненіяхъ.

Разложивъ первую часть уравненія (491, 1, bis) по восходящимъ степенямъ величинъ (558), принявъ во вниманіе уравненіе (491, 1) и имѣя въ виду ничтожную малость величинъ (558), должны будемъ заключить, что величины эти должны удовлетворять уравненію

$$\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_i} \delta x_i + \frac{\partial u_1}{\partial y_i} \delta y_i + \frac{\partial u_1}{\partial z_i} \delta z_i \right) = 0 \dots \dots (559, 1)$$

при всякихъ значеніяхъ величинъ $t, x_1, y_1, z_1, x_2, \dots z_n$, удовлетворяющихъ уравненіямъ связей (491, 1), \dots (491, p).

Для краткости, условимся обозначать первую часть равенства (559, 1) знакомъ δu_1 .

Такимъ образомъ мы найдемъ, что величины (558) должны удовлетворять p слѣдующимъ уравненіямъ:

$$\delta u_1 = 0, \delta u_2 = 0, \delta u_3 = 0, \dots \delta u_p = 0 \dots \dots (559)$$

при всякихъ значеніяхъ t и при всякихъ такихъ значеніяхъ коорди-

нать $x_1, y_1, z_1, x_2, \dots, x_n$, которыя удовлетворяють уравненіямъ (491, 1), (491, p) связей; здѣсь δv_k означаетъ слѣдующую сумму:

$$\delta v_k = \sum_{i=1}^{i=n} \left(\frac{\partial v_k}{\partial x_i} \delta x_i + \frac{\partial v_k}{\partial y_i} \delta y_i + \frac{\partial v_k}{\partial z_i} \delta z_i \right) (560)$$

Весьма малыя величины (558), удовлетворяющія уравненіямъ (559), называются возможными варьяціями координатъ данной системы точекъ. при неизмѣняемыхъ значеніяхъ τ .

и вирту-
альныя
измѣнені-
я

Весьма малыя длины (557), проэкціи которыхъ на координатныя оси суть возможные варьяціи координатъ, могутъ быть названы возможными варьяціями положеній точекъ системы; величины и направленія этихъ варьяцій мы будемъ обозначать буквами ϵ съ надлежащими значками внизу; такимъ образомъ знаки:

$$\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_i, \epsilon_n$$

будутъ означать величины и направленія возможныхъ варьяцій положеній точекъ

$$m_1, m_2, m_i, m_n.$$

Такъ какъ:

$$\delta x_i = \epsilon_i \cos (\epsilon_i, X), \delta y_i = \epsilon_i \cos (\epsilon_i, Y), \delta z_i = \epsilon_i \cos (\epsilon_i, Z), . . (561)$$

то уравненія (559) могутъ быть представлены подѣ слѣдующимъ видомъ:

сл. 503 стр. 315

$$\sum_{i=1}^{i=n} \epsilon_i (P_{i,1}) \cos (P_{i,1}, \epsilon_i) = 0, (559, 1, bis)$$

$$\sum_{i=1}^{i=n} \epsilon_i (P_{i,2}) \cos (P_{i,2}, \epsilon_i) = 0, (559, 2, bis)$$

$$.$$

руководство къ курсу теорети-
кой механики Д. Бобылева
1895. стр. 216.
начальная линия = разстоя-
ніе двухъ положеній, которыя
одинъ можетъ занимать
длинъ и тогда же можетъ
имѣть
мѣстонахожденіе
двухъ положеній,
т.е. точка занимаетъ
два среднѣе мѣстонахо-
жденіе при двѣхъ состояніяхъ
и слѣдственно.

$$\sum_{i=1}^{i=n} \epsilon_i (P_{i,p}) \cos (P_{i,p}, \epsilon_i) = 0. . . . (559, p, bis)$$

Число варьаций координатъ равняется числу координатъ.

Е) Если всѣ точки системы свободны, не подлежатъ никакимъ перепрадамъ или связямъ, то всѣ $3n$ варьаций координатъ произвольны и независимы, то-есть, каждая изъ нихъ, независимо отъ прочихъ, можетъ имѣть произвольный знакъ и произвольную весьма малую величину; варьации положеній свободныхъ точекъ могутъ имѣть, совершенно независимо одна отъ другой, произвольныя направленія и произвольныя весьма малыя величины.

Г) Каждая удерживающая связь ограничиваетъ независимость варьаций координатъ системы точекъ, связывая ихъ между собою однимъ уравненіемъ вида (559); если число этихъ связей есть p , то только $n = (3n - p)$ варьаций координатъ независимы и произвольны, прочія же p варьаций координатъ выражаются изъ p уравненій (559) линейными однородными функціями первыхъ. Число независимыхъ варьаций координатъ равняется числу независимыхъ декартовыхъ координатъ, то-есть, числу степеней свободы системы точекъ.

Существованіе неудерживающей связи:

$$n(x_1, y_1, z_1, x_2, \dots, x_n, t) \geq 0 \dots \dots (492)$$

между точками системы подчиняетъ варьации координатъ вѣкоторому условію при тѣхъ положеніяхъ точекъ, при которыхъ координаты ихъ обращаются въ нуль или въ ничтожно-малую положительную величину:

Когда координаты $x_1, y_1, z_1, \dots, x_n$ удовлетворяютъ равенству $n = 0$, тогда варьации координатъ должны удовлетворять слѣдующему условію:

$$\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial n}{\partial x_i} \delta x_i + \frac{\partial n}{\partial y_i} \delta y_i + \frac{\partial n}{\partial z_i} \delta z_i \right) \geq 0 \dots \dots (562)$$

Когда координаты точекъ, удовлетворяя неравенству $n > 0$, дѣлаютъ функцію n равную какой-либо ничтожно-малой положительной величинѣ α , тогда варьации координатъ должны удовлетворять слѣдующему условію:

$$\delta n \geq (-\alpha).$$

Если же координаты точек, удовлетворяя неравенству $\epsilon > 0$, дѣлаютъ функцию ϵ равною какой-либо не малой положительной величинѣ, то варьаци координатъ не подлежатъ тогда никакому ограниченію со стороны этой неупрививающей связи.

G) Слѣдовательно, каждая неупрививающая связь, находясь въ состояніи напряженія, подчиняетъ варьаци координатъ связываемыхъ ею точекъ условію вида (562); это условіе можно еще представить такъ:

$$\sum_{i=1}^{i=n} \epsilon_i(P_i, a) \cos(P_i, a_i) \geq 0 \dots\dots\dots (562 \text{ bis})$$

Если положенія точекъ системы имѣющей n степеней свободы, выражаются помощью n независимыхъ координатныхъ параметровъ q_1, q_2, \dots, q_n , то варьаци послѣднихъ:

$$\delta q_1, \delta q_2, \dots, \delta q_n \dots\dots\dots (563)$$

независимы и произвольны, а возможные варьаци декартовыхъ координатъ точекъ выражаются слѣдующими линейными функциями варьаций (563):

$$\left. \begin{aligned} \delta x_i &= \frac{\partial x_i}{\partial q_1} \delta q_1 + \frac{\partial x_i}{\partial q_2} \delta q_2 + \dots + \frac{\partial x_i}{\partial q_n} \delta q_n \\ \delta y_i &= \frac{\partial y_i}{\partial q_1} \delta q_1 + \frac{\partial y_i}{\partial q_2} \delta q_2 + \dots + \frac{\partial y_i}{\partial q_n} \delta q_n \\ \delta z_i &= \frac{\partial z_i}{\partial q_1} \delta q_1 + \frac{\partial z_i}{\partial q_2} \delta q_2 + \dots + \frac{\partial z_i}{\partial q_n} \delta q_n \end{aligned} \right\} \dots\dots (564, 1)$$

гдѣ i есть каждое изъ чиселъ, 1, 2, \dots, n .

Если же число s координатныхъ параметровъ болѣе n , то тогда варьаци этихъ параметровъ связаны между собою ($s - n$) уравненіями линейными и однородными относительно этихъ варьаций; если уравненія, связывающія координатные параметры между собою, суть уравненія (540), приведенныя въ § 73-мъ, то возможные варьаци $\delta q_1, \delta q_2, \dots, \delta q_s$ должны удовлетворять слѣдующимъ ($s - n$) уравненіямъ:

Такимъ образомъ мы можемъ выставить слѣдующее положеніе:
Положеніе А. *Матерьяльныя точки, связанныя какими-либо удерживающими преградами и связями, получаютъ, вслѣдствіе дѣйствія приложенныхъ къ нимъ задаваемыхъ силъ, такія ускоренія, которыя удовлетворяютъ равенству (567) при всякихъ возможныхъ значеніяхъ варьяцій координатъ. Возможныя варьяціи координатъ точекъ суть весьма малыя величины $\delta x_1, \delta y_1, \delta z_1, \delta x_2, \delta y_2, \delta z_2, \dots, \delta x_n, \delta y_n, \delta z_n$, удовлетворяющія равенствамъ:*

$$\sum_{i=1}^{i=n} \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_i} \delta x_i + \frac{\partial v_1}{\partial y_i} \delta y_i + \frac{\partial v_1}{\partial z_i} \delta z_i \right) = 0 \dots (559, 1)$$

$$\sum_{i=1}^{i=n} \left(\frac{\partial v_2}{\partial x_i} \delta x_i + \frac{\partial v_2}{\partial y_i} \delta y_i + \frac{\partial v_2}{\partial z_i} \delta z_i \right) = 0 \dots (559, 2)$$

.....

$$\sum_{i=1}^{i=n} \left(\frac{\partial v_p}{\partial x_i} \delta x_i + \frac{\partial v_p}{\partial y_i} \delta y_i + \frac{\partial v_p}{\partial z_i} \delta z_i \right) = 0 ; \dots (559, p)$$

v_1, v_2, \dots, v_p суть первыя части уравненій:

$$v_1(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \dots, x_i, y_i, z_i, \dots, x_n, y_n, z_n, t) = 0 \dots (491, 1)$$

$$v_2(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \dots, x_i, y_i, z_i, \dots, x_n, y_n, z_n, t) = 0 \dots (491, 2)$$

.....

$$v_p(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \dots, x_i, y_i, z_i, \dots, x_n, y_n, z_n, t) = 0 \dots (491, p)$$

всѣхъ удерживающихъ преградъ и связей, связывающихъ матерьяльныя точки.

Примѣчаніе. Слѣдуетъ обратить вниманіе, что равенства (559) не заключаютъ частныхъ производныхъ:

$$\frac{\partial v_1}{\partial t}, \frac{\partial v_2}{\partial t}, \dots, \frac{\partial v_p}{\partial t}.$$

ибо разсматриваются въ формулахъ (559) не перемѣняющіяся, а постоянныя координаты точекъ въ данный моментъ времени (см. примѣчаніе стр. 380).

Если въ числѣ связей, связывающихъ точки системы, имѣются *неудерживающія связи*, находящіяся въ состоянн напряженія, то изъ уравненія (566) получается иное условіе.

Положимъ, что связи № 1 и 2 суть *неудерживающія*, а всѣ прочія — *удерживающія*, и что точки системы находятся въ такихъ положеніяхъ, координаты которыхъ удовлетворяютъ не только равенствамъ:

$$u_3 = 0, \quad u_4 = 0, \quad \dots \quad u_p = 0, \quad \dots \quad (491, 3, 4, \dots p)$$

но также и равенствамъ $u_1 = 0, u_2 = 0$; тогда возможные варьанціи координатъ должны удовлетворять равенствамъ:

$$\delta u_3 = 0, \quad \delta u_4 = 0, \quad \dots \quad \delta u_p = 0 \dots \quad (559, 3, 4 \dots p)$$

и кромѣ того, какъ слѣдуетъ изъ пункта (G) § 75-го, условіямъ

$$\delta u_1 \geq 0, \quad \delta u_2 \geq 0 \dots \dots \dots (568)$$

Принявъ во вниманіе, что множители $\lambda(u_1), \lambda(u_2)$, соответствующіе *неудерживающимъ связямъ*, не могутъ быть отрицательными (см. § 68), мы можемъ изъ равенства (566) заключить, что ускоренія, получаемыя точками системы, должны удовлетворять равенству (567) при всѣхъ тѣхъ возможныхъ варьанціяхъ координатъ, которыя удовлетворяютъ равенствамъ (559, 3), ..., (559, p) и равенствамъ (559, 1) (559, 2) и что тѣ же ускоренія должны удовлетворять неравенству:

$$\sum_{i=1}^{i=n} [(X_i - m_i x_i) \delta x_i + (Y_i - m_i y_i) \delta y_i + (Z_i - m_i z_i) \delta z_i] < 0 \quad (569)$$

при всѣхъ тѣхъ значеніяхъ возможныхъ варьанцій координатъ, которыя удовлетворяютъ равенствамъ (559, 3), ..., (559, p) и неравенствамъ:

$$\delta u_1 > 0, \quad \delta u_2 > 0.$$

Если тѣ же *неудерживающія связи* находятся въ состоянн ослабленія, то-есть, координаты точекъ удовлетворяютъ равенствамъ (491, 3, 4, ..., p) и неравенствамъ $u_1 > 0, u_2 > 0$, то тогда *неудерживающія связи* не могутъ оказывать реакцій, величины $\lambda(u_1), \lambda(u_2)$ равны нулю, а потому равенство (566) обратится въ равенство вида (567).

Хотя это равенство имѣетъ тотъ же самый видъ, какъ и равенство, полученное при предположеніи, что связи № 1 и 2 суть *удерживающія*,

но значенія заключающихся въ немъ возможныхъ варьаций координатъ теперь уже неѣе ограничены, а именно:

если точки системы столь мало сошли съ неударживающихъ связей, что координаты ихъ дѣлають функціи u_1 и u_2 весьма малыми положительными величинами α_1 и α_2 , то возможныя варьации координатъ должны удовлетворять условіямъ и равенствамъ:

$$\delta u_1 \geq (-\alpha_1), \delta u_2 \geq (-\alpha_2), \delta u_3 = 0, \dots, \delta u_r = 0; \dots \quad (570)$$

если же неударживающія связи ослабѣли настолько, что u_1 и u_2 суть не весьма малыя положительныя величины, то тогда возможныя варьации координатъ, заключающіяся въ равенствѣ (567), должны удовлетворять только равенствамъ (559, 3), ..., (559, p).

2 Мы увидимъ ниже, какое значеніе имѣетъ положеніе A и какую роль оно играетъ въ механикѣ; теперь же мы докажемъ, что одно равенство (567) заключаетъ въ себѣ неявнымъ образомъ всю совокупность дифференціальныхъ уравненій движенія системы точекъ, такъ что, еслибы мы и не знали еще этихъ дифференціальныхъ уравненій, а положеніе A было бы дано намъ въ качествѣ основного принципа механики, то изъ равенства (567) могли бы вывести всю совокупность дифференціальныхъ уравненій движенія системы точекъ.

При доказательствѣ мы будемъ основываться на нижеслѣдующей леммѣ.

Пусть $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ суть переменныя величины, могущія принимать всякія значенія, заключающіяся въ нѣкоторыхъ предѣлахъ: α — въ предѣлахъ $+\alpha_1$ и $(-\alpha_1)$, β — въ предѣлахъ $+\beta_1$ и $(-\beta_1)$, и т. д.; притомъ мы предполагаемъ, что эти переменныя въ сказанныхъ предѣлахъ произвольны и совершенно независимы одна отъ другой, т. е. мы можемъ дать произвольное значеніе величинѣ α , въ то же время произвольное значеніе величинѣ β , и т. д.

Пусть A, B, C, \dots, E суть какія-либо величины, не зависящія отъ $\alpha, \beta, \gamma, \dots$, или какія-либо функціи, не заключающія переменныхъ $\alpha, \beta, \gamma, \dots$.

Лемма. Для того, чтобы равенство:

$$A\alpha + B\beta + C\gamma + \dots + E\varepsilon = 0 \dots \dots \quad (571)$$

могло существовать при всяких значениях независимых и произвольных величин $\alpha, \beta, \gamma, \dots, \varepsilon$, необходимо, чтобы коэффициенты этих величин были порознь равны нулю, т.-е.:

$$A=0, B=0, C=0, \dots, E=0.$$

Въ самомъ дѣлѣ, такъ какъ величины $\alpha, \beta, \gamma, \dots, \varepsilon$ независимы и въ сказанныхъ предѣлахъ произвольны, то мы можемъ взять $\beta=0, \gamma=0, \dots, \varepsilon=0$, а α — произвольнымъ: такъ какъ равенство (571), получающее тогда видъ: $A\alpha=0$, должно имѣть мѣсто для всякихъ значений α , даже и не равныхъ нулю, то мы должны заключить, что $A=0$, и т. д.

а) Эта лемма можетъ быть непосредственно примѣнена къ равенству (567) въ томъ случаѣ, когда всѣ точки свободны, тогда всѣ 3и варьирій координатъ произвольны и независимы (см. пунктъ E въ § 75); онѣ входятъ линейнымъ и однороднымъ образомъ въ первую часть этого равенства и, конечно, не заключаются въ тѣхъ выраженіяхъ $(X_i - mx_i')$ и проч., на которыя онѣ помножены; слѣдовательно, эти варьиріи могутъ быть тогда разсматриваемы, какъ величины, означенныя чрезъ $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ въ леммѣ, и на основаніи этой леммы мы должны заключить, что равенство (567) распадается на 3и дифференціальныя уравненій (509) параграфа 64-го; это суть дифференціальныя уравненія движения системы свободныхъ точекъ.

б) Въ тѣхъ случаяхъ, когда точки системы связаны между собою связями, вышеприведенная лемма не можетъ быть примѣнена непосредственно къ равенству (567), потому что не всѣ варьиріи координатъ точекъ произвольны и независимы одна отъ другой; но можно первую часть этого равенства преобразовать такъ, что въ ней останутся только независимыя варьиріи и притомъ линейнымъ однороднымъ образомъ; къ преобразованному равенству лемма будетъ примѣнима.

Пусть, по прежнему, система состоитъ изъ n точекъ, связанныхъ p связями; число независимыхъ варьирій равно $n=(3n-p)$ (см. пунктъ (F) въ § 75-мъ).

Выбравъ n варьацийъ координатъ за независимыя и рѣшивъ уравненія (559, 1, 2 . . . p) относительно остальныхъ p варьацийъ, которыя мы назовемъ зависимыми, получимъ выраженія послѣднихъ въ видѣ линейныхъ однородныхъ функцій отъ независимыхъ варьацийъ; если въ равенствѣ (567) замѣнимъ зависимыя варьации полученными выраженіями, то первая часть его обратится въ однородную линейную функцію отъ n независимыхъ варьацийъ координатъ. Примѣнивъ къ преобразованному равенству вышеприведенную лемму, получимъ n дифференціальныя уравненій, заключающихъ: время, координаты и производныя отъ координатъ по времени, перваго и втораго порядка. 6). Можно исключить зависимыя варьации изъ равенства (567) и изъ уравненій (559, 1, 2, . . . p) другимъ путемъ, не рѣшая послѣднихъ уравненій, но пользуясь приѣмомъ, предложеннымъ Эйлериомъ и примѣненнымъ Лагранжемъ къ уравненіямъ механики.

Этотъ приѣмъ состоитъ въ слѣдующемъ: каждое изъ равенствъ (559, 1, 2, . . . p) помножается на нѣкоторый множитель (равенство (559, 1) — на множитель $\lambda(u_1)$, равенство (559, 2) — на множитель $\lambda(u_2)$, и т. д.); по умноженіи, эти равенства складываются съ равенствомъ (567), такъ что получается равенство:

$$\sum_{i=1}^{i=n} (A_i \delta x_i + B_i \delta y_i + C_i \delta z_i) = 0, \dots (566, \text{bis})$$

гдѣ

$$A_i = X_i - m_i x_i'' + \lambda(u_1) \frac{\partial u_1}{\partial x_i} + \lambda(u_2) \frac{\partial u_2}{\partial x_i} + \dots + \lambda(u_p) \frac{\partial u_p}{\partial x_i},$$

и проч.; множители $\lambda(u_1)$, $\lambda(u_2)$, . . . $\lambda(u_p)$ должны быть таковы, чтобы они обращали въ нуль коэффициенты зависимыхъ варьацийъ равенствъ (566, bis).

Послѣ этого въ равенствѣ (566, bis) останутся только независимыя варьации, а по вышеприведенной леммѣ и ихъ коэффициенты должны быть равны нулю; поэтому мы будемъ имѣть: p равенствъ, выражающихъ, что коэффициенты зависимыхъ варьацийъ равны нулю

и n равенствъ, выражающихъ, что коэффициенты независимыхъ варьаций равны нулю, всего— $3n$ равенствъ вида:

$$\left. \begin{aligned} 0 &= X_i - m_i x_i'' + \lambda(u_i) \frac{\partial u_i}{\partial x_i} + \dots + \lambda(u_p) \frac{\partial u_p}{\partial x_i} \\ 0 &= Y_i - m_i y_i'' + \lambda(u_i) \frac{\partial u_i}{\partial y_i} + \dots + \lambda(u_p) \frac{\partial u_p}{\partial y_i} \\ 0 &= Z_i - m_i z_i'' + \lambda(u_i) \frac{\partial u_i}{\partial z_i} + \dots + \lambda(u_p) \frac{\partial u_p}{\partial z_i} \end{aligned} \right\} \dots (517, \text{bis})$$

гдѣ i означаетъ каждое изъ чиселъ: 1, 2, 3, ..., n .

Полученныя равенства суть совокупныя дифференціальныя уравненія (517), составленныя въ параграфѣ 70-мъ.

3. Доказавъ, что изъ положенія (A) совокупныя дифференціальныя уравненія (517) § 70-го могутъ быть выведены, мы вправѣ смотрѣть на это положеніе, какъ на особую форму выраженія совокупности дифференціальныхъ уравненій движенія системы матеріальныхъ точекъ. Поэтому мы должны быть теперь увѣрены, что изъ равенства (567) можно получить тѣ же самыя результаты, какіе получимъ изъ дифференціальныхъ уравненій движенія, когда произведемъ надъ ними преобразованія, имѣющія цѣлю исключить множители λ или совершить перемѣну координатныхъ параметровъ; часто случается, что требуемыя результаты получаются изъ равенства (567) помощью менѣ сложныхъ дѣйствій, чѣмъ изъ самыхъ дифференціальныхъ уравненій.

Въ слѣдующихъ главахъ мы будемъ имѣть случаи неодноразно пользоваться равенствомъ (567) съ упомянутою цѣлю.

Для того же, чтобы теперь показать примѣръ подобнаго пользованія равенствомъ (567), приводимъ въ § 78-мъ выводъ Лагранжевыхъ уравненій изъ этого равенства; но такъ какъ въ этомъ и въ другихъ подобныхъ преобразованіяхъ мы встрѣчаемся съ выраженіями такими, какъ напримѣръ:

$$\frac{dx}{dt}, \delta x', \frac{\partial q_i}{\partial t}, \delta q_i',$$

то намъ придется предварительно ознакомиться съ ними въ слѣдующемъ 77-мъ параграфѣ.

§ 77. Варьяція скорости точки и скорость варьяціи движущейся точки.

Пусть вѣкторная движущаяся точка описываетъ траекторію $MM'M' \dots$ (черт. 43); M есть положеніе точки въ пространствѣ въ моментъ t , \overline{M} — положеніе ея въ моментъ t' , M' — въ моментъ t'' , и т. д.

Если положенія, занимаемыя разсматриваемою точкою въ пространствѣ, могутъ получать какія-либо варьяціи, то, сообщивъ варьяціи всѣмъ точкамъ траекторіи $MM'M' \dots$, мы произведемъ измѣненіе движенія разсматриваемой точки; это измѣненіе мы будемъ называть *варьяціею движенія* этой точки, а получаемое чрезъ варьяцію новое движеніе будемъ называть *измѣненнымъ*.

Пусть $M_1M_1'M_1'' \dots$ (черт. 43) есть траекторія измѣненнаго движенія, причемъ M_1 , M_1' , $M_1'' \dots$ суть положенія, занимаемыя движущеюся точкою въ моменты t , t' , $t'' \dots$ при этомъ измѣненномъ движеніи; длины $\overline{MM_1} = e$, $\overline{M'M_1'} = e'$, $\overline{M''M_1''} = e'' \dots$ суть варьяціи положеній M , M' , $M'' \dots$; вообще варьяція каждой точки первоначальной траекторіи есть весьма малая длина, проведенная изъ этой точки въ соотвѣтственную точку траекторіи измѣненнаго движенія.

Варьяціи точекъ первоначальной траекторіи могутъ быть приписаны или отнесены къ движущейся точкѣ и тогда можно сказать, что *варьяція движущейся точки* измѣняетъ свою длину и свое направленіе съ теченіемъ времени, то-есть, вмѣстѣ съ движеніемъ точки. Измѣненное движеніе можетъ быть разсматриваемо, какъ результатъ соединенія первоначальнаго движенія съ варьяціею движущейся точки.

Какъ первоначальное, такъ и измѣненное движенія должны обладать неотъемлемыми качествами движенія: непрерывностью и послѣдовательностью положеній точки (см. стр. 6 кинематической части); отсюда слѣдуетъ, что *варьяція движущейся точки* должна измѣнять свою длину и свое направленіе съ теченіемъ времени непрерывнымъ образомъ: въ остальныхъ отношеніяхъ варьяція произвольна.

Если изъ какой-либо неподвижной точки O (черт. 44) проведемъ длину, равную и параллельную варьяціи движущейся точки, то другой

конецъ этой дуги будетъ чертить непрерывную кривую линію $EE'E'', \dots$, которую можно назвать *годографомъ варьаціи движущейся точки*. (На чертежѣ 44-мъ проведены радіусы векторы OE, OE', OE'' , равные и параллельные длинамъ $\varepsilon, \varepsilon', \varepsilon''$).

Скорость точки, описывающей годографъ варьаціи, мы будемъ называть *скоростью варьаціи движущейся точки* и будемъ обозначать ее слѣдующимъ знакомъ: $v(\varepsilon)$. (На чертежѣ 44-мъ линія $EV(\varepsilon)$ изображаетъ величину и направленіе скорости варьаціи въ моментъ t).

Понятно, что въ измѣненномъ движеніи скорость движущейся точки отличается отъ скорости въ первоначальномъ движеніи (на чертежѣ 43-мъ изображены скорости того и другого движенія для момента t , а именно: линія MV изображаетъ скорость v движущейся точки въ моментъ t при первоначальномъ движеніи, а линія M, V_1 — скорость v_1 въ тотъ же моментъ при измѣненномъ движеніи). Геометрическую разность между скоростью измѣненнаго движенія и соотвѣтствующею скоростью первоначальнаго движенія мы будемъ называть *варьаціею скорости* и обозначать знакомъ $\varepsilon(v)$; конечно, соотвѣтствующія скорости суть тѣ, которыя относятся къ одному и тому же моменту времени, такъ что варьація скорости въ моментъ t есть геометрическая разность между скоростью v_1 въ моментъ t и скоростью v въ тотъ же моментъ:

$$\varepsilon(v) = v_1 - v \dots \dots \dots (572)$$

(На чертежѣ 43-мъ изъ точки M , проведена длина M, β , равная и параллельная скорости MV , поэтому длина βV_1 изображаетъ величину и направленіе варьаціи скорости въ моментъ t).

Можно доказать, что *скорость варьаціи движущейся точки равна и параллельна варьаціи скорости ея*, то-есть, что:

$$v(\varepsilon) = \varepsilon(v) \dots \dots \dots (573)$$

Для доказательства мы воспользуемся тѣмъ приѣмомъ, который мы употребили при доказательствѣ параллелограмма скоростей на стр. 208 кинематической части.

Проведемъ изъ точки M , (черт. 45) длину M, m' , равную и параллельную длинѣ MM' и проведемъ прямую изъ M , чрезъ точки M' и m' , и изъ m' чрезъ точку M' ; въ образовавшемся треугольникѣ M, M', m' сторона M, m' будетъ равна и параллельна хордѣ MM' и сторона m', M' равна и параллельна хордѣ EE' годографа варьаціи скорости.

Отложимъ по проведеннымъ прямымъ линіямъ слѣдующія длины, пропорціональныя сторонамъ вышесказаннаго треугольника:

$$\overline{M_1 A_1} = \frac{\overline{M, M'}}{\theta}, \quad \overline{M, A} = \frac{\overline{M, m'}}{\theta}, \quad m' Q = \frac{\overline{m' M'}}{\theta},$$

гдѣ $\theta = (t' - t)$; соединивъ точки A и A_1 прямою линіею, получимъ треугольникъ $M_1 A_1 A$, подобный треугольнику M, M', m' , а потому длина $A A_1$ равна и параллельна длинѣ $m' Q$.

Слѣдовательно, длина $m' Q$ имѣетъ величину и направленіе геометрической разности между длинами $M_1 A_1$ и M, A .

Уменьшая затѣмъ величину промежутка времени θ приближеніемъ момента t' къ моменту t и разсуждая такъ, какъ на стр. 209 кинематической части, мы заключимъ, что въ предѣлѣ (при неограниченномъ приближеніи θ къ нулю) длина $m' Q$ обращается въ длину $M_1 Q(\epsilon)$ (черт. 43), равную и параллельную скорости $EV(\epsilon)$ (черт. 44) годографа варьаціи, длина $M_1 A_1$ — въ скорость $\overline{M, V}$ измѣненнаго движенія и длина M, A — въ длину $\overline{M, \beta}$ (черт. 43), равную и параллельную скорости \overline{MV} первоначальнаго движенія; а такъ какъ длина $m' Q$ при всякихъ значеніяхъ θ равна и параллельна длинѣ $A A_1$, даже и тогда, когда t' совпадетъ съ t , то отсюда видно, что скорость варьаціи есть геометрическая разность между скоростью измѣненнаго и скоростью первоначальнаго движенія, т.-е., говоря короче: *скорость варьаціи равна и параллельна варьаціи скорости.*

Прежде чѣмъ извлечь слѣдствія изъ этой теоремы, мы должны обратить вниманіе на то обстоятельство, что варьація положенія точки можетъ быть также названа варьаціею радіуса вектора точки, такъ какъ ее можно разсматривать, какъ геометрическую разность

между радіусами векторами измѣненнаго и первоначальнаго положеній точки.

Знакъ δ , стоящій передъ какою-либо функціею отъ координатъ какихъ-либо точекъ, мы употребляемъ и будемъ употреблять для обозначенія приращенія, получаемаго значеніемъ этой функціи при варьированіи положеній этихъ точекъ; такъ, напримѣръ, δx или, что то же самое, $\delta(r \cos(r, X))$ означаетъ приращеніе, получаемое проеціею на ось X^{000} радіуса вектора точки при варьированіи положенія точки, т.-е., алгебраическую разность между проеціею радіуса вектора r , измѣненнаго положенія точки и проеціею радіуса вектора r начальнаго положенія ея, т.-е.:

$$\delta x = \delta(r \cos(r, X)) = r_1 \cos(r_1, X) - r \cos(r, X).$$

Если условимся обозначать варьацию положенія точки знакомъ $\varepsilon(r)$ (такъ какъ это есть варьация радіуса вектора), то равенства (561) параграфа 75-го получаютъ слѣдующій видъ:

$$\left. \begin{aligned} \delta x &= \delta(r \cos(r, X)) = \varepsilon(r) \cos(\varepsilon(r), X), \\ \delta y &= \delta(r \cos(r, Y)) = \varepsilon(r) \cos(\varepsilon(r), Y), \\ \delta z &= \delta(r \cos(r, Z)) = \varepsilon(r) \cos(\varepsilon(r), Z) \end{aligned} \right\} \dots (561, \text{bis})$$

(Вмѣсто $\varepsilon(r)$ мы будемъ иногда писать просто ε , по прежнему).

На основаніи этихъ замѣчаній изъ приведенной теоремы могутъ быть выведены слѣдующія заключенія.

1) Относительно проецій величинъ $\varepsilon(v)$ и $v(\varepsilon)$ на неподвижныя оси. Замѣнивъ въ равенствахъ (561, bis) радіусъ векторъ r — скоростью v , будемъ имѣть слѣдующія равенства:

$$\left. \begin{aligned} \delta x' &= \delta(v \cos(v, X)) = \varepsilon(v) \cos(\varepsilon(v), X) \\ \delta y' &= \delta(v \cos(v, Y)) = \varepsilon(v) \cos(\varepsilon(v), Y) \\ \delta z' &= \delta(v \cos(v, Z)) = \varepsilon(v) \cos(\varepsilon(v), Z) \end{aligned} \right\} \dots (574)$$

Съ другой стороны, проэція скорости $v(\varepsilon)$ на неподвижныя оси координатъ выражаются такъ:

$$\left. \begin{aligned} v(\varepsilon) \cos(v(\varepsilon), X) &= \frac{d[\varepsilon(r) \cos(\varepsilon(r), X)]}{dt} = \frac{d\delta x}{dt}, \\ v(\varepsilon) \cos(v(\varepsilon), Y) &= \frac{d[\varepsilon(r) \cos(\varepsilon(r), Y)]}{dt} = \frac{d\delta y}{dt}, \\ v(\varepsilon) \cos(v(\varepsilon), Z) &= \frac{d[\varepsilon(r) \cos(\varepsilon(r), Z)]}{dt} = \frac{d\delta z}{dt}. \end{aligned} \right\} \dots (575)$$

Такъ какъ $v(\varepsilon)$ равна и параллельна $\varepsilon(v)$, то и проэціи ихъ на какое бы то ни было направленіе равны между собою, а потому изъ равенствъ (574) и (575) слѣдуетъ:

$$\delta\left(\frac{dx}{dt}\right) = \frac{d\delta x}{dt}, \quad \delta\left(\frac{dy}{dt}\right) = \frac{d\delta y}{dt}, \quad \delta\left(\frac{dz}{dt}\right) = \frac{d\delta z}{dt} \dots (576)$$

2) Относительно проэціи величинъ $\varepsilon(v)$ и $v(\varepsilon)$ на направленіе, измѣняющееся одновременно съ движеніемъ точекъ,

Мы проведемъ это направленіе U черезъ начало координатъ и отложимъ на немъ, отъ начала же координатъ, длину равную единицѣ; точку, находящуюся на концѣ отложенной длины, мы обозначимъ чрезъ $M(U)$, радіусъ векторъ ея — чрезъ (l_U) и скорость ея знакомъ $v(l_U)$ или v_U .

Кромѣ того, мы еще предположимъ, что законъ вращенія направленія U подлежитъ варьированію; обозначимъ варьцію подвижной точки $M(U)$ или радіуса вектора (l_U) знакомъ $\varepsilon(l_U)$, или просто ε_U ; при этомъ мы должны имѣть въ виду, что длина радіуса вектора (l_U) остается постоянно равною единицѣ также и при варьированіи.

Проэція величинъ $\varepsilon(v)$ и $v(\varepsilon)$ на направленіе U равны между собою:

$$\varepsilon(v) \cos(\varepsilon(v), U) = v(\varepsilon) \cos(v(\varepsilon), U) \dots (577)$$

По формулѣ (14) стр. 30 кинематической части проэція скорости на вращающееся направленіе выражается такъ:

$$v(\varepsilon) \cos(v(\varepsilon), U) = \frac{d[\varepsilon(r) \cos(\varepsilon(r), U)]}{dt} = \varepsilon(r) v_U \cos(\varepsilon(r), v_U) (578)$$

Оъ другой стороны, проекція варьаци скорости на подвижное направление U можетъ быть выражена, съ помощью формулъ (574), такъ:

$$\varepsilon(v) \cos(\varepsilon(v), U) = \cos(U, X) \delta(v \cos(v, X)) + \\ + \cos(U, Y) \delta(v \cos(v, Y)) + \cos(U, Z) \delta(v \cos(v, Z)); \dots (579)$$

примѣнивъ равенства (561 bis) къ варьации точки $M(U)$ и принявъ во вниманіе, что радіусъ векторъ (1_σ) этой точки равенъ единицѣ, получимъ:

$$\delta(\cos(U, X)) = \varepsilon_U \cos(\varepsilon_U, X), \quad \delta(\cos(U, Y)) = \varepsilon_U \cos(\varepsilon_U, Y), \\ \delta(\cos(U, Z)) = \varepsilon_U \cos(\varepsilon_U, Z);$$

изъ этихъ равенствъ слѣдуетъ:

$$v \cos(v, X) \delta(\cos(U, X)) + v \cos(v, Y) \delta(\cos(U, Y)) + \\ + v \cos(v, Z) \delta(\cos(U, Z)) = v \varepsilon_U \cos(v, \varepsilon_U) \dots (580)$$

По ничтожной малости варьаций, алгебраическая варьация δ произведенія двухъ величинъ выражается, подобно дифференціалу произведенія, формулою:

$$\delta(\alpha\beta) = \alpha\delta\beta + \beta\delta\alpha,$$

а потому изъ формулъ (579) и (580) можемъ получить слѣдующую:

$$\varepsilon(v) \cos(\varepsilon(v), U) = \delta(v \cos(v, U)) - v \varepsilon_U \cos(v, \varepsilon_U) \dots (581)$$

Изъ равенствъ (577), (578) и (581) получаемъ слѣдующее равенство, которымъ мы воспользуемся въ послѣдующихъ главахъ:

$$\delta(v \cos(v, U)) = \frac{d(\varepsilon \cos(\varepsilon, U))}{dt} - \varepsilon_U \cos(r_U, \varepsilon) + v \varepsilon_U \cos(\varepsilon_U, v), (582)$$

здѣсь ε поставлено вмѣсто $\varepsilon(r)$.

3) Относительно величинъ δq_k и $\frac{d\delta q_k}{dt}$.

Положимъ, что какіе-либо координатные параметры q_1, q_2, \dots, q_n системы точекъ выражены функціями времени и декартовыхъ

координатъ системы; взявъ полную производную по времени отъ выраженія:

$$\delta q_k = \sum_{i=1}^{i=n} \left(\frac{\partial q_k}{\partial x_i} \delta x_i + \frac{\partial q_k}{\partial y_i} \delta y_i + \frac{\partial q_k}{\partial z_i} \delta z_i \right),$$

взявъ затѣмъ алгебраическую варьяцію δ отъ выраженія:

$$q'_k = \frac{\partial q_k}{\partial t} + \sum_{i=1}^{i=n} \left(\frac{\partial q_k}{\partial x_i} x'_i + \frac{\partial q_k}{\partial y_i} y'_i + \frac{\partial q_k}{\partial z_i} z'_i \right)$$

и сравнивъ полученные результаты, мы найдемъ, что, на основаніи равенствъ (576), должны имѣть мѣсто также слѣдующія равенства:

$$\delta \left(\frac{dq_k}{dt} \right) = \frac{d\delta q_k}{dt}, \dots \dots \dots (583, k)$$

гдѣ k есть каждое изъ чиселъ: 1, 2, 3, n .

§ 78. Выводъ дифференціальныхъ уравненій Лагранжа изъ равенства (567).

Члены равенства (567), заключающіе ускоренія, преобразуемъ слѣдующимъ образомъ:

$$m_i x_i'' \delta x_i = \frac{d(m_i x_i' \delta x_i)}{dt} - m_i x_i' \frac{d\delta x_i}{dt} = \frac{d(m_i x_i' \delta x_i)}{dt} - m_i x_i' \delta \left(\frac{dx_i}{dt} \right) =$$

на основаніи ср 576 стр. 394

Сдѣлавъ такое преобразование во всѣхъ подобныхъ членахъ этого равенства, замѣнимъ производныя отъ варьяцій δx_i , δy_i , δz_i — варьяціями: $\delta x'_i$, $\delta y'_i$, $\delta z'_i$, на основаніи равенствъ (576); тогда равенство (567) получитъ слѣдующій видъ:

$$\sum_{i=1}^{i=n} (X_i \delta x_i + Y_i \delta y_i + Z_i \delta z_i) + \delta T - \frac{dR}{dt} = 0, \dots (567, A)$$

гдѣ:

$$R = \sum_{i=1}^{i=n} m_i (x_i' \delta x_i + y_i' \delta y_i + z_i' \delta z_i).$$

$$\delta T = \frac{1}{2} \delta \sum_{i=1}^{i=n} m_i (\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2) = \sum_{i=1}^{i=n} m_i (\dot{x}_i \delta \dot{x}_i + \dot{y}_i \delta \dot{y}_i + \dot{z}_i \delta \dot{z}_i).$$

Замѣнимъ варьациі декартовыхъ координатъ выраженіями (564) § 75-го, а затѣмъ, въ выраженіи R , производныя отъ декартовыхъ координатъ по q_1, q_2, \dots, q_n замѣнимъ производными отъ x'_1, y'_1, z'_1 по q'_1, q'_2, \dots, q'_n , основываясь на формулахъ:

$$\frac{\partial x'_1}{\partial q_k} = \frac{\partial x_1}{\partial q_k}, \quad \frac{\partial y'_1}{\partial q_k} = \frac{\partial y_1}{\partial q_k}, \quad \frac{\partial z'_1}{\partial q_k} = \frac{\partial z_1}{\partial q_k},$$

выведенныхъ въ § 73-мъ; тогда равенство (567, А) получить слѣдующій видъ:

$$\sum_{k=1}^{k=n} Q_k \delta q_k + \delta T - \frac{d \sum_{k=1}^{k=n} p_k \delta q_k}{dt} = 0, \dots \dots (584)$$

гдѣ Q_k выражается формулами (532) § 73-го, а p_k есть частная производная отъ T по q'_k (см. (539) § 73); при этомъ предполагается, что T выражено формулою (535, а) § 73-го.

Затѣмъ развернемъ: выраженіе δT и производную по времени отъ суммы, заключающей величины p_k :

$$\begin{aligned} \delta T &= \sum_{k=1}^{k=n} \frac{\partial T}{\partial q_k} \delta q_k + \sum_{k=1}^{k=n} \frac{\partial T}{\partial q'_k} \delta q'_k \\ \frac{d \sum_{k=1}^{k=n} p_k \delta q_k}{dt} &= \sum_{k=1}^{k=n} \frac{dp_k}{dt} \delta q_k + \sum_{k=1}^{k=n} p_k \frac{d \delta q_k}{dt}; \end{aligned}$$

принявъ же во вниманіе равенства (583), найдемъ, что равенство (584) (то-есть (567)) получаетъ, послѣ всѣхъ этихъ преобразованій, слѣдующій видъ:

$$\sum_{k=1}^{k=n} \left(Q_k + \frac{\partial T}{\partial q_k} - \frac{dp_k}{dt} \right) \delta q_k = 0 \dots \dots (585)$$

Такъ какъ всѣ варьациі $\delta q_1, \delta q_2, \dots, \delta q_n$ произвольны и незави-

силы, то изъ равенства (585), на основаніи леммы, приведенной въ § 76-мъ, получимъ уравненія Лагранжа.

§ 79. Положенія равновѣсія системы матеріальныхъ точекъ. Уравненія равновѣсія силъ, приложенныхъ къ системѣ матеріальныхъ точекъ. Условія равновѣсія задаваемыхъ силъ.

1. Когда всѣ матеріальныя точки данной системы находятся одновременно въ такихъ положеніяхъ, что приложенныя къ каждой точкѣ задаваемыя силы и реакціи связей взаимно уравновѣшиваются, тогда говорятъ, что *система точекъ находится въ положеніи равновѣсія*.

Можно выразиться иначе: *когда ускоренія всѣхъ точекъ системы равны нулю, тогда система находится въ положеніи равновѣсія*; подъ словами «положеніе системы» мы подразумѣваемъ совокупность одновременныхъ положеній всѣхъ точекъ системы.

2. При такомъ положеніи системы, дифференціальныя уравненія движенія (517) § 70 обратятся въ совокупныя уравненія:

$$\left. \begin{aligned} 0 &= X_i + \lambda(u_1) \frac{\partial u_1}{\partial x_i} + \lambda(u_2) \frac{\partial u_2}{\partial x_i} + \dots + \lambda(u_p) \frac{\partial u_p}{\partial x_i} \\ 0 &= Y_i + \lambda(u_1) \frac{\partial u_1}{\partial y_i} + \lambda(u_2) \frac{\partial u_2}{\partial y_i} + \dots + \lambda(u_p) \frac{\partial u_p}{\partial y_i} \\ 0 &= Z_i + \lambda(u_1) \frac{\partial u_1}{\partial z_i} + \lambda(u_2) \frac{\partial u_2}{\partial z_i} + \dots + \lambda(u_p) \frac{\partial u_p}{\partial z_i} \end{aligned} \right\} \dots (586, i)$$

гдѣ i есть каждое изъ чиселъ: 1, 2, 3, n .

Эти уравненія, число которыхъ равно $3n$, т.-е., утроенному числу точекъ системы, называются *уравненіями равновѣсія силъ и реакцій, приложенныхъ къ матеріальнымъ точкамъ системы*.

Если число p связей менѣе утроеннаго числа точекъ системы, то, исключивъ изъ $3n$ уравненій (586) множители $\lambda(u_1), \lambda(u_2), \dots, \lambda(u_p)$, получимъ $n = 3n - p$ уравненій.

Эти новыя уравненія выражаютъ тѣ условія, которымъ должны удовлетворять задаваемыя силы для того, чтобы система точекъ могла

имѣть положеніе равновѣсія: поэтому мы будемъ называть эти n уравненій *условіями равновѣсія задаваемыхъ силъ*, приложенныхъ въ системѣ матеріальныхъ точекъ.

Если задаваемые силы выражаются функциями времени и координатъ точекъ, то изъ n условій равновѣсія и изъ p уравненій связей опредѣлятся, для каждаго момента времени, координаты всѣхъ точекъ въ положеніи равновѣсія системы; если опредѣленные такимъ образомъ значенія $3n$ координатъ окажутся независящими отъ времени, т.-е., постоянными, то выражаемое этими координатами положеніе равновѣсія системы можетъ быть также и положеніемъ ея покоя.

Подробному разсмотрѣнію положеній равновѣсія системы точекъ мы посвятимъ далѣе особую главу; но все то, что уже сказано и что будетъ сказано въ настоящей главѣ относительно положеній, уравненій и условій равновѣсія системы точекъ, необходимо для объясненія статическаго значенія дифференціальнаго уравненія движенія и равенства (567).

§ 80. Равенство, соединяющее въ себѣ всю совокупность уравненій равновѣсія.

Это равенство получится изъ равенства (567), если въ послѣднемъ положить равными нулю ускоренія всѣхъ точекъ системы; получимъ:

$$\sum_{i=1}^n (X_i \delta x_i + Y_i \delta y_i + Z_i \delta z_i) = 0 \dots \dots (567, b)$$

Такъ что, аналогично положенію (А) § 76-го, можемъ выставить слѣдующее:

Положеніе В. Система, состоящая изъ n матеріальныхъ точекъ, связанныхъ между собою p удерживающими связями: (491, 1), (491, 2) (491, p) (§ 76), находится въ положеніи равновѣсія при условіи, чтобы приложенныя къ точкамъ задаваемые силы удовлетворяли равенству (567, b) при всякихъ возможныхъ совокупностяхъ варьаций координатъ; каждая возможная совокупность варьаций координатъ должна удовлетворять равенствамъ (559, 1), (559, 2), (559, p) (§ 76).

Если некоторыя изъ связей — неудерживающія (положимъ, это суть связи №№ 1 и 2), то при тѣхъ положеніяхъ равновѣсія системы, при которыхъ неудерживающія связи находятся въ состояніи напряженія, задаваемыя силы должны удовлетворять равенству (567, b) при всѣхъ тѣхъ значеніяхъ возможныхъ варьцій координатъ, которыя удовлетворяютъ равенствамъ:

$$\delta u_1 = 0, \delta u_2 = 0, \delta u_3 = 0, \dots \delta u_r = 0.$$

Вмѣстѣ съ тѣмъ задаваемыя силы должны удовлетворять неравенству:

$$\sum_{i=1}^{r-n} (X_i \delta x_i + Y_i \delta y_i + Z_i \delta z_i) < 0 \dots \dots (569, b)$$

при всѣхъ тѣхъ значеніяхъ возможныхъ варьцій координатъ, которыя удовлетворяютъ условіямъ:

$$\delta u_1 > 0, \delta u_2 > 0, \delta u_3 = 0, \dots \delta u_r = 0.$$

Поступая такимъ же образомъ, какъ и въ § 76-мъ, мы убѣдимся, что изъ равенства (567, b) и положенія (B) можно вывести уравненія равновѣсія (586) или условія равновѣсія, смотря по желанію; поэтому можно смотрѣть на положеніе (B), какъ на особую форму выраженія уравненій или условій равновѣсія. Впослѣдствіи мы будемъ пользоваться равенствомъ (567, b) и будемъ извлекать изъ него тѣ же самые результаты, какіе получаются изъ уравненій равновѣсія.

§ 81. Такъ называемыя начала: возможныхъ перемѣщеній и д'Аламбера.

Обращаясь теперь къ общепринятому толкованію равенствъ (567, b), (567) и дифференціальныхъ уравненій движенія (517), должно сдѣлать оговорку, что эти толкованія имѣютъ, въ нѣкоторыхъ пунктахъ, нѣсколько метафизическій характеръ.

Замѣнивъ варьціи координатъ выраженіями (561) § 75-го и означивъ черезъ F_i равнодѣйствующую задаваемымъ силамъ, приложеннымъ къ точкѣ m_i , можемъ выразить равенство (567, b) такъ:

$$\sum_{i=1}^{r-n} \varepsilon_i F_i \cos(F_i, \varepsilon_i) = 0; \dots \dots \dots (567, c)$$

закрывающіяся здѣсь возможныя варіаціи e_1, e_2, \dots, e_n положеній точекъ должны удовлетворять равенствамъ (559, 1, bis), (559, 2, bis), (559, p, bis) (§ 75).

2 Матеріальныя точки, образующія систему, могутъ совершать весьма различныя движенія при прохожденіи черезъ занимаемыя ими положенія; пусть Ds_1, Ds_2, \dots, Ds_n суть элементы путей, пробѣгаемые точками въ теченіе ничтожно-малаго промежутка времени δ при какомъ-либо возможномъ движеніи системы черезъ занимаемое ею положеніе; эти элементы путей, которые мы будемъ называть *возможными перемѣщеніями точекъ*, должны удовлетворять слѣдующимъ равенствамъ:

$$Du_1 = 0, Du_2 = 0, \dots, Du_p = 0, \dots \quad (587)$$

гдѣ: $F_1, F_2, \dots, F_p, \dots$ — силы, действующія на точки системы.

$$Du_k = \sum_{i=1}^{n-m} Ds_i (P_{ik}) \cos(P_{ik}, Ds_i) + \frac{\partial u_k}{\partial t} \delta.$$

Сравнивъ эти равенства съ равенствами (559, bis) § 75-го, можемъ судить, что если уравненія *всѣхъ связей*, которымъ подчинена система точекъ, не заключаютъ времени явнымъ образомъ, то *всѣ* возможныя варіаціи положеній точекъ могутъ служить возможными перемѣщеніями ихъ и обратно.

Положимъ, что въ самомъ дѣлѣ уравненія *всѣхъ связей* системы не заключаютъ времени, тогда въ равенствѣ (567, с) варіаціи могутъ быть замѣнены перемѣщеніями и равенство это получить такой видъ:

$$\sum_{i=1}^{n-m} F_i Ds_i \cos(F_i, Ds_i) = 0 \quad (567, d)$$

Каждый изъ членовъ первой части этого равенства выражаетъ величину работы задаваемыхъ силъ, приложенныхъ къ одной изъ точекъ системы, на протяженіи возможнаго перемѣщенія этой точки (см. § 25, стр. 107), а потому въ сказанныхъ случаяхъ положеніе (В) можетъ быть высказано въ слѣдующей формѣ:

Положеніе (В, 1). Если система n матеріальныхъ точекъ,

связанных р удерживающими независимыми отъ времени связями, находится въ положеніи равновѣсія и совершаетъ какое-либо возможное движеніе, то сумма работъ задаваемыхъ силъ на протяженіи ничтожно-малыхъ возможныхъ перемѣщеній точекъ равна нулю, каково бы ни было возможное движеніе системы и каковы бы ни были возможные перемѣщенія; всякая совокупность одновременныхъ возможныхъ перемѣщеній точекъ системы удовлетворитъ слѣдующимъ равенствамъ:

$$\sum_{i=1}^{i=n} Ds_i(P_{i,s_1}) \cos (P_{i,s_1}, Ds_i) = 0. \dots (588, 1)$$

$$\sum_{i=1}^{i=n} Ds_i(P_{i,s_2}) \cos (P_{i,s_2}, Ds_i) = 0. \dots (588, 2)$$

.....

$$\sum_{i=1}^{i=n} Ds_i(P_{i,s_p}) \cos (P_{i,s_p}, Ds_i) = 0. \dots (588, p)$$

Обратно, всякое положеніе системы, при которомъ задаваемые силы удовлетворяютъ равенству (567, d) при всякихъ значеніяхъ возможныхъ перемѣщеній (удовлетворяющихъ равенствамъ (588)), есть положеніе равновѣсія.

Если въ числѣ связей есть неудерживающія связи, то, для тѣхъ возможныхъ перемѣщеній, при которыхъ точки системы сходятъ съ одной или съ нѣсколькихъ связей, сумма работъ задаваемыхъ силъ должна быть менѣе нуля, когда положеніе системы есть положеніе равновѣсія.

Это положеніе извѣстно подъ именемъ начала возможныхъ перемѣщеній. Оно носитъ названіе «начала» или «принципа» потому, что, принявъ его за основаніе въ качествѣ основнаго начала механики, можно изъ него вывести уравненія равновѣсія системы точекъ, связанныхъ удерживающими независимыми отъ времени связями, а слѣдовательно и всю статику такихъ системъ.

Существованіе этого принципа было впервые подмѣчено въ теоріи простыхъ машинъ: рычага, блоковъ, ворота и наклонной плоскости, гдѣ этотъ принципъ почти очевиденъ, если не принимать въ расчетъ тренія и разсматривать простые механизмы, какъ идеальныя связи; но нельзя утверждать, чтобы этотъ принципъ былъ самъ по себѣ, безъ доказательства, очевиденъ для всякихъ связей, не зависящихъ отъ времени. Поэтому въ тѣхъ курсахъ и сочиненіяхъ по механикѣ, въ которыхъ начало возможныхъ перемѣщеній выставляется какъ основное положеніе статики системы несвободныхъ точекъ, является надобность доказать это начало независимо отъ общихъ уравненій равновѣсія системы; извѣстны многія такія доказательства, придуманныя различными авторами; они состоятъ, по большей части, или въ томъ, что предполагаемыя связи замѣняются другими простѣйшими связями, для которыхъ начало возможныхъ перемѣщеній очевидно, или въ томъ, что, чрезъ присоединеніе новыхъ простѣйшихъ связей, система точекъ приводится къ системѣ простыхъ машинъ. Въ слѣдующемъ параграфѣ будутъ приведены авторомъ изъ доказательствъ подобнаго рода.

Если уравненія связей заключаютъ время, то равенства (587) отличаются отъ равенствъ (559), а потому тогда возможны совокупности варьаций положеній точекъ не могутъ служить возможными перемѣщеніями точекъ.

Напримѣръ, возможные варьации положеній точекъ m_1 и m_2 , связанныхъ связью, упомянутою на стр. 307, должны удовлетворять равенству:

$$\varepsilon_1 \cos(r_{21}, \varepsilon_1) - \varepsilon_2 \cos(r_{21}, \varepsilon_2) = 0,$$

между тѣмъ, какъ возможные перемѣщенія этихъ точекъ должны удовлетворять равенству:

$$Ds_1 \cos(r_{21}, Ds_1) - Ds_2 \cos(r_{21}, Ds_2) + (l_0 - L) ke^{kt} = 0,$$

а потому не можетъ быть, чтобы ε_1 равнялось Ds_1 и, въ то же время, ε_2 было равно Ds_2 .

Въ этихъ случаяхъ правильнѣе было бы называть положеніе (B) на-

чадомъ возможныхъ варьаций положеній точекъ; оно можетъ быть выражено слѣдующимъ образомъ:

Положение В. Если система и матеріальныхъ точекъ, связанныхъ p удерживающими связями, находится въ положеніи равновѣсія, то сумма работъ задаваемыхъ силъ на протяженіи ничтожно-малыхъ возможныхъ варьаций положеній точекъ равна нулю, каковы бы ни были возможные варьации; всякая совокупность возможныхъ варьаций положеній точекъ удовлетворяетъ равенствамъ: (559, 1, bis), (559, 2, bis) ... (559, p , bis).

Обратно, всякое Γ положеніе системы, удовлетворяющее равенству (567, c) при всякихъ значеніяхъ возможныхъ варьаций положеній точекъ, есть положеніе равновѣсія.

Въ параграфѣ 62-мъ на стр. 320—321 было упомянуто, что геометрическія разности u_1, u_2, \dots, u_n между каждыми двумя совокупностями возможныхъ скоростей точекъ должны удовлетворять равенству (505); точно также геометрическія разности между двумя совокупностями возможныхъ перемѣщеній точекъ системы удовлетворяютъ тѣмъ же самымъ равенствамъ (559), которымъ удовлетворяютъ возможные варьации положеній; поэтому послѣднія могутъ быть названы геометрическими разностями между возможными перемѣщеніями точекъ системы.

На иностранныхъ языкахъ, начало возможныхъ перемѣщеній называется такъ. Le principe des vitesses virtuelles, das Princip der virtuellen Geschwindigkeiten, the principle of virtual velocities, въ слѣдующемъ параграфѣ будетъ объяснено происхожденіе этого термина и значеніе его.

Говоря о положеніи равновѣсія системы матеріальныхъ точекъ, мы можемъ выразиться такимъ образомъ:

При положеніи равновѣсія системы матеріальныхъ точекъ задаваемыя силы, приложенныя къ системѣ, взаимно-уравновѣшиваются чрезъ посредство реакцій связей.

Такую форму выраженія мы будемъ употреблять, когда найдемъ нужнымъ, взаимѣнъ того выраженія, которое помѣщено въ началѣ этого параграфа.

Обращаемся теперь къ толкованію дифференціальныхъ уравненій движенія въ смыслѣ уравненій равновѣсія.

Вообразимъ себѣ, что въ каждой матеріальной точкѣ, кромѣ задаваемыхъ силъ и реакцій связей, приложена сила, прямопротивоположная ускоренію ея и равная произведенію изъ массы точки на ускореніе ея; эту воображаемую силу называютъ *силою инерціи*; проекціи на оси ко-

ординатъ силы инерціи J_i , которую мы воображаемъ себѣ приложенною къ точкѣ m_i , суть:

$$\left. \begin{aligned} J_i \cos(J_i, X) &= -m_i \frac{d^2x_i}{dt^2} \\ J_i \cos(J_i, Y) &= -m_i \frac{d^2y_i}{dt^2} \\ J_i \cos(J_i, Z) &= -m_i \frac{d^2z_i}{dt^2} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (589, 1)$$

Вообразивъ себѣ такія силы и сравнивъ дифференціальныя уравненія движенія (517, bis) стр. 389 съ уравненіями равновѣсія (586) стр. 393, можемъ придти къ мысли разсматривать дифференціальныя уравненія движенія, какъ уравненія равновѣсія силъ: задаваемыхъ, реакцій связей и силъ инерціи; въ самомъ дѣлѣ, дифференціальныя уравненія движенія точки m_i выражаютъ, что *равнодѣйствующая F , вѣсъ задаваемыхъ силъ, приложенныхъ къ этой точкѣ, равнодѣйствующая R , реакцій вѣсхъ тѣхъ связей, которымъ подчинена эта точка, и сила инерціи J_i этой точки взаимно уравновѣшиваются*, т.-е.:

$$\bar{F}_i + J_i + R_i = 0 \dots \dots \dots (517, B)$$

Примѣчаніе. Фиктивную силу инерціи не должно смѣшивать со свойствами инерціи матеріи.

Воображаемая сила D_i , равная и прямопротивоположная силѣ инерціи, называется *движущею* или *эффективною силою* (Effectivkraft), а сила Π_i , равная и прямопротивоположная равнодѣйствующей R , реакцій связей, называется *потерянною силою*.

Уравненія (517, bis) стр. 389 можно еще выразить такъ:

$$F_i = D_i + \Pi_i, \dots \dots \dots (517, C)$$

т.-е., *равнодѣйствующая вѣсхъ задаваемыхъ силъ, приложенныхъ къ каждой изъ материальныхъ точекъ системы, разлагается на двѣ составляющія: на потерянную силу, которая уравновѣшивается съ реакціями связей, и на движущую силу, которая сообщаетъ материальной точкѣ то самое ускореніе, какое бы она сообщила свободной точкѣ той же массы.*

Кромѣ того, уравненія (517, bis) можно еще представить такъ:

$$\Pi_i + R_i = 0, \dots \dots \dots (517, D)$$

потому что геометрическая разность между силою F_i и движущею силою есть сила потерянная, т.-е.:

$$\left. \begin{aligned} X_i - m_i \ddot{x}_i &= P_i \cos(P_i, X) \\ Y_i - m_i \ddot{y}_i &= P_i \cos(P_i, Y) \\ Z_i - m_i \ddot{z}_i &= P_i \cos(P_i, Z) \end{aligned} \right\} \dots (590, i)$$

а уравненія равновѣсія (586) можно представить такъ:

$$\overline{F}_i + \overline{R}_i = 0 \dots (586, D)$$

Сравнивъ выраженія (517, D) съ выраженіями (586, D) и припомнивъ послѣднюю форму словеснаго выраженія уравненій равновѣсія, а именно слѣдующую: „при положеніи равновѣсія системы матерьяльныхъ точекъ, задаваемые силы, приложенныя къ системѣ, взаимно уравновѣшиваются чрезъ посредство реакцій связей“, можемъ сказать слѣдующее относительно движенія системы точекъ:

Положеніе A_1 . *Во всякій моментъ движенія системы матерьяльныхъ точекъ, потерянные силы всѣхъ точекъ взаимно уравновѣшиваются чрезъ посредство реакцій связей.*

Это положеніе, данное д'Аламберомъ въ его *Traité de Dynamique* (1743), называется *началомъ или принципомъ д'Аламбера*. Изъ соединенія начала д'Аламбера съ началомъ возможныхъ варьяцій или перемѣщеній получается положеніе A , изъ котораго могутъ быть выведены дифференціальныя уравненія движенія системы точекъ, какъ было показано въ § 76-мъ.

§ 82. Нѣкоторыя свѣдѣнія относительно исторіи открытія начала возможныхъ перемѣщеній и нѣкоторые способы непосредственнаго доказательства этого начала.

Несомнѣнно, что практическое знаніе статики и употребленіе нѣкоторыхъ простыхъ машинъ были извѣстны въ глубокой древности; объ этомъ свидѣлствуютъ съ одной стороны нѣкоторыя указанія древнихъ авторовъ, съ другой — остатки громаднхъ и искусно возведенныхъ построекъ древняго Египта, Индіи и древней Греціи, при возведеніи которыхъ необходимо было доставлять издалека и поднимать на большія высоты огромныя сплошныя массы, что не могло быть выполнено безъ посредства механическихъ приспособленій.

Сомнительно, однако, чтобы въ древности существовала правильная теорія статики; по крайней мѣрѣ правильныя теоретическія разсужденія въ первый разъ встрѣчаются только у Архимеда.

По этой причинѣ сочиненія Архимеда считаются древнѣйшими сочиненіями по механикѣ и его называютъ основателемъ этой науки; однако, дошедшіе до насъ остатки сочиненій этого великаго геометра относятся только къ статикѣ (теорія рычага, равновѣсіе плавающихъ тѣлъ, положенія центровъ инерціи однородныхъ площадей).

Первые слѣды изученія вопросовъ динамики встрѣчаются въ первый разъ 17 столѣтіи спустя послѣ Архимеда, а именно въ трудахъ знаменитаго художника Леонардо-да-Винчи (родившагося въ 1452 году), который вполне правильно понималъ нѣкоторые изъ законовъ паденія тѣлъ по наклонной плоскости и законъ возрастанія скорости при этомъ или при свободномъ паденіи ¹⁾. Повидимому Италия въ XV и XVI столѣтіяхъ была мѣстомъ рожденія динамики и возрожденія механики. Бенедетти, умершій въ 1570 году, уже зналъ, что скорость, приобретаемая свободно-падающимъ тѣломъ, не зависитъ отъ массы тѣла; онъ зналъ также о существованіи центробѣжной силы и о томъ, что оторвавшаяся отъ вращающагося тѣла часть его продолжаетъ двигаться по касательной; ему же принадлежитъ первое опредѣленіе понятія о моментѣ вокругъ оси (*virtus motuena*) ²⁾. Открытіе начала возможныхъ перемѣщеній принадлежитъ, по словамъ Лагранжа ³⁾, вѣроятно Гвидо Убалди ⁴⁾ (1545—1607), который подмѣтилъ это начало въ рычагѣ и въ подвижныхъ блокахъ и показалъ, что, основываясь на этомъ принципѣ, можно вывести законы равновѣсія рычага, блоковъ и вѣрота. Галилей (1564—1642) ⁵⁾ распро-

¹⁾ Почерпнуто изъ сочиненія Дюринга: *Kritische Geschichte der allgemeinen Principien der Mechanik*. Düring. 1872; Дюрингъ же ссылается (стр. 13—16) на сочиненія:

Venturi, *Essai sur les ouvrages physico-mathématiques de Leonard de Vinci*. Paris, 1797.

Libri, *Histoire des sciences mathématiques en Italie*, 4 vols. Paris, 1838—41.

²⁾ Также изъ сочиненія Дюринга, который цитируетъ (стр. 17): Benedetti *Divers. speculat.* Taurini, 1585.

³⁾ *Mécanique Analytique* par Lagrange стр. 18, тома 1-го, третьяго изданія.

⁴⁾ Guido Ubaldi marquis del Monte, *Mechanicorum liber*. Pisauri. 1577.

⁵⁾ Главнѣйшія сочиненія Галилея по механикѣ суть:

Discorsi intorno alle cose che stanno in su l'acqua o che in quello si muovono. 1612 (по гидромеханикѣ).

Dialogo intorno ai due massimi sistemi del mondo. 1632.

Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze. 1638.

странить это начало на остальные простые машины, основанные на принципе наклонной плоскости, и рассматривать его как основной принципъ законовъ равновѣсія всѣхъ машинъ (во 2-мъ предложеніи III-го діалога сочиненія: *Discorsi e dimostrazioni intorno a due nuove scienze*, 1638 и въ сочиненіи: *Della scienza meccanica*).

Галилея называютъ основателемъ динамики; ему мы обязаны открытіемъ начала инерціи, изслѣдованіями надъ паденіемъ тѣлъ, открытіемъ законовъ движенія свободно-падающихъ тѣлъ и тѣлъ, брошенныхъ наклонно къ горизонту, открытіемъ начала независимости движеній, изслѣдованіемъ паденія тѣлъ по наклонной плоскости, открытіемъ соотношеній между длинами и временами качаній маятниковъ; кроме того, изъ трудовъ его по статикѣ замѣчательны дополненіе къ Архимедову доказательству принципа рычага, статика тяжелаго тѣла на наклонной плоскости и гидромеханика, основанная на началѣ возможныхъ перемѣщеній.

Начало возможныхъ перемѣщеній въ примѣненіи къ двумъ силамъ, взаимно-уравновѣшивающимся чрезъ посредство какого-либо простаго механизма, выражено Галилеемъ въ формѣ положенія, что моменты обѣихъ силъ при равновѣсіи системы должны быть равны по величинѣ и противоположны по знаку. Подъ словомъ „моментъ“ (*momentum*, *movimentum*) Галилей подразумѣваетъ (какъ объясняютъ тѣ, которые толкуютъ его сочиненія) произведеніе изъ силы и провѣдѣнія возможной скорости на направленіе силы: это значеніе слова „моментъ“ было удержано Вальисомъ въ его механикѣ, изданной въ 1669 году, въ которой статика механизмовъ также выводится изъ начала возможныхъ перемѣщеній.

Слѣдуетъ, однако, замѣтить, что до Галилея понятіе о величинѣ силы не было еще установлено и поэтому онъ затруднялся дать сжатое и вполне ясное понятіе о значеніи того, что онъ подразумѣваетъ подъ словомъ „моментъ“; взаимныя опредѣленія, котораго онъ дать не могъ, Галилей поясняетъ этотъ терминъ нѣсколькими другими наименованіями, которыя впоследствии, по почину различныхъ авторовъ, въ свою очередь сдѣлались терминами, напримѣръ, въ 3-мъ дѣѣ *Discorsi* встрѣчаемъ слѣдующую фразу: „*l'impeto il talento, l'energia, o vogliamo dire il momento del discendere*“.

Della scienza meccanica; это сочиненіе издано на итальянскомъ языкѣ семь лѣтъ спустя послѣ смерти Галилея, но раньше, въ 1634 году, оно появилось въ переводѣ на французскій языкъ: *Mersenne, Les mécaniques de Galilée. Paris.*

Обобщеніе начала возможныхъ перемѣщеній на всякія системы матеріальныхъ точекъ было указано Иваномъ Бернулли (въ письмѣ къ Варингону) въ 1717 году *), который выразилъ его въ слѣдующей формѣ. „Если какія либо силы приложены какимъ-либо образомъ и дѣйствуютъ посредственно или непосредственно, то равновѣсіе будетъ имѣть мѣсто въ томъ случаѣ, если сумма положительныхъ энергій равняется суммѣ отрицательныхъ. Подъ энергіей надо подразумѣвать произведеніе изъ силы и проэкции перемѣщенія на направление силы; притомъ надо считать энергію положительною или отрицательною, смотря по знаку проэкции“.

Терминъ „vitesse virtuelle“ введенъ Ив. Бернулли; прилагательное „virtuel“ происходитъ отъ латинскаго „virtus“, равнозначущаго итальянскому „talento“, что значить *способность, мочь*, это прилагательное выражаетъ, что *vitesse virtuelle* есть принадлежность, составная часть момента. Слово „возможный“ не есть точный переводъ слова *virtuel*; точный переводъ термина Бернулли былъ бы: „скорость, входящая въ составъ момента“.

Наиболѣе обширное и многостороннее развитіе начала возможныхъ перемѣщеній мы находимъ въ аналитической механикѣ Лагранжа, въ которой всѣ уравненія статики, динамики и гидромеханики выводятся изъ этого начала и начала д'Аламбера. Эта книга, появившаяся въ первый разъ въ 1788 году **), есть самое капитальное сочиненіе по механикѣ и не утратила своей новизны даже и до нашихъ дней; можно сказать съ полною увѣренностью, что къ механикѣ Лагранжа прибавлено до настоящаго времени весьма немногое.

Такъ какъ начало возможныхъ перемѣщеній не настолько очевидно, чтобы можно было принять его безъ доказательства, то Лагранжъ, въ первомъ отдѣлѣ своей книги, приводитъ одно изъ двухъ своихъ доказательствъ этого начала, это доказательство мы здѣсь сообщаемъ.

Идея этого доказательства заключается въ замѣтѣ всѣхъ взаимно-уравновѣшивающихся задаваемыхъ силъ F_1, F_2, \dots, F_n реакціями особой связи, состоящей изъ одной нити, обходящей систему сложныхъ блоковъ и натягиваемой вѣсомъ одного груза; при этомъ предполагается,

*, Это письмо помѣщено въ книгѣ *Nouvelle mécanique*. P. Varignon. Paris, 1725.

**) Книга эта состоитъ изъ двухъ частей: статики съ гидростатикою и динамики съ гидродинамикою; первые главы статики, гидростатики, динамики и гидродинамики заключаютъ въ себѣ весьма подробное изложеніе значенія и историческаго развитія разныхъ принциповъ механики.

что все связи суть идеальны, что на блоках нить трения, что нить не обладает жесткостью и что натяжение ее одинаково по всей длине.

Примѣчаніе. Натяжение нити въ какомъ-либо ея сѣченіи есть равнодѣйствующая всѣхъ молекулярныхъ силъ, которыя дѣйствуютъ изъ частицъ, находящихся по одну сторону сѣченія, на частицы, находящіяся по другую сторону его; если дѣйствительно разрѣзать нить по этому сѣченію (перпендикулярно къ длинѣ нити), то, чтобы образовавшіяся оконечности нити не отдѣлились другъ отъ друга, придется къ каждой изъ этихъ оконечностей приложить по силѣ; обѣ силы будутъ равны, прямопротивоположны и перпендикулярны къ сѣченію; каждая изъ этихъ силъ представляетъ величину натяженія нити въ рассматриваемомъ сѣченіи —

Предположимъ, что величины силъ F_1, F_2, \dots, F_n находятся въ соотносимыхъ отношеніяхъ между собою, такъ что можно подобрать силу P , которая въ цѣлое число k_1 разъ меньше силы F_1 , вмѣстѣ съ тѣмъ въ цѣлое число k_2 разъ меньше силы F_2 , и т. д.:

$$F_1 = k_1 P, \quad F_2 = k_2 P, \quad \dots \quad F_n = k_n P.$$

Затѣмъ представимъ себѣ механизмъ, состоящій изъ n полиспастовъ, то-есть изъ n системъ подвижныхъ блоковъ и n системъ неподвижныхъ блоковъ; блоки каждой системы сидятъ свободно на одной оси, вокругъ которой они могутъ вращаться независимо другъ отъ друга. Къ осямъ подвижныхъ системъ блоковъ прикрѣплены матерьяльныя точки: къ оси M_1 (черт. 46) прикрѣплена точка m_1 , къ оси M_2 — точка m_2 , и т. д. Оси неподвижныхъ системъ блоковъ прикрѣплены на направленіяхъ силъ F_1, F_2, \dots , а именно: ось A_1 прикрѣплена на продолженіи силы F_1 , ось A_2 — на направленіи силы F_2 , и т. д.

Далѣе, представимъ себѣ, что къ оси M_1 прикрѣпленъ одинъ конецъ тонкой, гибкой и нерастяжимой нити, которая затѣмъ обходитъ по одному разу всѣ блоки всѣхъ полиспастовъ; число блоковъ на каждой оси и расположение нити таковы, что нить между M_1 и A_1 проходитъ k_1 разъ, между M_2 и A_2 проходитъ k_2 разъ, и т. д.; наконецъ, обойдя всѣ блоки, нить свѣшивается съ послѣдняго неподвижнаго блока внизъ, поддерживая грузъ, вѣсъ котораго равенъ P .

На чертѣ 46-мъ изображена система полиспастовъ для трехъ точекъ m_1, m_2, m_3 , гдѣ $k_1 = 5$, $k_2 = 4$, $k_3 = 2$; надо замѣтить, что нить при переходѣ отъ одного полиспаста къ другому, должна сходиться съ неподвижнаго блока и направляться къ неподвижному же блоку другого

полипаста; такъ и проведены части B_1 и B_2 на чертежѣ 46-мъ; если бы мы провели часть B_1 къ одному изъ блоковъ, сидящихъ на оси M_2 , то это было бы ошибкою въ конструкции механизма.

Радиусы всѣхъ блоковъ должны быть ничтожно-малы; на черт. 46-мъ блокамъ приданы конечныя размыры и радиусамъ блоковъ, сидящихъ на одной оси, даны неодинаковые радиусы; это сдѣлано только для наглядности чертежа.

Понятно, что послѣ введенія этого механизма силы F_1, F_2, \dots должны быть отняты, такъ какъ грузъ P черезъ посредство нити и полипастовъ, тянетъ точку M , къ точкѣ A , съ силою $k_1 P$, точку M_2 къ точкѣ A_2 съ силою $k_2 P$, и т. д.

Для того, чтобы система точекъ m_1, m_2, \dots при дѣйствіи натяженій, взаимныхъ силы F_1, F_2, \dots и при дѣйствіи реакцій тѣхъ связей, которыми она подчинена, могла находиться въ положеніи равновѣсія, необходимо, чтобы грузъ P , стремясь опуститься внизъ и сдвинуть съ мѣста точки m_1, m_2, m_3, \dots , побуждалъ ихъ получить только невозможныя перемѣщенія; но это требованіе равносильно условію, чтобы при возможныхъ перемѣщеніяхъ грузъ не опускался. Выразимъ это условіе формулою.

Пусть $\varepsilon_1 = M_1 E_1$ (черт 46), $\varepsilon_2 = M_2 E_2, \dots$ суть варьяціи положеній или ничтожно-малыя перемѣщенія точекъ. Если направленіе перемѣщенія точки составляетъ острый уголъ съ направленіемъ силы F (какъ напримѣръ въ точкахъ M_2 и M_1 на чертежѣ 46-мъ), то разстояніе EA между новымъ положеніемъ точки m и точкою A будетъ менѣе первоначальнаго разстоянія на длину $(AM - AE)$, но эта длина развится на величину высшаго порядка малости отъ длины MC (смъ въ точкахъ M_1 и M_2 на чертежѣ 46-мъ), гдѣ C есть основаніе перпендикуляра, опущеннаго изъ точки E на направленіе MA .

Вслѣдствіе этого сумма длинъ нитей между точками M_2 и A_2 уменьшится на длину

$$k_2(\overline{M_2 C_2}) = k_2 \varepsilon_2 \cos(\varepsilon_2, F_2)$$

и если бы всѣ остальныя точки не получили никакого перемѣщенія, то грузъ P опустился бы на ту же самую длину.

Если направленіе перемѣщенія составляетъ тупой уголъ съ направленіемъ силы F (какъ напримѣръ въ точкѣ M_1 на чертежѣ 46-мъ), то разстояніе между точкою M и точкою A увеличится на длину

$$k_1(\overline{M_1 C_1}) = -k_1 \varepsilon_1 \cos(\varepsilon_1, F_1)$$

и если бы всѣ остальные точки не получили никакого перемѣщенія, то грузъ P поднялся бы на такую длину.

Если всѣ точки получаютъ какія-либо перемѣщенія, то грузъ P опустится на длину, равную:

$$k_1 \epsilon_1 \cos(\epsilon_1, F_1) + k_2 \epsilon_2 \cos(\epsilon_2, F_2) + \dots + k_n \epsilon_n \cos(\epsilon_n, F_n),$$

причемъ поднятіе груза сважется, какъ отрицательное опусканіе.

Условіе, что грузъ не долженъ опускаться при возможныхъ перемѣщеніяхъ точекъ системы, выразится формулою:

$$\sum_{i=1}^{i=n} k_i \epsilon_i \cos(F_i, \epsilon_i) \leq 0,$$

или

$$\sum_{i=1}^{i=n} F_i \epsilon_i \cos(F_i, \epsilon_i) \leq 0.$$

Если всѣ связи удерживающія, то возможные варьяціи должны удовлетворять уравненіямъ (559, bis) § 75-го, а слѣдовательно, тогда каждой совокупности возможныхъ варьяцій соотвѣтствуетъ возможная же совокупность варьяцій равныхъ и противоположныхъ.

Принявъ во вниманіе это обстоятельство, можемъ заключить, что если всѣ связи удерживающія, то грузъ P не долженъ ни опускаться, ни подниматься при возможныхъ перемѣщеніяхъ точекъ. Въ самомъ дѣлѣ, мы уже доказали, что онъ не долженъ опускаться, но если возможны перемѣщенія $\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_n$, при которыхъ грузъ поднимается, то возможны также перемѣщенія: $-\epsilon_1, -\epsilon_2, \dots, -\epsilon_n$, равныя и прямопротивоположныя первымъ; при нихъ грузъ на столько же опустится, на сколько онъ поднимется при первыхъ; а слѣдовательно, при положеніи равновѣсія такой системы, такія перемѣщенія, при которыхъ грузъ поднимается, должны быть также невозможны.

Итакъ, если всѣ связи удерживающія, то положеніе равновѣсія системы точекъ возможно только тогда, когда при всѣхъ возможныхъ перемѣщеніяхъ точекъ удовлетворяется равенство:

$$\sum_{i=1}^{i=n} F_i \epsilon_i \cos(F_i, \epsilon_i) = 0 \dots \dots (567, b)$$

Такое доказательство Лагранжа, помѣщенное имъ въ *Mécanique analytique*; другое доказательство, помѣщенное въ *Théorie des fonctions analytiques* (оно также помѣщено, въ видѣ прибавленія въ концѣ 2 тома, 3-го изданія, *Mécanique analytique*, просмотрѣннаго и исправленнаго Бертрапомъ), не принадлежитъ къ числу непосредственныхъ доказательствъ начала возможныхъ перемѣщеній, это есть выводъ выражений реакцій связей.

Изъ числа другихъ доказательствъ начала возможныхъ перемѣщеній, упомянемъ объ доказательствахъ Фурье ¹⁾, Поансо ²⁾, Коши ³⁾, Ампера ⁴⁾, Карла Неймана ⁵⁾. Амперово доказательство мы здѣсь сообщаемъ.

Доказательство Ампера, подобно доказательству Коши, относится непосредственно не къ началу возможныхъ перемѣщеній, но къ выводу выражений реакцій идеальной связи; оно можетъ быть раздѣлено на двѣ части: въ первой доказывается, что реакціи идеальной связи направлены по дифференціальнымъ параметрамъ ея, во второй части доказывается, что во всѣхъ реакціяхъ одной и той же связи множитель λ одинъ и тотъ же.

Первая часть доказательства заключается въ слѣдующемъ. Пусть точки m_1, m_2, \dots, m_n связаны одною связью (491, b) (стр. 315), не заключающемъ времени. Если введемъ $(3n-3)$ новыхъ связей, такихъ, которыя закрѣпятъ точки m_2, m_3, \dots, m_n въ занимаемыхъ ими положеніяхъ M_2, M_3, \dots, M_n , координаты коихъ суть $(a_2, b_2, c_2), (a_3, b_3, c_3), \dots$, то уравненіе связи обратится въ уравненіе поверхности:

$$u(x_1, y_1, z_1, a_2, b_2, c_2, \dots, a_n, b_n, c_n) = 0,$$

а реакція связи въ точкѣ m_1 — въ реакцію этой поверхности; но реакція поверхности направлена по дифференціальному параметру P_1 , а потому и реакція связи имѣетъ то же самое направленіе. Это самое относится и

¹⁾ Fourier. Mémoire sur la statique, contenant la démonstration du principe des vitesses virtuelles et la théorie des momens. Journal de l'école polytechnique. II Tome, 5 Cahier.

²⁾ Poinso. Eléments de Statique.

³⁾ Доказательство Коши можно, между прочимъ, найти въ механикѣ Мюаньо.

⁴⁾ Ampère. Sur le principe des vitesses virtuelles. J. de l'école polytechnique. T. VI, Cah. 13.

⁵⁾ Neumann. Ueber das Princip der virtuellen oder facultativen Verrückungen. Berichte über die Verhandlungen der Sächs. Gesellschaft der Wiss. zu Leipzig. 1879.

ко всякой изъ точекъ, связываемыхъ связью; слѣдовательно, реакціи связи должны выражаться формулами (511) страницы 332-й.

Во второй части доказательства предполагается известнымъ, что реакціи идеальнаго стержня равны и прямопротивоположны; имѣется въ виду доказать, что множители $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_n$ въ выраженіяхъ (511) равны между собою.

Предположимъ, что введены $(3n-6)$ новыхъ связей, закрѣпляющихъ всѣ точки, за исключеніемъ точекъ m_1 и m_2 ; черезъ это всякія перемѣщенія точекъ m_3, m_4, \dots, m_n сдѣлаются невозможными и равенство вида: (588) (§ 81), которому должны будутъ удовлетворять возможные перемѣщенія точекъ m_1 и m_2 , получить слѣдующій видъ:

$$P_1 Ds_1 \cos(P_1, Ds_1) + P_2 Ds_2 \cos(P_2, Ds_2) = 0.$$

Присоединимъ затѣмъ еще четыре связи: двѣ неподвижныя поверхности, на которыхъ должна оставаться точка m_1 , и двѣ другія поверхности, на которыхъ должна оставаться точка m_2 ; линія пересѣченія первыхъ двухъ должна быть касательною къ направленію параметра P_1 , а линія пересѣченія вторыхъ двухъ поверхностей — касательною къ дифференціальному параметру P_2 . Вслѣдствіе такого стѣсненія точекъ m_1 и m_2 , перемѣщенія ихъ станутъ возможными только по направленіямъ дифференціальныхъ параметровъ P_1 и P_2 или по направленіямъ прямопротивоположнымъ, т.-е.

$$\cos(P_1, Ds_1) = \pm 1, \cos(P_2, Ds_2) = \pm 1,$$

а потому вышеприведенное равенство получить видъ:

$$\pm P_1 Ds_1 \pm P_2 Ds_2 = 0; \dots \dots \dots (591)$$

но дифференціальные параметры P_1, P_2 и перемѣщенія Ds_1, Ds_2 суть величины положительныя, слѣдовательно, равенство (591) требуетъ, чтобы знаки косинусовъ были противоположны, т.-е., если перемѣщеніе Ds_1 направлено по P_1 , то перемѣщеніе Ds_2 должно быть направлено противоположно P_2 , или обратно; во всякомъ случаѣ, равенству (591) можно дать слѣдующій видъ:

$$P_1 Ds_1 = P_2 Ds_2. \dots \dots \dots (592)$$

Далѣе, свяжемъ точки m_1 и m_2 идеальными стержнями съ нѣкоторою постороннею матерьяльною точкою A , къ которой приложимъ нѣкоторую силу F такимъ образомъ, чтобы вся система оставалась въ положеніи равновѣсія.

Эта сила F разовьёт реакции Λ_1 и Λ_2 въ стержнях AM_1 и AM_2 , а чрезъ посредство стержней разовьются въ точкахъ M_1 и M_2 реакции тѣхъ связей, которымъ эти точки подчинены.

Надо замѣтить, что возможные положенія точки A образуютъ нѣкоторую поверхность, и для того, чтобы эта точка находилась въ положеніи равновѣсія, необходимо, чтобы сила F была перпендикулярна къ этой поверхности, а слѣдовательно, и ко всякой линіи, которую можетъ описывать точка A при возможныхъ перемѣщеніяхъ точекъ M_1 и M_2 ; пусть $D\sigma$ есть элементъ одной изъ такихъ линій, т.-е. возможное перемѣщеніе точки A ; для равновѣсія необходимо, чтобы было:

$$\cos (F, D\sigma) = 0;$$

съ другой же стороны, такъ какъ сила F и реакции Λ_1 и Λ_2 (черт. 47), приложенныя къ точкѣ A , должны взаимно уравновѣшиваться, то должно имѣть мѣсто слѣдующее равенство:

$$\Lambda_1 D\sigma \cos (AM_1, D\sigma) + \Lambda_2 D\sigma \cos (AM_2, D\sigma) = 0 \dots (593)$$

при всякихъ значеніяхъ возможныхъ перемѣщеній точки A .

Точка M_1 тоже находится въ положеніи равновѣсія, поэтому реакція $\overline{M_1 A}$, стержня $M_1 A$, реакція $\lambda_1 P_1$ связи $\alpha = 0$ и реакція R , линіи пересѣченія двухъ поверхностей, на которой должна оставаться точка M_1 , — эти три реакціи должны взаимно уравновѣшиваться; но такъ какъ реакція R , перпендикулярна къ направленію P_1 , то, проецируя эти три реакціи на это направленіе, получимъ:

$$\Lambda_1 \cos (\overline{M_1 A}, P_1) + \lambda_1 P_1 = 0,$$

$$\Lambda_1 \cos (\overline{AM_1}, P_1) = \lambda_1 P_1; \dots (594)$$

точно также получимъ слѣдующее равенство:

$$\Lambda_2 \cos (\overline{AM_2}, P_2) = \lambda_2 P_2 \dots (595)$$

Къ этому надо еще прибавить, что возможные перемѣщенія концовъ идеальныхъ стержней должны удовлетворять равенствамъ:

$$Ds_1 \cos (\overline{AM_1}, Ds_1) = D\sigma \cos (\overline{AM_1}, D\sigma) \dots (596)$$

$$Ds_2 \cos (\overline{AM_2}, Ds_2) = D\sigma \cos (\overline{AM_2}, D\sigma) \dots (597)$$

Помножимъ теперь равенство (594) на Ds_1 , вычтемъ изъ него равенство (595), помноженное на Ds_2 , и примемъ во вниманіе равенство (592); получимъ:

$$\Delta_1 Ds_1 \cos(\overline{AM_1}, P_1) - \Delta_2 Ds_2 \cos(\overline{AM_2}, P_2) = (\lambda_1 - \lambda_2) P_1 Ds_1;$$

такъ какъ Ds_1 направлено по P_1 , когда Ds_2 направлено противоположно P_2 , или обратно, то первую часть этого равенства можно представить такъ:

$$\pm [\Delta_1 Ds_1 \cos(\overline{AM_1}, Ds_1) + \Delta_2 Ds_2 \cos(\overline{AM_2}, P_2)];$$

изъ равенствъ же (596), (597) и (593) слѣдуетъ, что эта сумма равна нулю; а потому должно быть

$$(\lambda_1 - \lambda_2) P_1 Ds_1 = 0$$

при всякихъ значеніяхъ перемѣщенія Ds_1 ; это требуетъ, чтобы λ_1 равнялось λ_2 .

Подобнымъ же образомъ докажемъ, что:

$$\lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = \dots = \lambda_n.$$

Доказательство Коши отличается отъ доказательства Ампера только тѣмъ, что точки m_1 и m_2 связываются равноплечнымъ рычагомъ и при томъ принципъ рычага предполагается уже извѣстнымъ.

См. также: Введеніе, главы 1-я, 2-я, 3-я, 4-я, 5-я, 6-я, 7-я, 8-я, 9-я, 10-я, 11-я, 12-я, 13-я, 14-я, 15-я, 16-я, 17-я, 18-я, 19-я, 20-я, 21-я, 22-я, 23-я, 24-я, 25-я, 26-я, 27-я, 28-я, 29-я, 30-я, 31-я, 32-я, 33-я, 34-я, 35-я, 36-я, 37-я, 38-я, 39-я, 40-я, 41-я, 42-я, 43-я, 44-я, 45-я, 46-я, 47-я, 48-я, 49-я, 50-я, 51-я, 52-я, 53-я, 54-я, 55-я, 56-я, 57-я, 58-я, 59-я, 60-я, 61-я, 62-я, 63-я, 64-я, 65-я, 66-я, 67-я, 68-я, 69-я, 70-я, 71-я, 72-я, 73-я, 74-я, 75-я, 76-я, 77-я, 78-я, 79-я, 80-я, 81-я, 82-я, 83-я, 84-я, 85-я, 86-я, 87-я, 88-я, 89-я, 90-я, 91-я, 92-я, 93-я, 94-я, 95-я, 96-я, 97-я, 98-я, 99-я, 100-я.

ГЛАВА VI.

Объ интегралахъ совокупныхъ дифференціальныхъ уравненій движенія системы точекъ.

§ 83. Первые и вторые интегралы дифференціальныхъ уравненій движенія данной системы точекъ; число постоянныхъ произвольныхъ.

Въ § 71-мъ было сказано, какъ изъ дифференціальныхъ уравненій движенія (517) § 70-го получить n совокупныхъ дифференціальныхъ уравненій второго порядка, заключающихъ столько же независимыхъ координатъ и ихъ производныя по времени.

Эта совокупность дифференциальных уравнений должна послужить для опредѣленія вида тѣхъ n функций отъ времени, которыми выражаются независимыя координаты системы движущихся точекъ.

Если эти n функций будутъ опредѣлены, то функции времени, выражающія законъ измѣненія p зависимыхъ координатъ, опредѣлятся изъ уравненій связей (491, 1), (491, 2), . . . (491, p).

Для сохраненія симметріи въ тѣхъ формулахъ и выраженіяхъ, которыя мы будемъ писать въ настоящей главѣ, предположимъ, что декартовы координаты могутъ быть выражены функциями отъ n независимыхъ координатныхъ параметровъ q_1, q_2, \dots, q_n ; при этомъ мы можемъ даже допустить, что эти функции заключаютъ время явнымъ образомъ. Пусть (526) (§ 72) суть эти выраженія.

Дѣлая такое предположеніе, мы нисколько не ограничиваемъ общности нашихъ разсужденій, потому что независимыя декартовы координаты могутъ быть разсматриваемы, какъ независимые координатные параметры.

Для опредѣленія вида тѣхъ функций времени:

$$q_1 = f_1(t), q_2 = f_2(t), \dots, q_n = f_n(t), \dots \quad (598)$$

которыя выражаютъ законъ измѣненія координатныхъ параметровъ при движеніи системы точекъ подъ вліяніемъ данныхъ силъ, надо найти надлежащее число интеграловъ совокупности (531) (§ 72) дифференциальныхъ уравненій Лагранжа.

Относительно интегрированія и интеграловъ этихъ дифференциальныхъ уравненій намъ придется высказать много сходнаго съ тѣмъ, что уже сказано въ § 18 (стр. 46—59) относительно интегрированія дифференциальныхъ уравненій движенія одной свободной матеріальной точки; поэтому, при изложеніи нѣкоторыхъ пунктовъ настоящаго параграфа, мы будемъ выражаться кратко, безъ подробныхъ объясненій.

Функции (598) должны удовлетворять дифференциальнымъ уравненіямъ (531), обращая ихъ въ тождества.

Интегрирование дифференциальных уравнений (531) может быть произведено по способу составления рядов:

$$q_k = q_{k0} + q'_{k0}t + q''_{k0} \frac{t^2}{1 \cdot 2} + q'''_{k0} \frac{t^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dots, *) \dots (599, k)$$

выражающих разложения искомым функций в строки, расположенные по возрастающим степеням разности $(t - t_0) = 0$; t_0 есть какой-либо момент движения; величины координатных параметров в момент t_0 мы условимся обозначать знаками:

$$q_{10}, q_{20}, \dots, q_{n0}, \dots \dots \dots (600)$$

а величины производных q'_1, q'_2, \dots, q'_n — знаками:

$$q'_{10}, q'_{20}, \dots, q'_{n0}, \dots \dots \dots (601)$$

и т. д. Значения вторых и высших производных: $q''_{k0}, q'''_{k0}, \dots$ для момента t_0 выразятся функциями: от t_0 , от величин (600) и от величин (601); эти выражения получим из дифференциальных уравнений (531) и из производных от этих уравнений по времени.

Ряды (599) должны выражать искомым функции (598); следовательно, эти функции должны заключать, кроме t , еще t_0 , величины (600) и величины (601), т. е.:

$$q_k = f_k(t, t_0, q_{10}, q_{20}, \dots, q_{n0}, q'_{10}, q'_{20}, \dots, q'_{n0}), \dots (598, k)$$

гдѣ k означает каждое изъ чиселъ 1, 2, \dots, n .

Если изъ дифференциальных уравнений (531) помощью какихъ-либо преобразований можно получить уравнение такого вида:

$$\frac{d\varphi}{dt} = 0, \dots \dots \dots (602, 1)$$

гдѣ φ , есть какая-либо функция отъ $t, q_1, q_2, \dots, q_n, q'_1, q'_2, \dots, q'_n$, то, интегрируя уравнение (602, 1), получимъ равенство:

$$\varphi_1(t, q_1, q_2, \dots, q_n, q'_1, q'_2, \dots, q'_n) = C_1, \dots (603, 1)$$

*) k есть которое-либо изъ чиселъ: 1, 2, 3, \dots, n .

гдѣ C_1 есть произвольная постоянная; равенство (603, 1) есть одинъ изъ *первыхъ интеграловъ* совокупныхъ дифференціальныхъ уравненій (531).

Уравненіе (602, 1) обращается въ тождество, если вмѣсто вторыхъ производныхъ $q_1'', q_2'', \dots, q_n''$ подставимъ въ него выраженія, получаемыя для этихъ производныхъ изъ дифференціальныхъ уравненій (531)

Положимъ, что мы нашли n первыхъ интеграловъ:

$$\varphi_1 = C_1, \varphi_2 = C_2, \dots, \varphi_n = C_n, \dots \dots (603)$$

такихъ, что получаемыя изъ нихъ уравненія:

$$\frac{d\varphi_1}{dt} = 0, \frac{d\varphi_2}{dt} = 0, \dots, \frac{d\varphi_n}{dt} = 0, \dots \dots (602)$$

равносильны совокупности дифференціальныхъ уравненій (531), т.-е., что всѣ уравненія (531) могутъ быть получены изъ уравненій (602); въ такомъ случаѣ эти n первыхъ интеграловъ (603) могутъ служить для выраженія величинъ q_1', q_2', \dots, q_n' въ функціяхъ отъ времени t , отъ координатныхъ параметровъ и отъ n произвольныхъ постоянныхъ C_1, C_2, \dots, C_n ; пусть эти выраженія будутъ:

$$q_k' = \mathcal{F}_k(t, q_1, q_2, \dots, q_n, C_1, C_2, \dots, C_n), \dots (604, k)$$

гдѣ k означаетъ каждое изъ чиселъ: 1, 2, \dots, n .

Если изъ n первыхъ интеграловъ (603), помощью какихъ-либо преобразованій, можно получить уравненіе такого вида:

$$\frac{d\Phi_1}{dt} = 0, \dots \dots \dots (605, 1)$$

гдѣ Φ_1 есть какая-либо функція отъ t , отъ координатныхъ параметровъ и отъ n произвольныхъ постоянныхъ C_1, C_2, \dots, C_n , то, интегрируя уравненіе (605, 1), получимъ равенство:

$$\Phi_1(t, q_1, q_2, \dots, q_n, C_1, C_2, \dots, C_n) = \Gamma_1, \dots (606, 1)$$

гдѣ Γ_1 есть произвольная постоянная; равенство (606, 1) есть одинъ

изъ вторыхъ интеграловъ совокупныхъ дифференціальныхъ уравненій (531).

Положимъ, что мы нашли n такихъ вторыхъ интеграловъ:

$$\Phi_1 = \Gamma_1, \quad \Phi_2 = \Gamma_2, \quad \dots \quad \Phi_n = \Gamma_n, \quad \dots \quad (606)$$

что получаемыя изъ нихъ уравненія:

$$\frac{d\Phi_1}{dt} = 0, \quad \frac{d\Phi_2}{dt} = 0, \quad \dots \quad \frac{d\Phi_n}{dt} = 0 \quad \dots \quad (605)$$

равносильны совокупности первыхъ интеграловъ (603), т.-е., что всѣ равенства (603) могутъ быть получены изъ уравненій (605); въ такомъ случаѣ эти n вторыхъ интеграловъ (606) могутъ служить для выраженія координатныхъ параметровъ въ функціяхъ отъ времени t и $2n$ произвольныхъ постоянныхъ; пусть эти выраженія будутъ:

$$q_k = \psi_k(t, C_1, C_2, \dots C_n, \Gamma_1, \Gamma_2, \dots \Gamma_n), \quad \dots \quad (598, A, k)$$

гдѣ k означаетъ каждое изъ чиселъ: $1, 2, \dots n$.

Выраженія для q_k' получатся или непосредственно изъ выраженій (598, A), взявъ производныя по времени отъ функцій ψ_k или изъ выраженій (604), если замѣнить въ нихъ $q_1, q_2, \dots q_n$ функціями $\psi_1, \psi_2, \dots \psi_n$.

Между произвольными постоянными $C_1, C_2, \dots C_n, \Gamma_1, \Gamma_2, \dots \Gamma_n$, величиною t_0 и величинами (600) и (601) существуетъ зависимость, выражаемая $2n$ равенствами вида:

$$\varphi_k(t_0, q_{10}, q_{20}, \dots q_{n0}, q'_{10}, q'_{20}, \dots q'_{n0}) = C_k \quad \dots \quad (607, k)$$

$$\Phi_k(t_0, q_{10}, q_{20}, \dots q_{n0}, C_1, C_2, \dots C_n) = \Gamma_k, \quad \dots \quad (608, k)$$

(гдѣ k означаетъ каждое изъ чиселъ: $1, 2, \dots n$).

Эта же зависимость можетъ быть представлена подъ видомъ слѣдующихъ формулъ, выражающихъ, что величины (600) и (601) могутъ быть рассматриваемы, какъ функціи отъ t_0 и $2n$ произвольныхъ постоянныхъ:

$$q_{k0} = \psi_k(t_0, C_1, C_2, \dots, C_n, \Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_n) \dots (609, k)$$

$$q'_{k0} = \psi'_k(t_0, C_1, C_2, \dots, C_n, \Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_n); \dots (610, k)$$

отсюда слѣдуетъ, что величины (600) и (601) столь же произвольны, какъ и постоянныя $C_1, C_2, \dots, C_n, \Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_n$.

Функции ψ_k (598, А) обратятся въ функции f_k (598), если произвольныя постоянныя C_k и Γ_k выразить по формуламъ (607) и (608) функциями отъ t_0 и отъ величинъ (600) и (601).

Моментъ t_0 называютъ *начальнымъ моментомъ времени*, хотя онъ можетъ быть взятъ гдѣ угодно на протяженіи всего времени, занимаемаго разсматриваемымъ движеніемъ системы точекъ; величины (600) суть координатные параметры *начального положенія* системы и могутъ быть названы *начальными величинами координатныхъ параметровъ*; величины (601) могутъ быть названы *начальными величинами производныхъ* q_1, q_2, \dots, q_n ; проекція на оси X^{0ab} , Y^{0ab} , Z^{0ab} *начальныхъ скоростей* точекъ системы опредѣляется изъ формулъ (533) § 73-го по величинамъ (600) и (601).

Въ тѣхъ случаяхъ, когда будетъ возможно и нужно для упрощенія формулъ, будемъ считать время отъ *начального момента*, полагая $t_0 = 0$; тогда начальныя величины координатныхъ параметровъ будемъ обозначать знаками: k_1, k_2, \dots, k_n , а начальныя величины первыхъ производныхъ отъ координатныхъ параметровъ — знаками: x_1, x_2, \dots, x_n ; начальныя величины декартовыхъ координатъ точекъ системы будемъ обозначать буквами: $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2, \dots, a_n, b_n, c_n$, а начальныя величины проекцій скоростей точекъ системы на оси X^{0ab} , Y^{0ab} , Z^{0ab} — буквами $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \alpha_2, \beta_2, \gamma_2, \dots, \alpha_n, \beta_n, \gamma_n$.

Изъ вышесказаннаго видно, что функции времени, выражающія законъ измѣненія координатныхъ параметровъ движущейся системы и материальныхъ точекъ, связанныхъ связями, заключаютъ въ себя 2n постоянныхъ произвольныхъ; столько же произвольныхъ постоянныхъ заключаютъ и тѣ функции времени, которыя выражаютъ законъ измѣненія декартовыхъ координатъ всѣхъ точекъ системы.

Существованіе произвольныхъ постоянныхъ въ функціяхъ ψ_k показываетъ, что при дѣйствіи данныхъ задаваемыхъ силъ система можетъ совершать безчисленное множество различныхъ движеній, различающихся количественными значеніями произвольныхъ постоянныхъ, или, что то же самое, количественными значеніями начальныхъ величинъ координатныхъ параметровъ и ихъ первыхъ производныхъ.

Примѣчаніе. При помощи выраженій (543) § 74-го, первая части первыхъ интеграловъ (603) могутъ быть преобразованы въ функціи отъ $t, q_1, q_2, \dots, q_n, p_1, p_2, \dots, p_n$; эти функціи будемъ обозначать знакомъ ϕ , напримѣръ, интегралъ (603, 1) получить слѣдующій видъ:

$$\phi(t, q_1, q_2, \dots, q_n, p_1, p_2, \dots, p_n) = C \dots (603, 1, \text{bis})$$

Начальные значенія величинъ p_1, p_2, \dots, p_n будемъ обозначать такъ:

$$p_1, p_2, \dots, p_n.$$

§ 84. Интегралы совокупности (554) дифференціаль-ныхъ уравненій перваго порядка.

Въ § 74-мъ было показано, что совокупныя дифференціальныя уравненія Лагранжа могутъ быть замѣнены совокупностью Гамильтоновыхъ дифференціальныхъ уравненій (554) (стр. 376) перваго порядка.

Интеграломъ этой совокупности (554) называется всякое равенство вида:

$$\phi(t, q_1, q_2, \dots, q_n, p_1, p_2, \dots, p_n) = C, \dots (611)$$

(гдѣ C — произвольная постоянная), удовлетворяющее слѣдующему требованію: полная производная по времени отъ функціи ϕ , т.-е. сумма

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{\partial \phi}{\partial t} + \sum_{k=1}^{k=n} \left(\frac{\partial \phi}{\partial q_k} \frac{dq_k}{dt} + \frac{\partial \phi}{\partial p_k} \frac{dp_k}{dt} \right) \dots (612)$$

должна обратиться въ нуль тождественно, когда вмѣсто производ-

ныхъ q_k' и p_k' будутъ подставлены равныя имъ вторыя части уравненій (554).

Вся совокупность (554) дифференціальныхъ уравненій перваго порядка будетъ вполне проинтегрирована, если, q_1, q_2, \dots, q_n и p_1, p_2, \dots, p_n будутъ выражены такими функціями времени, которыя обращаютъ дифференціальныя уравненія въ тождества.

Выраженія эти могутъ быть получены, если найдемъ $2n$ интеграловъ

$$\phi_1 = C_1, \phi_2 = C_2, \dots, \phi_{2n} = C_{2n} \dots \dots \dots (613)$$

данной совокупности (554); притомъ эти интегралы должны быть таковы, чтобы совокупность равенствъ:

$$\frac{d\phi_1}{dt} = 0, \frac{d\phi_2}{dt} = 0, \dots, \frac{d\phi_{2n}}{dt} = 0 \dots \dots \dots (614)$$

была равносильна совокупности (554), то есть, чтобы чрезъ рѣшеніе равенствъ (614) относительно $p_1', p_2', \dots, p_n', q_1', q_2', \dots, q_n'$ получились бы всѣ дифференціальныя уравненія совокупности (554).

Если такіе $2n$ интеграловъ будутъ найдены, то, рѣшивъ ихъ относительно величинъ $p_1, p_2, \dots, p_n, q_1, q_2, \dots, q_n$, получимъ искомыя выраженія этихъ величинъ въ функціяхъ времени; эти функція будутъ заключать, кромѣ времени, $2n$ произвольныхъ постоянныхъ C_1, C_2, \dots, C_{2n} .

Всякое равенство вида:

$$F(\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_{2n}) = C \dots \dots \dots (615)$$

есть интегралъ совокупности (554), потому что полная производная первой части его, а именно:

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial \phi_1} \frac{d\phi_1}{dt} + \frac{\partial F}{\partial \phi_2} \frac{d\phi_2}{dt} + \dots + \frac{\partial F}{\partial \phi_{2n}} \frac{d\phi_{2n}}{dt}$$

обращается въ нуль тождественно при замѣщеніи производныхъ $q_1', q_2', \dots, q_n', p_1', p_2', \dots, p_n'$ вторыми частями дифференціальныхъ уравненій (554), такъ какъ такое замѣщеніе обращаетъ въ нуль полную производная по t отъ $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_{2n}$.

Всякій новый интеграль:

$$\phi(t, q_1, q_2, \dots q_n, p_1, p_2, \dots p_n) = C \dots (611)$$

той же совокупности (554), отличающійся отъ $2n$ интеграловъ (613), можетъ быть представленъ подъ видомъ (615). Для того, чтобы убѣдиться въ этомъ, представимъ себѣ, что мы исключили изъ ϕ величины $q_1, q_2, \dots q_n, p_1, p_2, \dots p_n$ при помощи равенствъ (613); повидимому, ϕ должно тогда обратиться въ функцію отъ $t, C_1, C_2, C_3, \dots C_{2n}$, т.-е., въ функцію отъ $t, \phi_1, \phi_2, \dots \phi_{2n}$

$$\phi = f(t, \phi_1, \phi_2, \dots \phi_{2n}),$$

но легко убѣдиться, что функція f не должна заключать времени явнымъ образомъ; въ самомъ дѣлѣ, полная производная отъ f по t , то-есть:

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial \phi_1} \frac{d\phi_1}{dt} + \frac{\partial f}{\partial \phi_2} \frac{d\phi_2}{dt} + \dots + \frac{\partial f}{\partial \phi_{2n}} \frac{d\phi_{2n}}{dt}$$

должна обращаться, при посредствѣ равенствъ (614), въ нуль; поэтому должно быть:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = 0,$$

значитъ функція f должна быть функціею только отъ $\phi_1, \phi_2, \dots \phi_{2n}$.

Изъ сказаннаго слѣдуетъ, что хотя совокупныя дифференціальныя уравненія (554) имѣютъ безчисленное множество интеграловъ, но только $2n$ изъ нихъ суть интегралы независимые, всѣ же прочіе интегралы суть нѣкоторыя комбинаціи независимыхъ интеграловъ; притомъ любые $2n$ интеграловъ могутъ быть приняты за независимые, если изъ нихъ, путемъ полного дифференцированія по времени, могутъ быть получены всѣ дифференціальныя уравненія совокупности (554), какъ указано относительно интеграловъ (613).

Каждый изъ интеграловъ совокупности (554), по замѣщеніи въ немъ величинъ $p_1, p_2, \dots p_n$ выраженіями (542) параграфа 74-го, обращается въ одинъ изъ первыхъ интеграловъ дифференціальныхъ уравненій движенія (531) параграфа 73-го; поэтому послѣднія

имѣютъ безчисленное множество первыхъ интеграловъ, но только 2n изъ нихъ суть интегралы независимые, прочіе же первые интегралы суть комбинаціи независимыхъ первыхъ интеграловъ.

Въ слѣдующихъ трехъ главахъ будутъ показаны нѣкоторые приемы, при помощи которыхъ могутъ быть найдены нѣкоторые изъ интеграловъ дифференціальныхъ уравненій движенія системы точекъ въ тѣхъ случаяхъ, когда задаваемые силы и связи удовлетворяютъ опредѣленнымъ условіямъ.

ГЛАВА VII.

Законъ движенія центра инерціи.

§ 85. Составленіе дифференціальныхъ уравненій движенія центра инерціи системы матеріальныхъ точекъ.

Сложимъ дифференціальныя уравненія (517, а 1) (517, а 2) ... (517, а n) параграфа 70-го, получимъ:

$$\sum_{i=1}^{i=n} m_i x_i' = \sum_{i=1}^{i=n} X_i + \lambda(u_1) \sum_{i=1}^{i=n} \frac{\partial u_1}{\partial x_i} + \dots + \lambda(u_p) \sum_{i=1}^{i=n} \frac{\partial u_p}{\partial x_i}; \dots (616, a)$$

точно также, сложивъ всѣ тѣ уравненія (517), которыя заключаютъ вторыя производныя отъ координатъ y, получимъ:

$$\sum_{i=1}^{i=n} m_i y_i'' = \sum_{i=1}^{i=n} Y_i + \lambda(u_1) \sum_{i=1}^{i=n} \frac{\partial u_1}{\partial y_i} + \dots + \lambda(u_p) \sum_{i=1}^{i=n} \frac{\partial u_p}{\partial y_i}; \dots (616, b)$$

сложивъ затѣмъ всѣ остальные уравненія, т.-е.: (517, с 1) (517, с 2) ... (517, с n), получимъ:

$$\sum_{i=1}^{i=n} m_i z_i'' = \sum_{i=1}^{i=n} Z_i + \lambda(u_1) \sum_{i=1}^{i=n} \frac{\partial u_1}{\partial z_i} + \dots + \lambda(u_p) \sum_{i=1}^{i=n} \frac{\partial u_p}{\partial z_i}; \dots (616, c)$$

Вторая части этихъ уравненій суть проэкціи на оси $X^{овъ}$, $Y^{овъ}$ и $Z^{овъ}$ геометрической суммы всѣхъ задаваемыхъ силъ и всѣхъ реакцій связей, приложенныхъ ко всѣмъ точкамъ системы.

§ 86. Центр инерціи системы матерьяльныхъ точекъ.

Если геометрическая сумма всѣхъ силъ и всѣхъ реакцій связей равна нулю во все время движенія системы, то тогда дифференціальныя уравненія (616) обратятся въ слѣдующія:

$$\sum_{i=1}^{i=n} m_i x_i'' = 0; \quad \sum_{i=1}^{i=n} m_i y_i'' = 0; \quad \sum_{i=1}^{i=n} m_i z_i'' = 0. \quad \dots \quad (617)$$

Очевидно, каждое изъ этихъ уравненій можетъ быть проинтегрировано два раза: первые интегралы будутъ:

$$\sum_{i=1}^{i=n} m_i x_i' = C_1; \quad \sum_{i=1}^{i=n} m_i y_i' = C_2; \quad \sum_{i=1}^{i=n} m_i z_i' = C_3; \quad \dots \quad (618)$$

вторые интегралы:

$$\left. \begin{aligned} \sum_{i=1}^{i=n} m_i x_i &= C_1 t + \Gamma_1, \\ \sum_{i=1}^{i=n} m_i y_i &= C_2 t + \Gamma_2, \\ \sum_{i=1}^{i=n} m_i z_i &= C_3 t + \Gamma_3, \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (619)$$

Представимъ себѣ точку C , координаты (x_c, y_c, z_c) которой связаны съ координатами всѣхъ точекъ системы слѣдующими равенствами:

$$\left. \begin{aligned} x_c &= \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + \dots + m_n x_n}{m_1 + m_2 + \dots + m_n} \\ y_c &= \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2 + \dots + m_n y_n}{m_1 + m_2 + \dots + m_n} \\ z_c &= \frac{m_1 z_1 + m_2 z_2 + \dots + m_n z_n}{m_1 + m_2 + \dots + m_n} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (620)$$

Тогда интеграламъ (619) можно будетъ дать слѣдующій видъ:

$$Mx_c = C_1 t + \Gamma_1; \quad My_c = C_2 t + \Gamma_2; \quad Mz_c = C_3 t + \Gamma_3, \quad \dots \quad (619 \text{ bis})$$

гдѣ

$$M = m_1 + m_2 + \dots + m_n \dots \dots \dots (621)$$

есть масса всей системы, т. е., сумма массъ всѣхъ точекъ системы.

Интегралы (619 bis) выражаютъ, что точка C движется равномерно и прямолинейно, причемъ скорость ея такова, что еслибы эта точка была матерьяльною точкою и масса ея равнялась бы массѣ всей системы, то количество движенія этой точки C равнялось бы геометрической суммѣ количествъ движеній всѣхъ точекъ системы.

Эта точка C называется *центромъ инерціи* системы точекъ.

§ 87. Законъ движенія центра инерціи системы матерьяльныхъ точекъ.

На основаніи выраженій (620) первыя части дифференціальныхъ уравненій (616) могутъ быть представлены подѣ слѣдующимъ видомъ:

$$M \frac{d^2 x_c}{dt^2}, \quad M \frac{d^2 y_c}{dt^2}, \quad M \frac{d^2 z_c}{dt^2};$$

тогда эти уравненія (616) обращаются въ дифференціальныя уравненія движенія матерьяльной точки, совпадающей съ центромъ инерціи системы, масса которой равна массѣ всей системы и къ которой какъ будто приложены всѣ задаваемые силы и всѣ реакціи связей, приложенныя въ дѣйствительности къ точкамъ системы.

Такимъ образомъ дифференціальныя уравненія (616) выражаютъ слѣдующій *общій законъ движенія* какой-либо системы точекъ, называемый *закономъ движенія центра инерціи*:

Центръ инерціи системы матерьяльныхъ точекъ движется такимъ образомъ, какъ будто бы это была свободная матерьяльная точка, въ которой была бы сосредоточена масса всей системы и къ которой были бы приложены всѣ задаваемые силы и реакціи связей.

Въ такомъ видѣ этотъ законъ есть дѣйствительно *общій законъ*

движенія, такъ какъ онъ имѣетъ мѣсто при всѣхъ задаваемыхъ силахъ и при всѣхъ связяхъ; подчиняя связи и задаваемые силы нижеслѣдующимъ ограниченіямъ, мы получимъ слѣдующія спеціальныя формы этого закона, имѣющія мѣсто во многихъ вопросахъ и задачахъ механики.

1. Когда геометрическая сумма всѣхъ реакцій связей равна нулю, тогда уравненія (616) получаютъ слѣдующій видъ:

$$M \frac{d^2 x_c}{dt^2} = \sum_{i=1}^{i=n} X_i; \quad M \frac{d^2 y_c}{dt^2} = \sum_{i=1}^{i=n} Y_i; \quad M \frac{d^2 z_c}{dt^2} = \sum_{i=1}^{i=n} Z_i, \dots \quad (616, A)$$

т.-е. когда геометрическая сумма всѣхъ реакцій связей равна нулю, тогда центръ инерціи системы движется, какъ свободная матеріальная точка, въ которой сосредоточена вся масса системы и къ которой приложены всѣ задаваемые силы; эта спеціальная форма закона движенія центра инерціи имѣетъ мѣсто, между прочимъ, въ слѣдующихъ случаяхъ:

- а) когда всѣ точки системы свободны,
- б) когда реакціи связей попарно равны и прямопротивоположны; напримѣръ, если всѣ связи суть идеальныя связи, указанныя въ примѣрахъ 53-мъ, 54-мъ и 55-мъ (см. стр. 336—338, 344—346) и соединяющія точки системы между собою, но не съ посторонними или неподвижными точками.

Когда не только геометрическая сумма всѣхъ реакцій равна нулю, но также равна нулю и геометрическая сумма всѣхъ задаваемыхъ силъ, тогда получается еще болѣе частная форма закона движенія центра инерціи, а именно тогда центръ инерціи системы движется такъ, какъ двигалась бы по инерціи матеріальная точка, въ которой была бы сосредоточена масса всей системы; въ этихъ случаяхъ мы имѣемъ шесть интеграловъ (618) и (619) дифференціальныхъ уравненій движенія системы точекъ.

Если, напримѣръ, всѣ точки системы свободны и всѣ задаваемые силы суть силы взаимнодѣйствія между точками системы, попарно равныя и прямопротивоположныя (такъ что всякой силѣ $M_i f_{ij}$

(черт. 48), приложенной къ одной изъ точекъ, соответствуетъ сила M_{if} равная ей и прямопротивоположная, приложенная къ другой точкѣ системы), то тогда геометрическая сумма всѣхъ задаваемыхъ силъ будетъ равна нулю, а потому центръ инерціи системы будетъ двигаться равномерно и прямолинейно.

Въ примѣрахъ 61, 62 и 63-мъ (стр. 326—327) центры инерціи системы должны совершать прямолинейныя равномерныя движенія, такъ что въ каждомъ изъ этихъ примѣровъ мы имѣемъ по шести интеграловъ вида (618) и (619).

Въ примѣрѣ 66-мъ (§ 73, стр. 371) центръ инерціи системы совпадаетъ съ центромъ C ромба. реакціи идеальныхъ стержней попарно равны и прямопротивоположны, геометрическая сумма силъ притяженія точекъ системы къ началу координатъ равна $2\mu(m_1 + m_2)r_c$ и направлена параллельно CO ; въ самомъ дѣлѣ, означивъ абсолютныя координаты вершинъ ромба знаками: $x_1, x_2, x_3, x_4, y_1, y_2, y_3, y_4$, будемъ имѣть слѣдующія выраженія проекцій геометрической суммы задаваемыхъ силъ:

$$-\mu [m_1(x_1 + x_3) + m_2(x_2 + x_4)] = -2\mu(m_1 + m_2)x_c$$

$$-\mu [m_1(y_1 + y_3) + m_2(y_2 + y_4)] = -2\mu(m_1 + m_2)y_c,$$

такъ какъ

$$x_1 + x_3 = x_2 + x_4 = 2x_c \text{ и } y_1 + y_3 = y_2 + y_4 = 2y_c.$$

Первые два дифференціальныя уравненія этого примѣра суть дифференціальныя уравненія движенія центра инерціи системы въ полярныхъ координатахъ.

§ 88. Нѣсколько замѣчаній относительно опредѣленія положенія центра инерціи системы материальныхъ точекъ.

Положеніе центра инерціи данной системы материальныхъ точекъ, занимающихъ данныя положенія въ пространствѣ, опредѣляется вычисленіемъ по формуламъ (620) § 86-го или помощью геометрическихъ построеній, основанныхъ на этихъ формулахъ. Мы ограничимся нѣсколькими замѣчаніями, касающимися этого предмета.

1) Если выразить положеніе точекъ системы и центра инерціи въ другихъ прямолинейныхъ прямоугольныхъ координатахъ ξ, η, ζ , то

зависимость между новыми координатами центра инерции и новыми координатами точек системы сохранить прежний видъ:

$$\xi_c = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n m_i \xi_i; \quad \eta_c = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n m_i \eta_i; \quad \zeta_c = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n m_i \zeta_i, \dots \quad (620, \text{bis})$$

въ чемъ нетрудно убѣдиться при помощи формулъ преобразованія координатъ (часть кинематическая, стр. 56, формулы (45), (46) и проч.).

2) Въ косоугольныхъ прямолинейныхъ координатахъ зависимость между координатами центра инерции и координатами точекъ системы выражается формулами того же самаго вида (620), какъ и въ прямоугольныхъ координатахъ.

3) Центръ инерции двухъ матерьяльныхъ точекъ находится на линіи кратчайшаго разстоянія между ними и дѣлитъ это разстояніе на части, обратно пропорціональныя массамъ прилежащихъ матерьяльныхъ точекъ.

4) Центръ инерции нѣсколькихъ матерьяльныхъ точекъ можетъ быть опредѣленъ помощью ряда послѣдовательныхъ дѣйствій: опредѣливъ положеніе центра инерции $C(1, 2)$ точекъ m_1 и m_2 и представивъ себѣ, что въ $C(1, 2)$ сосредоточена масса $(m_1 + m_2)$, опредѣлимъ положеніе центра инерции точекъ $C(1, 2)$ и m_3 ; найденная точка $C(1, 2, 3)$ будетъ центромъ инерции трехъ точекъ m_1, m_2, m_3 , и т. д.

5) Если всѣ точки системы лежатъ въ одной плоскости, то центръ инерции системы находится въ той же плоскости; въ самомъ дѣлѣ, взявъ эту плоскость за плоскость YZ и принявъ во вниманіе, что $\xi_1 = \xi_2 = \xi_3 = \dots = \xi_n$, найдемъ: $\xi_c = 0$.

6) Если всѣ точки системы лежатъ на одной прямой, то центръ инерции находится на той же прямой; въ самомъ дѣлѣ, взявъ эту прямую за ось E , мы найдемъ $\eta_c = 0, \zeta_c = 0$.

7) Если система состоитъ изъ четнаго числа матерьяльныхъ точекъ или, иначе сказать, изъ нѣкотораго числа паръ точекъ; если массы обѣихъ точекъ каждой пары равны между собою, а расположе-

ніе системы таково, что середины кратчайшихъ разстояній между парными точками заключаются въ одной плоскости, то в. этой плоскости очевидно заключается центръ инерціи всей системы; въ самомъ дѣлѣ возьмемъ эту плоскость за плоскость YZ и составимъ выраженіе для ξ_c ; такъ какъ обѣ точки каждой пары имѣютъ равныя массы и находятся по обѣ стороны плоскости YZ въ равныхъ разстояніяхъ отъ нея, то получимъ $\xi_c = 0$.

8) Если подобная симметрія имѣетъ мѣсто по отношенію къ двумъ пересѣкающимся плоскостямъ, то центръ инерціи находится на линіи пересѣченія этихъ плоскостей.

9) Если симметрія имѣетъ мѣсто по отношенію къ тремъ пересѣкающимся плоскостямъ, то центръ инерціи находится въ точкѣ пересѣченія ихъ.

10) Если распредѣлить систему точекъ на нѣсколько группъ и сначала опредѣлить положеніе центра инерціи каждой изъ этихъ группъ, то, чтобы затѣмъ найти положеніе центра инерціи всей системы, надо поступить такъ: предположивъ, что масса каждой группы сосредоточена въ ея центрѣ инерціи, надо искать положеніе центра инерціи всѣхъ этихъ новыхъ воображаемыхъ матеріальныхъ точекъ.

Эти замѣчанія оказываются весьма полезными во многихъ частныхъ случаяхъ.

§ 89. О томъ, какъ разсматривается сплошное тѣло въ механикѣ системы матеріальныхъ точекъ.

Мы должны здѣсь обратить вниманіе на способы опредѣленія и вычисленія положеній центровъ инерціи сплошныхъ тѣлъ, но прежде этого слѣдуетъ объяснить, какимъ образомъ механика системы точекъ примѣняется къ сплошнымъ тѣламъ.

Данное сплошное тѣло мысленно раздѣляютъ на весьма большое число мелкихъ частей, называемыхъ элементами тѣла и представляютъ себѣ, что каждый элементъ замѣняется матеріальною точкою той же массы, заключающеюся въ объемѣ элемента или на его поверхности; къ этой совокупности матеріальныхъ точекъ, которая замѣняетъ сплошное тѣло, примѣняютъ теоремы и формулы механики системы матеріальныхъ точекъ.

Совокупность материальных точек, которою мы замѣняемъ сплошное тѣло, тѣмъ болѣе походить на самое тѣло, чѣмъ мельче элементы, на которые мысленно раздробляемъ тѣло; поэтому мы раздробляемъ тѣло на элементы безконечно-малыхъ размѣровъ и предполагаемъ, что размѣры ихъ приближаются къ нулю, а число элементовъ — къ безконечности.

Если принять въ расчетъ кинематическія свойства разсматриваемаго тѣла, то придется допустить существованіе въ некоторыхъ связяхъ между материальными точками, замѣняющими элементы тѣла; вслѣдствіе этого совокупность точекъ обратится въ систему точекъ, замѣняющую данное сплошное тѣло, обладающее данными кинематическими свойствами.

Напримѣръ, если данное сплошное тѣло предполагается идеально твердымъ, то придется допустить, что разстоянія между материальными точками, замѣняющими собою элементы тѣла, остаются неизмѣнными, какимы бы силамъ тѣло ни было подвержено; поэтому идеально-твердое тѣло замѣняется въ механикѣ такъ называемой *неизмѣняемою системою материальныхъ точекъ*.

Объ условіяхъ, выражающихъ кинематическія свойства деформирующихся тѣлъ, мы будемъ говорить въ другихъ мѣстахъ нашего курса.

Дробленіе тѣла на безконечно-малые элементы производится разсѣченіемъ его координатными поверхностями той системы координатъ, помощью которой выражаютъ положеніе точекъ тѣла въ пространствѣ.

При употребленіи прямолинейныхъ прямоугольныхъ координатъ каждый безконечно малый элементъ объема имѣетъ видъ прямоугольнаго параллелепипеда, имѣющаго безконечно-малыя ребра dx , dy , dz ; объемъ такого параллелепипеда равенъ:

$$dO = dx dy dz$$

и масса его равна:

$$dm = \sigma dx dy dz,$$

гдѣ ω есть плотность матеріи тѣла въ одной изъ точекъ этого элемента (см. стр. 29).

Матеріальная точка, которою мы замѣняемъ элементъ тѣла, должна быть помѣщена внутри или на поверхности этого элемента; положеніе ея въ самомъ элементѣ можетъ быть какое угодно, такъ какъ въ окончательныхъ результатахъ предполагается, что размѣры элементовъ уменьшаются до нуля; мы можемъ предположить, что матеріальная точка, замѣняющая элементъ, находится или въ центрѣ параллелоипеда, или въ одной изъ его вершинъ; мы предпочтемъ помѣщать ее въ той вершинѣ элементарнаго параллелоипеда, координаты которой имѣютъ наименьшія значенія.

При употребленіи прямолинейныхъ косоугольныхъ координатъ, элементы объема имѣютъ видъ косоугольныхъ бесконечно-малыхъ параллелоипедовъ; объемъ такого параллелоипеда равенъ:

$$dO = \omega dx dy dz;$$

ω есть объемъ косоугольнаго параллелоипеда, ребра котораго параллельны осямъ координатъ и имѣютъ длины, равныя единицѣ; этотъ объемъ выражается такъ:

$$\omega = \begin{vmatrix} 1, & \gamma, & \beta \\ \gamma, & 1, & \alpha \\ \beta, & \alpha, & 1 \end{vmatrix} = 1 - \alpha^2 - \beta^2 - \gamma^2 + 2\alpha\beta\gamma,$$

гдѣ

$$\alpha = \cos(Y, Z), \quad \beta = \cos(Z, X), \quad \gamma = \cos(X, Y).$$

При употребленіи круговыхъ цилиндрическихъ координатъ, элементы объема имѣютъ видъ отрѣзковъ колецъ съ прямоугольными сѣченіями; на чертежѣ 49-мъ изображенъ, въ увеличенномъ видѣ, одинъ такой элементъ. Если координаты точки A суть ρ, θ, z , то координаты точки C , суть $(\rho + d\rho), (\theta + d\theta), (z + dz)$; шесть поверхностей, которыми ограниченъ этотъ элементъ, суть: плоскости $z(ABB_1A_1)$ и $(z + dz)(DCC_1D_1)$, плоскости $\theta(ADD_1A_1)$ и $(\theta + d\theta)(BCC_1B_1)$, цилиндрическія поверхности $\rho(ADCB)$ и $(\rho + d\rho)(A_1D_1C_1B_1)$. Пре-

небрегая безконечно-малыми величинами четвертого и высших порядков малости, найдемъ, что объемъ элемента выразится такъ:

$$dO = dr \cdot r d\varphi \cdot dz = r dr d\varphi dz.$$

Въ сферическихъ координатахъ элементъ объема есть часть сферического слоя, заключающагося между сферами r и $(r + dr)$; на чертежѣ 50-мъ изображенъ, въ увеличенномъ видѣ, одинъ изъ такихъ элементовъ. Положимъ, что координаты точки D суть r, φ, ψ , а координаты точки B_1 : $(r + dr), (\varphi + d\varphi), (\psi + d\psi)$; шесть поверхностей, которыми ограниченъ этотъ элементъ, суть: двѣ плоскости $\psi(ADD_1A_1)$ и $(\psi + d\psi)(BCC_1B_1)$, двѣ шаровыя поверхности $r(ADCB)$ и $(r + dr)(A_1D_1C_1B_1)$, двѣ коническія поверхности $\varphi(DCC_1D_1)$ и $(\varphi + d\varphi)(ABB_1A_1)$.

Если пренебречь безконечно малыми величинами высшихъ порядковъ малости, начиная съ четвертого, то объемъ элемента выразится такъ:

$$dO = dr \cdot r d\varphi \cdot r \sin \varphi d\psi = r^2 \sin \varphi dr d\varphi d\psi.$$

§ 90. Центръ инерціи сплошнаго тѣла.

Центромъ инерціи сплошнаго тѣла называется та точка, къ которой приближается и съ которою совпадаетъ центръ инерціи системы материальныхъ точекъ, замѣняющей тѣло, по мѣрѣ того, какъ мы уменьшаемъ размеры элементовъ тѣла до нуля, а число ихъ увеличиваемъ до безконечности.

Центръ инерціи есть весьма важная въ механическомъ отношеніи точка сплошнаго тѣла; такъ, центръ инерціи идеально-твердаго тѣла обладаетъ слѣдующими свойствами.

Такъ какъ реакціи неизмѣняемыхъ связей той системы точекъ, которая замѣняетъ собою идеально-твердое тѣло, попарно равны и прямопротивоположны, то центръ инерціи свободнаго твердаго тѣла, неподверженнаго никакимъ силамъ, движется равномерно и прямолинейно; при этомъ само тѣло можетъ двигаться не поступательно, тогда центръ инерціи будетъ единственною точкою тѣла, имѣющею прямо-

линейное и равномерное движеніе, всѣ же прочія точки тѣла будутъ описывать криволинейныя траекторіи.

Если твердое тѣло свободно, но подвержено какому бы то ни было силамъ, то центръ инерціи его будетъ двигаться такимъ образомъ, какъ будто бы въ немъ была сосредоточена масса всего тѣла и къ нему были приложены всѣ силы, приложенныя къ точкамъ тѣла.

Поэтому, въ тѣхъ вопросахъ механики, въ которыхъ возможно замѣнить каждое сплошное твердое тѣло материальною точкою, слѣдуетъ помѣщать эту точку въ центрѣ инерціи, а не въ иной точкѣ твердаго тѣла.

§ 91. Опредѣленіе положенія центра инерціи сплошныхъ тѣлъ, поверхностей и линій. Прямѣры.

Для получения формулъ, выражающихъ положеніе центра инерціи сплошнаго тѣла въ прямолинейныхъ координатахъ, применимъ формулы (620) (§ 86-го) къ системѣ материальныхъ точекъ, замѣняющихъ элементы тѣла и затѣмъ предположимъ, что размѣры элементовъ уменьшаются до нуля, а число ихъ увеличивается до безконечности; тогда получимъ:

$$x_c = \frac{1}{M} \iiint x \, dO; \quad y_c = \frac{1}{M} \iiint y \, dO; \quad z_c = \frac{1}{M} \iiint z \, dO, \quad (622)$$

гдѣ

$$M = \iiint dO; \quad dO = dx \, dy \, dz,$$

а интегрированія распространены на весь объемъ тѣла.

Во многихъ случаяхъ опредѣленіе положенія центра инерціи сплошнаго тѣла сведется на опредѣленіе положенія центра инерціи нѣкоторой поверхности или площади или даже нѣкоторой линіи. Напримѣръ, положимъ, что данное сплошное тѣло ограничено: цилиндрическою поверхностью, производящая которой параллельна оси Z , плоскостію XU и поверхностью:

$$z = f(x, y),$$

небрегая безконечно-малыми величинами четвертого и высшихъ порядковъ малости, найдемъ, что объемъ элемента выразится такъ:

$$dO = dr \cdot r d\varphi \cdot dz = r dr d\varphi dz.$$

Въ сферическихъ координатахъ элементъ объема есть часть сферическаго слоя, заключающагося между сферами r и $(r+dr)$; на чертежѣ 50-мъ изображенъ, въ увеличенномъ видѣ, одинъ изъ такихъ элементовъ. Положимъ, что координаты точки D суть r, φ, ψ , а координаты точки B_1 : $(r+dr), (\varphi+d\varphi), (\psi+d\psi)$; шесть поверхностей, которыми ограниченъ этотъ элементъ, суть: двѣ плоскости $\psi(ADD_1A_1)$ и $(\psi+d\psi)(BCC_1B_1)$, двѣ шаровыя поверхности $r(ADCB)$ и $(r+dr)(A_1D_1C_1B_1)$, двѣ коническія поверхности $\varphi(DCC_1D_1)$ и $(\varphi+d\varphi)(ABB_1A_1)$.

Если пренебречь безконечно малыми величинами высшихъ порядковъ малости, начиная съ четвертаго, то объемъ элемента выразится такъ:

$$dO = dr \cdot r d\varphi \cdot r \sin \varphi d\psi = r^2 \sin \varphi dr d\varphi d\psi.$$

§ 90. Центръ инерціи сплошнаго тѣла.

Центромъ инерціи сплошнаго тѣла называется та точка, къ которой приближается и съ которою совпадаетъ центръ инерціи системы материальныхъ точекъ, замѣняющей тѣло, по мѣрѣ того, какъ мы уменьшаемъ размеры элементовъ тѣла до нуля, а число ихъ увеличиваемъ до безконечности.

Центръ инерціи есть весьма важная въ механическомъ отношеніи точка сплошнаго тѣла; такъ, центръ инерціи идеально-твердаго тѣла обладаетъ слѣдующими свойствами.

Такъ какъ реакціи неизмѣняемыхъ связей той системы точекъ, которая замѣняетъ собою идеально-твердое тѣло, попарно равны и прямопротивоположны, то центръ инерціи свободнаго твердаго тѣла, неподверженнаго никакимъ силамъ, движется равномерно и прямолинейно; при этомъ само тѣло можетъ двигаться не поступательно, тогда центръ инерціи будетъ единственною точкою тѣла, имѣющею прямо-

линейное и равномерное движеніе, всѣ же прочія точки тѣла будутъ описывать криволинейныя траекторіи.

Если твердое тѣло свободно, но подвержено какому бы то ни было силамъ, то центръ инерціи его будетъ двигаться такимъ образомъ, какъ будто бы въ немъ была сосредоточена масса всего тѣла и къ нему были приложены всѣ силы, приложенныя къ точкамъ тѣла.

Поэтому, въ тѣхъ вопросахъ механики, въ которыхъ возможно замѣнить каждое сплошное твердое тѣло материальною точкою, слѣдуетъ помѣщать эту точку въ центръ инерціи, а не въ иной точкѣ твердаго тѣла.

§ 91. Опредѣленіе положенія центра инерціи сплошныхъ тѣлъ, поверхностей и линій. Примѣры.

Для полученія формулъ, выражающихъ положеніе центра инерціи сплошнаго тѣла въ прямолинейныхъ координатахъ, примѣнимъ формулы (620) (§ 86-го) къ системѣ материальныхъ точекъ, замѣняющихъ элементы тѣла и затѣмъ предположимъ, что размѣры элементовъ уменьшаются до нуля, а число ихъ увеличивается до безконечности; тогда получимъ:

$$x_c = \frac{1}{M} \iiint x \, dO; \quad y_c = \frac{1}{M} \iiint y \, dO; \quad z_c = \frac{1}{M} \iiint z \, dO, \quad (622)$$

гдѣ

$$M = \iiint dO; \quad dO = dx \, dy \, dz,$$

а интегрированія распространены на весь объемъ тѣла.

Во многихъ случаяхъ опредѣленіе положенія центра инерціи сплошнаго тѣла сведется на опредѣленіе положенія центра инерціи нѣкоторой поверхности или площади или даже нѣкоторой линіи. Напримѣръ, положимъ, что данное сплошное тѣло ограничено: цилиндрическою поверхностью, производящая которой параллельна оси Z , плоскостью XU и поверхностью:

$$z = f(x, y),$$

кромѣ того предполагается, что плотность σ матеріи этого тѣла есть функція только отъ x и y , но не отъ z , такъ что во всѣхъ точкахъ каждой линіи, параллельной оси $Z^{объ}$, плотность одна и та же.

Примѣнивъ формулы (622) къ этому случаю и произведя интегрированіе по z въ предѣлахъ отъ $z=0$ до $z=f(x, y)$, получимъ:

$$x_c = \frac{1}{M} \iint x dx dy, \quad y_c = \frac{1}{M} \iint y dx dy, \quad x = \sigma f(x, y). \quad (623)$$

$$z_c = \frac{1}{2M} \iint x f(x, y) dx dy, \quad M = \iint x dx dy,$$

гдѣ интегрированія распространены по площади основанія цилиндрическаго тѣла.

Очевидно, координаты x_c и y_c выражаются какъ координаты центра инерціи воображаемой матеріи, расположенной по площади основанія цилиндрическаго тѣла съ *поверхностною плотностью* $x = \sigma f(x, y)$.

Въ другихъ случаяхъ вопросъ приводится къ опредѣленію положенія центра инерціи воображаемой матеріи, расположенной вдоль по нѣкоторой кривой или прямой линіи съ данною *линейною плотностью* λ , такъ, что на элементъ ds линіи приходится количество массы λds .

Замѣчанія, приведенныя въ § 88, примѣняются съ пользою и при опредѣленіи центровъ инерціи сплошныхъ тѣлъ и площадей.

Обращаемся къ примѣрамъ.

Примѣръ 67-й. Центръ инерціи однородной дуги круга находится на радіусѣ, проведенномъ къ серединѣ дуги; взявъ центръ круга за начало координатъ, а направленіе вышесказаннаго радіуса—за ось $X^{объ}$, опредѣлимъ разстояніе центра инерціи C отъ O по формулѣ:

$$OC = x_c = \frac{\int x ds}{\int ds} = \frac{2R^2 \int_0^\alpha \cos \theta d\theta}{2R \int_0^\alpha d\theta} = \frac{R(2R \sin \alpha)}{2R\alpha},$$

гдѣ R — радіусъ круга и 2α уголъ при центрѣ, занимаемый дугою.

Такъ какъ $2R \sin \alpha$ есть длина хорды, а $2R\alpha$ — длина дуги, то OC выражается такъ

$$OC = \frac{(\text{радіусъ}) \cdot (\text{хорда})}{(\text{дуга})}.$$

Примѣръ 68-й. Центръ инерціи дуги однородной цѣпной линіи:

$$y = \frac{a}{2} \left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}} \right),$$

предполагая, что одинъ конецъ дуги совпадаетъ съ самою нижнею точкою кривой.

Вычисленіе положенія центра инерціи произведемъ по формуламъ:

$$sx_c = \int x ds, sy_c = \int y ds.$$

Вычисленіе значительно облегчается при помощи слѣдующихъ выраженій:

$$\frac{ds}{dx} = \frac{y}{a}; \quad s = \frac{a}{2} \left(e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}} \right) = a \frac{dy}{dx}.$$

Координаты центра инерціи выразятся такъ:

$$x_c = x - \frac{a}{s} (y - a); \quad y_c = \frac{1}{2} \left(y + \frac{a}{s} x \right).$$

Опредѣленіе положенія центровъ инерціи дугъ другихъ плоскихъ кривыхъ можно найти въ собраніяхъ задачъ по механикѣ: Jullien *), de Saint-Germain **) и въ Рациональной Механикѣ Сомова.

Примѣръ 69-й. Положеніе центра инерціи дуги винтовой однородной линіи:

$$x^2 + y^2 = a^2, \quad z = b \arccos \frac{x}{a},$$

считая дугу отъ точки: $z=0, y=0, x=a$.

Координаты центра инерціи дуги суть:

$$x_c = b \frac{y}{z}, \quad y_c = b \frac{(a-x)}{z}, \quad z_c = \frac{z}{2}.$$

*) Jullien. Problèmes de Mécanique rationnelle 1855.

**) de Saint-Germain. Recueil d'exercices sur la Mécanique rationnelle 1877.

Примѣръ 70-й. Положеніе центра инерціи однородной площади круговаго сектора.

Разстояніе центра инерціи C_1 отъ центра O круга равно:

$$x_1 = OC_1 = \frac{2}{3} \frac{(\text{радіусъ}) \cdot (\text{хорда})}{(\text{дуга})}.$$

Примѣръ 71-й. Положеніе центра инерціи однородной площади круговаго сегмента можетъ быть опредѣлено слѣдующимъ образомъ. Площадь сектора можно раздѣлить на двѣ части хордою, стягивающею дугу сектора; одна часть будетъ площадь равносторонняго треугольника, другая — площадь сегмента.

Центры инерціи всѣхъ этихъ площадей находятся на оси X^{022} ; означимъ чрезъ x_1 , x_2 и x разстоянія отъ O центровъ инерціи площадей сектора, треугольника и сегмента; знаками S_1 , S_2 и S обозначимъ величины этихъ площадей.

Нетрудно видѣть, что x опредѣлится по формулѣ:

$$x = \frac{S_1 x_1 - S_2 x_2}{S_1 - S_2},$$

гдѣ x_1 есть разстояніе, приведенное въ предыдущемъ примѣрѣ, $x_2 = \frac{2}{3} R \cos \alpha$, $S_1 = R^2 \alpha$, $S_2 = R^2 \sin \alpha \cos \alpha$; поэтому:

$$x = \frac{4}{3} R \frac{\sin^3 \alpha}{2\alpha - \sin 2\alpha}.$$

Примѣръ 72-й. Центръ инерціи площади, ограниченной осью X^{022} и циклоидою:

$$x = R(\omega + \sin \omega), \quad y = R(1 + \cos \omega).$$

Величина площади:

$$2 \int_0^{2R} x dy = 3\pi R^2.$$

Центръ инерціи находится на оси Y^{022} въ разстояніи $\frac{5}{6} R$.

Примѣръ 73-й. Положеніе центра инерціи площади, заключающейся между дугою AE эллипса (черт. 51), діаметромъ OA и полухордою DE , сопряженною этому діаметру.

Въ этомъ случаѣ лучше всего примѣнить косоугольные прямолиней-

ныя координаты, оси вторыхъ суть: ось OX , направленная вдоль по диаметру OA , и ось OY , направленная вдоль по диаметру, сопряженному къ диаметру OA ; въ этихъ координатахъ уравненіе эллипса:

$$\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1,$$

гдѣ α и β суть длины сопряженныхъ полуосей.

Величина площади выразится такъ:

$$S = \sin \theta \int_{x_1}^{\alpha} y dx = \frac{\sin \theta}{2} \left(\alpha \beta \arccos \frac{x_1}{\alpha} - x_1 y_1 \right),$$

гдѣ x_1 есть длина OD , а y_1 —длина DE ; θ есть уголъ YOX .

Косоугольные координаты x_c и y_c центра инерціи C опредѣлятся по формуламъ:

$$Sx_c = \sin \theta \int_{x_1}^{\alpha} xy dx = \sin \theta \cdot \frac{\alpha^2 y_1}{3\beta^2}.$$

$$Sy_c = \frac{\sin \theta}{2} \int_{x_1}^{\alpha} y^2 dx = \sin \theta \cdot \frac{\beta^2 (\alpha - x_1)^2}{2 \cdot 3\alpha^2} (2\alpha + x_1).$$

Центръ инерціи площади AOB ($x_c = 0$, $y_c = \beta$) находится въ точкѣ имѣющей слѣдующіе координаты:

$$\frac{4\alpha}{3\pi}, \quad \frac{4\beta}{3\pi}.$$

Примѣръ 74-й. Центръ инерціи площади, ограниченной параболою AE (черт. 52), побочною осью AD , проведенною черезъ точку A и полу хордою DE , сопряженною къ этой оси.

За оси косоугольныхъ координатъ возьмемъ: побочную ось AD —за ось X^{can} и касательную къ параболѣ въ точкѣ A —за ось Y^{can} ; уравненіе параболы: $y^2 = 2px$. Координаты центра инерціи:

$$x_c = \frac{3}{5} x, \quad y_c = \frac{3}{8} y_1.$$

Примѣръ 75-й. Центръ инерціи площади эллиптического сегмента

$E_1AE_2E_1$ (черт. 51-й) находится на полудіаметрѣ OA_1 , сопряженномъ хордѣ сегмента, и отстоитъ на разстояніи:

$$OC_1 = \frac{2a^2y_1^3}{3\beta^2\left(\alpha\beta\arccos\left(\frac{x_1}{a}\right) - x_1y_1\right)}$$

отъ центра эллипса, гдѣ y_1 есть длина половины хорды, а x_1 — разстояніе OD_1 .

Примѣръ 76-й. Определить положеніе центра инерціи площади эллиптического сектора OE_1AE_2 (черт. 51-й).

Эта площадь состоитъ изъ площади сектора $E_1AE_2E_1$ и изъ площади треугольника OE_1E_2 ; величина площади послѣдняго равна $x_1y_1 \sin \theta$ и центръ инерціи его находится въ точкѣ C_2 , отстоящей отъ центра на длину $OC_2 = \frac{2}{3}x_1$; поэтому величина площади сектора равна:

$$\alpha\beta \sin \theta \arccos\left(\frac{x_1}{a}\right),$$

а центръ инерціи ея находится на діаметрѣ OA и отстоитъ отъ центра эллипса на разстояніи:

$$OC' = \frac{2}{3} \frac{\alpha y_1}{\beta \arccos\left(\frac{x_1}{a}\right)}.$$

Примѣръ 77-й. Положеніе центра инерціи трапеціи.

Очевидно, центръ инерціи находится на линіи DD_1 , соединяющей середины параллельныхъ сторонъ трапеціи ABV_1A_1 (черт. 53-й); чтобы найти положеніе его на этой линіи, примемъ во вниманіе, что трапеція можетъ быть раздѣлена на два треугольника ABA_1 и A_1BV_1 , что центръ инерціи перваго находится въ точкѣ пересѣченія K прямой BD_1 съ прямою линіею QQ_1 , отстоящею отъ AA_1 на одну треть высоты трапеціи, что центръ инерціи втораго находится въ точкѣ пересѣченія L прямой A_1D съ прямою PP_1 , отстоящею на одну треть высоты трапеціи отъ BB_1 и что центръ инерціи трапеціи долженъ находиться на прямой линіи LK , соединяющей точки K и L ; слѣдовательно, искомый центръ инерціи находится въ точкѣ пересѣченія C линіи DD_1 линіею KL .

Для составленія формулы, выражающей разстояніе центра инерціи C отъ AA_1 , замѣтимъ, что площади треугольниковъ ABA_1 и BA_1V_1 равны $\frac{1}{2}ha$ и $\frac{1}{2}hb$, что площадь трапеціи $= \frac{1}{2}h(a+b)$, гдѣ h озна-

часть высоты треугольника и трапеции, а a и b — длины сторонъ AA_1 и BB_1 , и что разстоянія точекъ K и L отъ AA_1 равны $\frac{1}{3}h$ и $\frac{2}{3}h$; окажется, что разстояніе точки C' отъ этой же стороны равно:

$$\frac{1}{3}h \frac{a+2b}{a+b}$$

и что отношеніе длинъ $C'D_1$ и CD равно:

$$\frac{C'D_1}{CD} = \frac{a+2b}{b+2a}.$$

Примѣръ 78. Положенія центровъ инерціи частей поверхности сферы.

Положенія центровъ инерціи какихъ-либо частей сферической поверхности могутъ быть опредѣлены при помощи слѣдующихъ формулъ.

Пусть S есть величина площади нѣкоторой сферической фигуры ABC (черт. 54), находящейся на сферѣ радиуса R , и S_p — величина площади ортогональной проэкціи площади S на какую-либо плоскость P_1P , проходящую черезъ центръ сферы.

Разстояніе p центра инерціи площади S отъ плоскости P_1P выразится такъ:

$$p = \frac{R \int \int \cos(r, n) dS}{S}, \dots \dots \dots (624)$$

гдѣ n означаетъ направленіе нормали къ плоскости P_1P , а r — направленіе радіуса вектора, проведеннаго изъ центра O сферы къ элементу поверхности dS ; произведеніе $R \cos(r, n)$ выражаетъ разстояніе элемента dS отъ плоскости P_1P ; интегралъ числителя распространенъ по всей площади S .

Такъ какъ направленіе r есть направленіе наружной нормали элемента поверхности dS , то интегралъ числителя выражаетъ величину площади S_p , а потому формула (624) выражаетъ, что

$$p = \frac{RS_p}{S} \dots \dots \dots (624)$$

Если черезъ центръ сферы проведемъ какую-либо другую плоскость $P_1'P'$, то пересѣченіе ея съ проецирующею цилиндрическою поверхностью сферической фигуры ABC будетъ косоугольною проеціею этой фигуры на эту новую плоскость (на чертежѣ (54) ортогональная проеція сферической фигуры ABC на плоскость P_1P есть фигура $A_1B_1C_1$,

фигура же $A'B'C'$ есть пересѣченіе плоскости P_1P' съ проецирующимъ цилиндромъ); означимъ черезъ α уголъ между плоскостями P_1P и P_1P' и черезъ S_p величину площади пересѣченія проецирующаго цилиндра съ плоскостью P_1P' ; кромѣ того, опустимъ изъ центра инерціи Π площади S перпендикуляръ на плоскость P_1P' и продолжимъ его до пересѣченія Q съ плоскостью P_1P ; длину ΠQ означимъ черезъ p' .

Очевидно, что $S_p = S_p' \cos \alpha$ и что $p = p' \cos \alpha$, поэтому изъ формулы (624) получается слѣдующая:

$$p' = \frac{RS_p'}{S} \dots \dots \dots (625)$$

Примѣнимъ формулу (624) къ опредѣленію положенія центра инерціи площади сферическаго сегмента. Очевидно, что центръ инерціи находится на оси фигуры сегмента. Взявъ за плоскость P_1P плоскость, перпендикулярную къ этой оси, и принявъ во вниманіе, что величина поверхности сегмента равна $2\pi R^2(1 - \cos \beta)$, а величина площади его проеціи $= \pi R^2 \sin^2 \beta$, гдѣ β есть уголъ (r, n) для точекъ ребра сегмента, мы найдемъ что

$$p = \frac{1}{2} R(1 + \cos \beta),$$

то-есть, что центръ инерціи поверхности сегмента находится на серединѣ его высоты.

Центръ инерціи поверхности сферическаго пояса также находится на серединѣ его высоты.

Примѣнимъ ту же формулу (624) къ опредѣленію положенія центра инерціи сферическаго треугольника; а именно, опредѣлимъ разстоянія: $p(BC)$, $p(CA)$, $p(AB)$ центра инерціи до плоскостей, проведенныхъ черезъ стороны треугольника.

Проеція площади треугольника на плоскости OBC (черт. 55) равняется площади сектора BOC , безъ площадей OA_1B и OA_1C проецій секторовъ OAB и OAC на ту же плоскость, т.-е.:

$$S_p = \frac{R^2}{2} (a - c \cos B - b \cos C).$$

Величина площади сферическаго треугольника выражается, какъ известно такъ:

$$S = R^2(A + B + C - \pi) \quad *).$$

*) Предполагается, что углы a, b, c, A, B, C измѣряются отношеніями длинъ дугъ къ радіусу.

Поэтому, изъ формулы (624) получимъ:

$$p(BC) = \frac{R(a - c \cos B - b \cos C)}{2(A + B + C - \pi)};$$

точно такъ же получимъ:

$$p(CA) = \frac{R(b - a \cos C - c \cos A)}{2(A + B + C - \pi)}, \quad p(AB) = \frac{R(c - b \cos A - a \cos B)}{2(A + B + C - \pi)}.$$

Положеніе центра инерціи Π можетъ быть еще выражено разстояніями его отъ плоскостей, проходящихъ черезъ центръ сферы и перпендикулярныхъ къ радіусамъ OA , OB , OC ; эти разстоянія опредѣлимъ по формулѣ (625), рассматривая секторы OBC , OCA и OAB какъ косоугольные проэкціи площади треугольника ABC на плоскости большихъ круговъ BC , CA и AB ; найдемъ, что эти разстоянія суть:

$$\frac{R^2 a}{2S}, \quad \frac{R^2 b}{2S}, \quad \frac{R^2 c}{2S}.$$

Переходя теперь къ примѣрамъ опредѣленія положенія центровъ инерціи сплошныхъ однородныхъ тѣлъ, мы докажемъ слѣдующую теорему, которая оказывается весьма полезною въ примѣненіи ко многимъ вопросамъ этого рода.

Теорема. Представимъ себѣ сплошное однородное тѣло, ограниченное двумя параллельными плоскостями Π_1 и Π_2 (черт. 56) и боковой поверхностью такого рода, что величина площади сѣченія тѣла какою-либо плоскостью, параллельною плоскостямъ Π_1 и Π_2 , выражается такъ:

$$\Pi = a + bx + cx^2, \dots \dots \dots (626)$$

гдѣ x есть разстояніе плоскости сѣченія отъ плоскости Π_1 ; a , b , c суть постоянные коэффициенты, зависящіе отъ вида боковой поверхности. Отношеніе между разстояніями центра инерціи этого тѣла отъ плоскостей Π_1 и Π_2 выражается такъ:

$$\frac{z_c}{h - z_c} = \frac{2\Pi_0 + \Pi_2}{2\Pi_0 + \Pi_1}, \dots \dots \dots (627)$$

гдѣ Π_1 и Π_2 — величины площадей основаній нижняго и верхняго, Π_0 — площадь сѣченія, проведеннаго черезъ середину высоты h .

Легко доказать эту теорему. Разстояніе центра инерціи отъ нижняго основанія выразится формулою:

$$z_c = \frac{1}{V} \int_0^h x \Pi dz = \frac{1}{V} \left(\frac{h^2}{2} + b \frac{h^3}{3} + c \frac{h^4}{4} \right),$$

гдѣ V есть объемъ тѣла; но числитель этого выраженія можетъ быть представленъ такъ:

$$\frac{h^3}{6} \left[2 \left(a + b \frac{h}{2} + c \frac{h^2}{4} \right) + (a + bh + ch^2) \right],$$

поэтому:

$$z_c = h^2 \frac{(2\Pi_0 + \Pi_2)}{6V}.$$

Такъ же найдемъ, что разстоянiе центра инерцiи отъ верхняго основанiя выражается такъ:

$$h - z_c = h^2 \frac{(2\Pi_0 + \Pi_1)}{6V},$$

а потому и получимъ равенство (627).

Примѣръ 79-й. Центръ инерцiи объема сферическаго пояса находится на оси его; пусть k_1 и k_2 суть разстоянiя основанiй сегмента отъ центра сферы; въ этомъ случаѣ:

$$\Pi = \pi(R^2 - k_1^2 - 2k_1z - z^2).$$

По формулѣ (627) найдемъ:

$$\frac{z_c}{h - z_c} = \frac{3R^2 - k_2^2 - \frac{1}{2}(k_1 + k_2)^2}{3R^2 - k_1^2 - \frac{1}{2}(k_1 + k_2)^2}; \quad h = k_2 - k_1.$$

Чтобы примѣнить эту формулу къ сферическому сегменту, надо положить въ ней $k_2 = R$.

Изъ этой формулы окажется, что центръ инерцiи однородной полусферы дѣлитъ ось ея въ отношенiи 3 къ 5.

Примѣръ 80-й. Центръ инерцiи части параболоида вращенiя, заключающейся между плоскостями, отстоящими отъ вершины на разстоянiяхъ k_1 и k_2 .

Въ этомъ случаѣ:

$$\Pi_1 = 2\pi r k_1, \quad \Pi_2 = 2\pi r k_2, \quad \Pi_0 = \pi r(k_1 + k_2),$$

а потому

$$\frac{z_c}{h - z_c} = \frac{k_1 + 2k_2}{k_2 + 2k_1}.$$

Примѣръ 81-й. Центръ инерцiи какого-либо пояса однополаго гипер-

болоида вращенія. Пусть k_1 и k_2 суть разстоянія плоскостей пояса отъ центра гиперболоида.

$$П_1 = \pi a^2 \left(1 + \frac{k_1^2}{b^2}\right), \quad П_2 = \pi a^2 \left(1 + \frac{k_2^2}{b^2}\right)$$

$$П_0 = \pi a^2 \left(1 + \frac{(k_1 + k_2)^2}{4b^2}\right)$$

$$\frac{z_c}{h - z_c} = \frac{6b^2 + (k_1 + k_2)^2 + 2k_2^2}{6b^2 + (k_1 + k_2)^2 + 2k_1^2}.$$

Примѣръ 82-й. Положеніе центра инерціи какой-либо части трехоснаго эллипсоида, заключающейся между двумя параллельными плоскостями.

Главные діаметры діаметральной плоскости, параллельной плоскостямъ $П_1$ и $П_2$, примемъ за оси $X^{овъ}$ и $Y^{овъ}$, а направленіе полудіаметра, сопряженнаго къ этой діаметральной плоскости, за ось Z ; слѣдовательно, оси $X^{овъ}$ и $Y^{овъ}$ ортогональны между собою, а ось Z можетъ быть наклонена къ нимъ. Въ этихъ координатахъ уравненіе поверхности эллипсоида будетъ:

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} + \frac{z^2}{\gamma^2} = 1,$$

гдѣ A и B суть длины главныхъ полудіаметровъ діаметрального сѣченія, а γ —длина полудіаметра, совпадающаго съ осью Z .

Пусть k_1 и k_2 суть разстоянія по оси $Z^{овъ}$, плоскостей $П_1$ и $П_2$ отъ центра эллипсоида; на основаніи извѣстнаго выраженія площади эллипса найдемъ:

$$П_1 = \pi AB \left(1 - \frac{k_1^2}{\gamma^2}\right), \quad П_2 = \pi AB \left(1 - \frac{k_2^2}{\gamma^2}\right)$$

$$П_0 = \pi AB \left(1 - \frac{(k_1 + k_2)^2}{4\gamma^2}\right).$$

Однородный эллипсоидъ симметриченъ по отношенію ко всякой діаметральной плоскости, а слѣдовательно и по отношенію къ плоскостямъ XZ и YZ ; эти плоскости суть также плоскости симметріи разсматриваемаго нами эллиптическаго пояса, а потому центръ инерціи его находится на оси Z . Примѣняя формулу (627), мы замѣнимъ въ ней отношеніе кратчайшихъ разстояній центра инерціи отъ плоскостей $П_1$ и $П_2$ отношеніемъ разстояній, считаемыхъ по оси Z ; получимъ:

$$\frac{\zeta_c - k_1}{k_2 - \zeta_c} = \frac{6\gamma^2 - (k_1 + k_2)^2 - 2k_2^2}{6\gamma^2 - (k_1 + k_2)^2 - 2k_1^2}.$$

Если положить $k_1=0$ и $k_2=\gamma$, то найдемъ, что $\zeta_c = \frac{3}{8} \gamma$.

Примѣръ 83-й. Центр инерціи конуса, боковая поверхность котораго есть коническая поверхность какого-либо порядка и вида, находится на прямой линіи, соединяющей вершину конуса съ центромъ инерціи его основанія; нетрудно убѣдиться, что центр инерціи отстоитъ отъ основанія на одну четверть длины этой линіи, если считать разстояніе вдоль по ней.

Примѣръ 84-й. Однородное тѣло имѣетъ видъ многогранника, двѣ противоположныя грани котораго параллельны, а остальные грани, образующія боковую поверхность, суть треугольники и трапеціи; въ этомъ случаѣ площадь каждаго сѣченія, параллельнаго основаніямъ, тоже выразится формулою (626).

Въ самомъ дѣлѣ, площадь Π можетъ быть разбита на нѣсколько треугольниковъ, вершины которыхъ совпадаютъ съ вершинами периметра площади Π ; площадь каждаго такого треугольника выражается такъ:

$$\frac{1}{2} [(x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1)],$$

гдѣ (x_1, y_1) (x_2, y_2) (x_3, y_3) суть координаты вершинъ треугольника (предполагается, что плоскость XU совпадаетъ съ основаніемъ Π_1). Такъ какъ каждая вершина находится на одномъ изъ прямолинейныхъ боковыхъ реберъ многогранника, то координаты x_i, y_i вершины (i) опредѣлятся изъ уравненій

$$x_i = \alpha_i z + \beta_i, \quad y_i = \gamma_i z + \delta_i$$

того ребра, на которомъ находится эта вершина, а потому площадь каждаго треугольника выразится тричленомъ вида (626) и подобнымъ же тричленомъ выразится площадь Π .

По этой причинѣ разстояніе центра инерціи такого многогранника отъ одного изъ основаній будетъ извѣстно, если будемъ знать высоту многогранника, величины площадей основаній, верхняго и нижняго, и величину площади сѣченія, проведеннаго черезъ середину высоты.

Центръ инерціи пирамиды, усѣченной параллельно основанію, находится на линіи, соединяющей центры инерціи верхняго и нижняго основаній; онъ отстоитъ отъ нижняго основанія на разстояніи:

$$z_c = h \frac{\Pi_1 + 3\Pi_2 + 2\sqrt{\Pi_1\Pi_2}}{4(\Pi_1 + \Pi_2 + \sqrt{\Pi_1\Pi_2})},$$

считая расстояние по вертикальному направлению, такъ же, какъ и высоту h .

Тетраэдръ можно тоже причислить къ многогранникамъ рассматриваемой или категоріи. Каждую пару противоположныхъ реберъ тетраэдра можно рассматривать какъ два безконечно-узкіе прямоугольника, плоскости которыхъ параллельны. Привѣняя къ тетраэдру формулу (637), мы должны положить $\Pi_1 = 0$, $\Pi_2 = 1$; окажется, что центръ инерціи отворотнаго тетраэдра находится въ точкѣ пересѣченія четирахъ прямыхъ, соединяющихъ середины противоположныхъ реберъ; эта точка дѣлитъ каждую изъ этихъ прямыхъ пополамъ.

§ 92. Открытіе закона движенія центра инерціи Лагранжъ принимаетъ Ньютона; въ книгѣ *Philosophiæ naturalis principia mathematica*, въ главѣ *Axiomata sive leges motus*, въ примѣчаніи (*corollaria*) 4-я, находитъ слѣдующее выраженіе:

Commune gravitatis centrum corporum duorum vel plurium ab actionibus corporum inter se non mutat statum suum vel motus vel quietis; et propterea corporum omnium in se mutuo agentium (exclusis actionibus et impedimentis externis) commune centrum gravitationis vel quiescit vel movetur uniformiter in directam.

(Общій центръ тяжести двухъ или нѣсколькихъ тѣлъ не измѣняетъ своего состоянія движенія или покоя вслѣдствіе взаимно-дѣйствій между этими тѣлами; если существуютъ только взаимодѣйствія между тѣлами и нѣтъ ни вѣшнихъ силъ, ни препятствій, то общій центръ тяжести либо покоится, либо движется равномерно по прямой линіи).

Это выраженіе опредѣляетъ только частный случай закона движенія центра инерціи. Лагранжъ говоритъ, что общая форма закона дана д'Аламберомъ, но слѣдуетъ признать, что ясное выраженіе самой общей формы закона принадлежитъ самому же Лагранжу (въ *Mécanique analytique*).

ГЛАВА VIII.

Законъ площадей.

§ 93. Составленіе трехъ дифференціальныхъ уравненій.

Къ дифференціальнымъ уравненіямъ движенія (517) (§ 70) каждой точки системы приложимъ первый изъ тѣхъ двухъ приѣмовъ преобразованія, которые указаны въ § 21-мъ; всѣ уравненія вида (110, а) сложимъ; составитсѣ слѣдующее дифференціальное уравненіе:

$$\begin{aligned} \frac{d\lambda_x}{dt} = \mathcal{L}_x + \lambda(u_1) \sum_{i=1}^{i=n} \left(y_i \frac{\partial u_1}{\partial z_i} - z_i \frac{\partial u_1}{\partial y_i} \right) + \dots \\ \dots + \lambda(u_p) \sum_{i=1}^{i=n} \left(y_i \frac{\partial u_p}{\partial z_i} - z_i \frac{\partial u_p}{\partial x_i} \right); \dots \quad (628, \text{ а}) \end{aligned}$$

здѣсь λ_x и \mathcal{L}_x суть суммы, выражаемыя формулами (629, а) и (630, а) приведенными ниже.

Подобнымъ же образомъ получимъ еще два дифференціальныхъ уравненія:

$$\frac{d\lambda_y}{dt} = \mathcal{L}_y + \sum_{k=1}^{k=p} \lambda(u_k) \sum_{i=1}^{i=n} \left(z_i \frac{\partial u_k}{\partial x_i} - x_i \frac{\partial u_k}{\partial z_i} \right) \dots \quad (628, \text{ б})$$

$$\frac{d\lambda_z}{dt} = \mathcal{L}_z + \sum_{k=1}^{k=p} \lambda(u_k) \sum_{i=1}^{i=n} \left(x_i \frac{\partial u_k}{\partial x_i} - y_i \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right), \dots \quad (628, \text{ в})$$

гдѣ:

$$\lambda_x = \sum_{i=1}^{i=n} m_i \left(y_i \frac{dz_i}{dt} - z_i \frac{dy_i}{dt} \right) \dots \dots \dots (629, \text{ а})$$

$$\lambda_y = \sum_{i=1}^{i=n} m_i \left(z_i \frac{dx_i}{dt} - x_i \frac{dz_i}{dt} \right) \dots \dots \dots (629, \text{ б})$$

$$h_x = \sum_{i=1}^{i=n} m_i \left(x_i \frac{dy_i}{dt} - y_i \frac{dx_i}{dt} \right) \dots \dots \dots (629, \text{ c})$$

$$L_x = \sum_{i=1}^{i=n} (y_i Z_i - z_i Y_i) \dots \dots \dots (630, \text{ a})$$

$$L_y = \sum_{i=1}^{i=n} (z_i X_i - x_i Z_i) \dots \dots \dots (630, \text{ b})$$

$$L_z = \sum_{i=1}^{i=n} (x_i Y_i - y_i X_i) \dots \dots \dots (630, \text{ c})$$

§ 94. Главный моментъ силъ вокругъ даннаго центра Перемѣна центра моментовъ. Главный векторъ.

Въ параграфѣ 22-мъ было объяснено значеніе разностей, заключающихся подъ знакомъ суммъ въ выраженіяхъ (630); это суть моменты вокругъ положительныхъ направленій осей $X^{овъ}$, $Y^{овъ}$ и $Z^{овъ}$ равнодѣйствующей F , задаваемыхъ силъ, приложенныхъ къ точкѣ m , и, вмѣстѣ съ тѣмъ, это суть проэкціи на тѣ же оси момента силы F , вокругъ начала координатъ.

Обозначая, какъ условлено въ § 22-мъ, знакомъ $L_0(F)$ величину и направленіе момента силы F , вокругъ начала координатъ, можемъ представить формулы (630) подъ слѣдующимъ видомъ:

$$\left. \begin{aligned} L_x &= \sum_{i=1}^{i=n} L_0(F_i) \cos(L_0(F_i), X), \\ L_y &= \sum_{i=1}^{i=n} L_0(F_i) \cos(L_0(F_i), Y), \\ L_z &= \sum_{i=1}^{i=n} L_0(F_i) \cos(L_0(F_i), Z), \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (631)$$

Мы будемъ предполагать, что моментъ каждой силы вокругъ даннаго центра изображенъ длиною, отложенною отъ центра; относительно величины и направленія этой длины см. стр. 89 — 91 параграфа 22-го; согласно съ этимъ линейныя изображенія моментовъ силъ F_1, F_2, \dots, F_n вокругъ начала координатъ суть длины, отложенныя отъ этой точки.

Изъ выраженій (631) видно, что M_x, M_y, M_z суть проеэкціи на оси координатъ геометрической суммы моментовъ задаваемыхъ силъ F_1, F_2, \dots, F_n вокругъ начала координатъ (точка O); эта геометрическая сумма называется *главнымъ моментомъ силъ F_1, F_2, \dots, F_n вокругъ центра O* . Условимся обозначать величину и направленіе этого главнаго момента знакомъ M_0 ; вмѣстѣ съ тѣмъ будемъ предполагать, что *линейное изображеніе этого главнаго момента отложено отъ точки O* .

Слѣдовательно:

$$M_x = M_0 \cos(M_0, X), \quad M_y = M_0 \cos(M_0, Y), \quad M_z = M_0 \cos(M_0, Z).$$

Если вмѣсто точки O взять за центръ моментовъ другую точку $K(x_k, y_k, z_k)$, то моменты тѣхъ же силъ вокругъ новаго центра будутъ имѣть другія величины и другія направленія.

Чтобы составить выраженія проеэкцій на оси координатъ момента $L_k(F_i)$ силы F_i (приложенной къ точкѣ m_i) вокругъ центра K , мы на время предположимъ, что этотъ центръ взять за новое началѣ координатъ и примѣнимъ прежнія формулы (113) § 22-го; такъ какъ координаты точки m_i относительно новыхъ плоскостей координатъ (которыя параллельны прежнимъ, но пересѣкаются въ новомъ началѣ координатъ K) равны $(x_i - x_k), (y_i - y_k), (z_i - z_k)$, то, по формуламъ (113) § 22-го, получимъ слѣдующія выраженія:

$$\left. \begin{aligned} L_k(F_i) \cos(L_k(F_i), X) &= (y_i - y_k)Z_i - (z_i - z_k)Y_i, \\ L_k(F_i) \cos(L_k(F_i), Y) &= (z_i - z_k)X_i - (x_i - x_k)Z_i, \\ L_k(F_i) \cos(L_k(F_i), Z) &= (x_i - x_k)Y_i - (y_i - y_k)X_i, \end{aligned} \right\} \dots (632)$$

Геометрическая сумма моментовъ силъ F_1, F_2, \dots, F_n вокругъ центра K называется главнымъ моментомъ этихъ силъ вокругъ этого центра; мы будемъ обозначать этотъ главный моментъ знакомъ M_k , а его проеціи на оси координатъ—знаками $(M_k)_x, (M_k)_y, (M_k)_z$; линейное изображеніе его, т.-е. длину, изображающую величину и направленіе этого главного момента, мы будемъ предполагать отложенною или проведенною изъ точки K .

Проеція на ось $X^{ну}$ главного момента M_k выразится слѣдующею суммою:

$$(M_k)_x = \sum_{i=1}^n ((y_i - y_k)Z_i - (z_i - z_k)Y_i),$$

или, что то же самое, такъ:

$$(M_k)_x = M_x + z_k B_y - y_k B_z \dots \dots (633, a)$$

Подобнымъ же образомъ получимъ:

$$(M_k)_y = M_y + x_k B_z - z_k B_x \dots \dots (633, b)$$

$$(M_k)_z = M_z + y_k B_x - x_k B_y \dots \dots (633, c)$$

здѣсь B_x, B_y, B_z означаютъ слѣдующія суммы:

$$B_x = \sum_{i=1}^n X_i, B_y = \sum_{i=1}^n Y_i, B_z = \sum_{i=1}^n Z_i \dots \dots (634)$$

т.-е., это суть проеціи на оси координатъ геометрической суммы B всѣхъ силъ F_1, F_2, \dots, F_n ; если бы всѣ эти силы, сохраняя свои величины и направленія, были приложены къ одной точкѣ, то сила B была бы ихъ равнодѣйствующею. Мы условимся называть геометрическую сумму B данныхъ силъ, приложенныхъ къ различнымъ точкамъ, *главнымъ векторомъ этихъ силъ* *).

*) Многие авторы называютъ геометрическую сумму B данныхъ силъ равнодѣйствующею и гдѣ даютъ нововъ некоторымъ читателямъ, мало

Изъ формулъ (632) и (633) можно извлечь правило, определяющее, какъ измѣняется величина и направленіе главнаго момента данныхъ силъ при перемѣнѣ центра моментовъ.

Предположимъ, что главный векторъ B данныхъ силъ проведенъ изъ начала координатъ O и вообразимъ, что онъ изображаетъ нѣкую силу, приложенную къ этой точкѣ; означимъ черезъ $L_k(B_0)$ моментъ этой воображаемой силы вокругъ центра K и составимъ, по формуламъ (632), выраженія проецій этого момента на оси координатъ; для этого надо въ этихъ формулахъ подставить: B_0, B_x, B_y, B_z вмѣсто F_i, X_i, Y_i, Z_i и нули—вмѣсто x_i, y_i, z_i ; получимъ:

$$L_k(B_0) \cos (L_k(B_0), X) = z_k B_y - y_k B_z,$$

$$L_k(B_0) \cos (L_k(B_0), Y) = x_k B_z - z_k B_x,$$

$$L_k(B_0) \cos (L_k(B_0), Z) = y_k B_x - x_k B_y;$$

это—тѣ самыя разности, которыя находятся во вторыхъ частяхъ формулъ (633), слѣдовательно, эти формулы выражаютъ, что:

$$\overline{L}_k = \overline{L}_0 + \overline{L_k(B_0)}, \dots \dots \dots (635)$$

т.-е., что главный моментъ данныхъ силъ вокругъ центра K можетъ быть полученъ какъ геометрическая сумма, составленная изъ главнаго момента тѣхъ же силъ вокругъ центра O и изъ момента вокругъ центра K главнаго вектора тѣхъ же силъ, проведеннаго изъ точки O .

На чертежѣ 57-мъ изображено построеніе главнаго момента \overline{L}_k по этому правилу; \overline{OL}_0 изображаетъ главный моментъ \overline{L}_0 , длина $\overline{KL'}$ —моментъ воображаемой силы \overline{OB}_0 , приложенной къ точкѣ O , вокругъ

знакомымъ съ механикою, внадать въ заблужденія относительно значенія этой воображаемой силы B .

Мы назвали силу B „главнымъ векторомъ“ слѣдую примѣру О. И. Сомова (см. Рациональную Механику, часть 2-ю, стр. 276).

центра K ; длина $K.I_k$, изображающая главный момент I_k , есть диагональ параллелограмма, построенного на сторонах KL и $K.I'_0$; послѣдняя равна и параллельна длинѣ OL .

Приведенное здѣсь правило измѣненія главнаго момента при перемѣнѣ центра моментовъ тождественно съ правиломъ, опредѣляющимъ измѣненіе скорости поступательной части движенія твердаго тѣла при перемѣнѣ полюса вращенія (см. стр. 127 кинематической части); формулы (633) имѣютъ тотъ же составъ, что и формулы (144) страницы 127-й кинематической части, такъ что изъ послѣднихъ получимъ первыя, если змѣнимъ:

полюсъ $IO(x_o, y_o, z_o)$	— —	центромъ O ,
полюсъ $Я(x_a, y_a, z_a)$	— —	центромъ $K(x_k, y_k, z_k)$,
угловую скорость: $\Omega(P, Q, R),$	$\left\{ \begin{array}{c} \text{—} \\ \text{—} \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{c} \text{главнымъ векторомъ:} \\ B(B_x, B_y, B_z), \end{array} \right.$
скорость полюса IO : $w_o(x'_o, y'_o, z'_o),$	$\left\{ \begin{array}{c} \text{—} \\ \text{—} \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{c} \text{главнымъ моментомъ:} \\ I_o(I_{ox}, I_{oy}, I_{oz}), \end{array} \right.$
скорость полюса $Я$: $u_a(x'_a, y'_a, z'_a)$	$\left\{ \begin{array}{c} \text{—} \\ \text{—} \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{c} \text{главнымъ моментомъ:} \\ I_k(I_{kx}, I_{ky}, I_{kz}). \end{array} \right.$

Подмѣтивъ такую взаимность между теоріею скоростей точекъ неизмѣняемой среды и теоріею главныхъ моментовъ данныхъ силъ вокругъ различныхъ центровъ, мы можемъ, на основаніи этой взаимности, заключить о существованіи слѣдующей зависимости между величинами и направленіями главныхъ моментовъ вокругъ различныхъ центровъ.

Главные моменты данныхъ силъ вокругъ различныхъ центровъ, находящихся на какой-либо, параллельной главному вектору этихъ силъ, прямой, равны и параллельны между собою.

Всѣ главные моменты данныхъ силъ вокругъ всевозможныхъ

центровъ имѣютъ равныя проэкціи на направленіе главнаго вектора; а именно эти проэкціи равны:

$$L_k \cos(L_k, B) = \frac{L_x B_x + L_y B_y + L_z B_z}{B} = L_0 \cos(L_0, B) \dots (636)$$

Существуетъ прямая линія, параллельная главному вектору, образуемая тѣми центрами, вокругъ которыхъ главный моментъ имѣетъ наименьшую величину; эта линія называется центральной осью данныхъ силъ. Главный моментъ вокругъ какого-либо центра, находящагося на центральной оси, направленъ по самой оси и равенъ:

$$L_y = L_0 \cos(L_0, B) = \frac{L_x B_x + L_y B_y + L_z B_z}{B} \dots \dots (636, \text{bis})$$

Если главный моментъ вокругъ какого-либо центра перпендикуляренъ къ главному вектору, то главные моменты вокругъ всѣхъ центровъ перпендикулярны къ тому же направлению, а главный моментъ вокругъ центровъ, находящихся на центральной оси, равенъ нулю: значитъ, если главный векторъ и главный моментъ данныхъ силъ вокругъ начала координатъ удовлетворяютъ условію:

$$L_x B_x + L_y B_y + L_z B_z = 0, \dots \dots \dots (637)$$

то можно найти безчисленное множество центровъ, вокругъ которыхъ главный моментъ данныхъ силъ равенъ нулю; всѣ эти центры лежатъ на прямой, параллельной главному вектору данныхъ силъ.

§ 95. Главный моментъ количествъ движенія системы матерьяльныхъ точекъ.

Величины l_x, l_y, l_z (629) § 93 суть проэкціи на оси координатъ главнаго момента вокругъ начала координатъ количествъ движенія всѣхъ точекъ системы; мы будемъ обозначать величину и направленіе этого главнаго момента знакомъ l_0 и будемъ изображать его длиною, проведенною изъ начала координатъ, равною геометрической суммѣ длинъ, изображающихъ моменты $l_0(m_1 v_1), l_0(m_2 v_2), \dots \dots l_0(m_n v_n)$ количествъ движеній точекъ системы вокругъ того же начала координатъ.

Относительно главныхъ моментовъ количествъ движенія системы точекъ вокругъ другихъ центровъ можно сказать то же самое, что сказано относительно главныхъ моментовъ силъ.

Главный векторъ количествъ движенія системы точекъ можетъ быть названъ количествомъ движенія центра инерціи всей системы, если предположить, что въ послѣднемъ сосредоточена масса всей системы; въ самомъ дѣлѣ, на основаніи равенствъ (620) § 86-го получимъ:

$$\sum_{i=1}^{i=n} m_i x_i' = M x_c', \quad \sum_{i=1}^{i=n} m_i y_i' = M y_c', \quad \sum_{i=1}^{i=n} m_i z_i' = M z_c' \quad . \quad . \quad (638)$$

Проекція на оси координатъ главнаго момента \mathcal{L}_k количествъ движенія системы вокругъ центра K выразятся слѣдующимъ образомъ:

$$\begin{aligned} (\mathcal{L}_k)_x &= \mathcal{L}_k \cos(\mathcal{L}_k, X) = \sum_{i=1}^{i=n} m_i ((y_i - y_k) z_i' - (z_i - z_k) y_i') = \\ &= \mathcal{L}_x + M y_c' z_k - M z_c' y_k \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (639, a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\mathcal{L}_k)_y &= \mathcal{L}_k \cos(\mathcal{L}_k, Y) = \sum_{i=1}^{i=n} m_i ((z_i - z_k) x_i' - (x_i - x_k) z_i') = \\ &= \mathcal{L}_y + M z_c' x_k - M x_c' z_k \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (639, b) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\mathcal{L}_k)_z &= \mathcal{L}_k \cos(\mathcal{L}_k, Z) = \sum_{i=1}^{i=n} m_i ((x_i - x_k) y_i' - (y_i - y_k) x_i') = \\ &= \mathcal{L}_z + M x_c' y_k - M y_c' x_k \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (639, c) \end{aligned}$$

Проекція на оси координатъ главнаго момента количествъ движенія системы точекъ могутъ быть еще выражены въ секторьяльныхъ

скоростяхъ проэкцій точекъ на плоскости координатъ (см. стр. 99—101); наримѣръ:

$$\mathcal{L}_x = 2 \sum_{i=1}^{i=n} m_i v_i (yz), \dots \dots \dots (640, a)$$

$$\mathcal{L}_y = 2 \sum_{i=1}^{i=n} m_i v_i (zx), \dots \dots \dots (640, b)$$

$$\mathcal{L}_z = 2 \sum_{i=1}^{i=n} m_i v_i (xy) \dots \dots \dots (640, c)$$

§ 96. Значеніе дифференціальныхъ уравненій (628), составленныхъ въ § 93-мъ.

Во вторыхъ частяхъ этихъ уравненій заключаются проэкціи на оси координаты главнаго момента вокругъ начала координатъ всѣхъ силъ и реакцій, приложенныхъ къ точкамъ системы.

Длина, изображающая \mathcal{L}_0 и проведенная изъ начала координатъ измѣняется съ теченіемъ времени свою величину и свое направленіе; конецъ ея описываетъ при этомъ нѣкоторую кривую линію, которую можно назвать *годографомъ главнаго момента количества движенія* системы точекъ.

Уравненія (628) выражаютъ, что скорость точки, чертящей годографъ главнаго момента (вокругъ O) количества движенія системы точекъ, равна и параллельна длинѣ, изображающей главный моментъ (вокругъ O) всѣхъ задаваемыхъ силъ и реакцій, приложенныхъ къ точкамъ системы.

§ 97. Видъ дифференціальныхъ уравненій (628) въ тѣхъ случаяхъ, въ которыхъ главный моментъ реакцій равенъ нулю.

Если главный моментъ вокругъ начала координатъ всѣхъ реакцій связей равенъ нулю во всѣхъ положеніяхъ системы, то тогда дифференціальныя уравненія (628) получаютъ такой видъ:

$$\frac{d\mathcal{L}_x}{dt} = \mathcal{L}_x, \quad \frac{d\mathcal{L}_y}{dt} = \mathcal{L}_y, \quad \frac{d\mathcal{L}_z}{dt} = \mathcal{L}_z. \dots \dots \dots (641)$$

Главный моментъ всѣхъ реакцій связей равенъ нулю, между прочимъ, въ слѣдующихъ случаяхъ:

Когда есть точки системы свободны.

Когда точки системы связаны только между собою идеальными стержнями, или гибкими нерастяжимыми нитями, или связями примѣра 55-го, §§ 59 и 68, стр. 306 и 345—346, потому что тогда моменты обѣихъ реакцій каждой такой связи равны и прямопротивоположны; но ни одна изъ точекъ системы не должна быть связана никакою связью съ какими либо неподвижными точками или съ точками, посторонними системѣ.

Въ этихъ случаяхъ равенъ нулю главный моментъ всѣхъ реакцій не только вокругъ начала координатъ, но также и вокругъ любого центра.

Въ слѣдующихъ параграфахъ настоящей главы мы будемъ предполагать, что связи, которымъ подчинены точки системы, принадлежатъ къ числу тѣхъ, для которыхъ главный моментъ реакцій есть нуль.

§ 98. Интегралы, выражающіе законъ площадей. Незмѣняемая плоскость.

Въ тѣхъ случаяхъ, когда задаваемые силы при всѣхъ положеніяхъ системы удовлетворяютъ условію:

$$\sum_{i=1}^n (y_i Z_i - z_i Y_i) = 0,$$

тогда первое изъ дифференціальныхъ уравненій (641) получаетъ слѣдующій видъ:

$$\frac{dA_z}{dt} = 0,$$

а такъ какъ дифференціальныя уравненія (628) или (641) получены изъ дифференціальныхъ уравненій (517) движенія системы точекъ, то интегралъ

$$A_z = C_1 \dots \dots \dots (642. a)$$

есть одинъ изъ первыхъ интеграловъ совокупныхъ дифференціаль-
ныхъ уравненій (517); этотъ интеграль:

$$\sum_{i=1}^{i=n} m_i (y_i z_i' - z_i y_i') = C_1 (642, a)$$

можно представить подъ слѣдующимъ видомъ:

$$2(m_1 \sigma_1(yz) + m_2 \sigma_2(yz) + + m_n \sigma_n(yz)) = C_1 . . . (642, a, bis)$$

Слѣдовательно, если при всѣхъ положеніяхъ системы точекъ проэкція на ось $X^{овъ}$ главного момента задаваемыхъ силъ равна нулю, то дифференціальныя уравненія движенія системы точекъ имѣютъ интеграль, выражающій, что проэкція на ту же ось главного момента количества движенія сохраняетъ постоянную величину.

Законъ движенія, представляемый этимъ интеграломъ, называется закономъ площадей въ плоскости YZ и можетъ быть выраженъ (по формулѣ (642, a, bis)) слѣдующимъ образомъ: секторьяльную скорость проэкціи каждой точки на плоскость YZ помножимъ на массу ея и составимъ подобныя произведенія для всѣхъ точекъ системы; сумма всѣхъ этихъ произведеній будетъ постоянною величиною во все время движенія системы.

Если при всѣхъ положеніяхъ системы точекъ главный моментъ задаваемыхъ силъ вокругъ начала координатъ равенъ нулю, то законъ площадей будетъ имѣть мѣсто во всѣхъ трехъ плоскостяхъ координатъ, т. е., дифференціальныя уравненія движенія системы точекъ будутъ тогда имѣть три интеграла: (642, a) и два слѣдующіе:

$$L_y = \sum_{i=1}^{i=n} m_i (z_i x_i' - x_i z_i') = C_2 (642, b)$$

$$L_z = \sum_{i=1}^{i=n} m_i (x_i y_i' - y_i x_i') = C_3 (642, c)$$

Эти три интеграла выражаютъ, что главный моментъ (вокругъ O) количества движенія системы точекъ сохраняетъ постоянную величину и постоянное направленіе.

Въ этихъ случаяхъ, въ которыхъ законъ площадей имѣетъ мѣсто во всѣхъ трехъ плоскостяхъ координатъ, онъ имѣетъ мѣсто также и во всякой плоскости, проходящей черезъ начало координатъ. Пусть \mathfrak{F} есть одна изъ такихъ плоскостей и OP —направленіе, перпендикулярное къ ней: по формулѣ (142), стр. 105, § 24-го, секторьяльная скорость проеціи точки m на плоскость \mathfrak{F} выражается такъ:

$$\sigma(\mathfrak{F}) = \frac{l_0 \cos(l_0, P)}{2m}, \quad \dots \dots \dots (142)$$

поэтому секторьяльная скорость проеціи точки m_i на плоскость \mathfrak{F} выражается такъ:

$$\sigma_i(\mathfrak{F}) = \frac{l_{0(m_i)} \cos(l_{0(m_i)}, P)}{2m_i}, \quad \dots \dots \dots (643)$$

гдѣ $l_{0(m_i)}$ означаетъ величину и направленіе момента вокругъ начала координатъ количества движенія точки m_i .

Изъ формулы (643) слѣдуетъ:

$$2 \sum_{i=1}^n m_i \sigma_i(\mathfrak{F}) = \sum_{i=1}^n l_{0(m_i)} \cos(l_{0(m_i)}, P),$$

но такъ какъ главный моментъ количества движенія есть геометрическая сумма моментъ въ количества движенія всѣхъ точекъ, то вторая часть послѣдняго равенства равна проеціи l_0 на направленіе P :

$$2 \sum_{i=1}^n m_i \sigma_i(\mathfrak{F}) = l_0 \cos(l_0, P), \quad \dots \dots \dots (644)$$

а это равенство выражаетъ законъ площадей въ плоскости \mathfrak{F} , потому что $l_0 \cos(l_0, P)$ есть величина постоянная, такъ какъ OP есть направленіе постоянное и l_0 сохраняетъ неизмѣнное направленіе и постоянную величину.

Если означимъ черезъ r , проецію радіуса вектора точки m , на

плоскость \mathcal{F} , а через f_i — угол, составляемый направлением r_i съ нѣкоторою неподвижною осью, проведенною въ плоскости \mathcal{F} , то, съ помощью извѣстныхъ намъ выраженій (§ 23) секторьяльной скорости, можно представить равенство (644) подъ слѣдующимъ видомъ:

$$\sum_{i=1}^{i=n} m_i r_i^2 \frac{df_i}{dt} = \lambda_0 \cos(\lambda_0, P) (644, \text{bis})$$

И такъ, если главный моментъ задаваемыхъ силъ вокругъ начала координатъ равенъ нулю, то законъ площадей имѣетъ мѣсто во всякой плоскости, проходящей черезъ начало координатъ, и притомъ удвоенная сумма произведеній, составленныхъ изъ массъ точекъ и изъ ихъ секторьяльныхъ скоростей въ этой плоскости, равна проеціи главнаго момента количества движенія на нормаль къ плоскости.

Одна изъ этихъ плоскостей отличается отъ всѣхъ прочихъ тѣмъ, что для нея вышесказанная сумма имѣетъ величину большую, чѣмъ для всякой другой плоскости; эта плоскость, перпендикулярная къ направленію λ_0 , названа Лапласомъ неизмѣняемою плоскостью; законъ площадей въ этой плоскости выражается такъ:

$$\sum_{i=1}^{i=n} m_i \rho_i^2 \frac{d\theta_i}{dt} = \lambda_0, (645)$$

гдѣ ρ_i означаетъ проецію радіуса вектора точки m_i на неизмѣняемую плоскость, а θ_i — уголъ, составляемый направлениемъ ρ_i съ нѣкоторою неподвижною осью, проведенною въ этой плоскости.

Для всякой плоскости, проходящей черезъ направленіе λ_0 , постоянная, находящаяся во второй части равенства (644, bis), равна нулю.

Если задаваемые силы, приложенныя къ точкамъ системы, таковы, что при всякомъ положеніи системы главный моментъ ихъ вокругъ центра K равенъ нулю, то дифференціальныя уравненія движенія системы точекъ имѣютъ три интеграла:

$$(\lambda_k)_x = C_1, (\lambda_k)_y = C_2, (\lambda_k)_z = C_3,$$

(гдѣ $(A_k)_x$, $(A_k)_y$, $(A_k)_z$ суть выраженія (639, а, b, с) § 95) и законъ площадей имѣетъ мѣсто во всякой плоскости, проходящей черезъ точку K ; неизмѣняемая плоскость, конечно, перпендикулярна къ направленію главнаго момента A_k , количество движенія вокругъ центра K .

§ 99. Законъ площадей въ относительномъ движеніи системы матеріальныхъ точекъ по отношенію къ неизмѣняемой средѣ, имѣющей поступательное движеніе вмѣстѣ съ центромъ инерціи системы.

Представимъ себѣ неизмѣняемую среду, совершающую поступательное движеніе вмѣстѣ съ центромъ инерціи системы матеріальныхъ точекъ; центръ инерціи C возьмемъ за начало подвижныхъ координатныхъ осей Cx , Cy , Cz , параллельныхъ неподвижнымъ осямъ координатъ; относительныя координаты точки m , по отношенію къ этимъ осямъ будутъ:

$$\xi_i = x_i - x_c, \quad \eta_i = y_i - y_c, \quad \zeta_i = z_i - z_c.$$

Въ дифференціальныхъ уравненіяхъ движенія (517) системы точекъ можно замѣнить абсолютныя координаты $x_i, y_i, z_i, x_2, y_2, z_2, \dots$ суммами: $(\xi_i + x_c), (\eta_i + y_c), (\zeta_i + z_c), (\xi_2 + x_c), \dots$; это въ особенности умѣсто въ тѣхъ случаяхъ, когда функціи v_1, v_2, \dots, v_r и выраженія задаваемыхъ силъ заключаютъ только разности соответственныхъ координатъ различныхъ паръ точекъ, а не самыя координаты въ отдѣльности; въ этихъ случаяхъ дифференціальныя уравненія (517) легко преобразовать въ дифференціальныя уравненія, заключающія только относительныя координаты и ихъ производныя по времени.

Въ самомъ дѣлѣ, если въ уравненіяхъ связей заключаются только разности координатъ: $(x_i - x_j), (y_i - y_j), (z_i - z_j)$ и др., а не отдѣльныя координаты, то тогда въ уравненіяхъ (616) § 85-го члены, заключающіе множители $\lambda(v_1), \lambda(v_2), \dots, \lambda(v_r)$, взаимно сокращаются, напримѣръ, если v_1 заключаетъ x_i только въ разностяхъ: $(x_i - x_j), (x_i - x_k)$, которые мы временно означимъ

черезъ x_{1i} и x_{2i} , то въ уравненіи (616, а) будетъ заключаться членъ:

$$\lambda(u_1) \left[\frac{\partial u_1}{\partial x_{1i}} + \frac{\partial u_1}{\partial x_{2i}} \right],$$

выражающій проэкцію на ось $X^{овъ}$ реакціи связи $u_1 = 0$ въ точкѣ m_i ; этотъ членъ сократится съ членами:

$$- \lambda(u_1) \frac{\partial u_1}{\partial x_{1i}}, \quad - \lambda(u_1) \frac{\partial u_1}{\partial x_{2i}},$$

входящими въ составъ выраженій проэкцій на ось $X^{овъ}$ реакцій той же связи въ точкахъ m_1 и m_2 ; изъ этого слѣдуетъ, что при такихъ связяхъ дифференціальныя уравненія (616) § 85-го получаютъ видъ уравненій (616 А) § 87, то есть:

$$Mx_c'' = B_x, \quad My_c'' = B_y, \quad Mz_c'' = B_z; \quad \quad (616, А)$$

при посредствѣ этихъ уравненій дифференціальныя уравненія (517) § 70-го могутъ быть преобразованы въ слѣдующія:

$$m_i \frac{d^2 \xi_i}{dt^2} = X_i - \frac{m_i}{M} B_x + \sum_{k=1}^{k=p} \lambda(u_k) \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \quad (646, ai)$$

$$m_i \frac{d^2 \eta_i}{dt^2} = Y_i - \frac{m_i}{M} B_y + \sum_{k=1}^{k=p} \lambda(u_k) \frac{\partial u_k}{\partial y_i} \quad (646, bi)$$

$$m_i \frac{d^2 \zeta_i}{dt^2} = Z_i - \frac{m_i}{M} B_z + \sum_{k=1}^{k=p} \lambda(u_k) \frac{\partial u_k}{\partial z_i}, \quad \quad (646, ci)$$

гдѣ i означаетъ каждое изъ чиселъ 1, 2, 3, n ; вторыя части этихъ дифференціальныхъ уравненій заключаютъ разности $(x_i - x_j)$, $(y_i - y_j)$, $(z_i - z_j)$ и проч., которыя могутъ быть замѣнены разностями $(\xi_i - \xi_j)$, $(\eta_i - \eta_j)$, $(\zeta_i - \zeta_j)$ и проч.

При этомъ надо принять во вниманіе слѣдующія равенства:

$$\sum_{i=1}^{i=n} m_i \xi_i = 0, \quad \sum_{i=1}^{i=n} m_i \eta_i = 0, \quad \sum_{i=1}^{i=n} m_i \zeta_i = 0, \quad \quad (647)$$

имѣющія мѣсто потому, что начало относительныхъ координатъ есть центръ инерціи системы.

Напримѣръ, въ примѣръ 61 (стр. 326—327), гдѣ $B_x = 0$, $B_y = 0$, $B_z = 0$, и всѣ точки свободны, дифференціальныя уравненія (646) будутъ слѣдующаго вида:

$$\left. \begin{aligned} m_i \xi_i'' &= -\mu m_i M \xi_i \\ m_i \eta_i'' &= -\mu m_i M \eta_i \\ m_i \zeta_i'' &= -\mu m_i M \zeta_i \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (648, i)$$

Эти дифференціальныя уравненія суть тѣ же самыя, съ которыми мы ознакомились на стр. 82; отсюда слѣдуетъ, что каждая изъ материальныхъ точекъ въ относительномъ движеніи по отношенію къ воображаемой неизмѣняемой средѣ описываетъ эллипсъ, центръ котораго совпадаетъ съ центромъ инерціи системы.

Предположимъ, что связи, которыми связаны точки системы, таковы, что главный моментъ реакцій вокругъ центра инерціи системы равенъ нулю при всякомъ положеніи системы.

Какъ изъ дифференціальныхъ уравненій (517) составлены три дифференціальныя уравненія (628) параграфа 93-го, такимъ же образомъ изъ дифференціальныхъ уравненій (646) можно составить три слѣдующія дифференціальныя уравненія:

Первое:

$$\sum_{i=1}^{1-n} m_i (\eta_i \zeta_i'' - \zeta_i \eta_i'') = \sum_{i=1}^n (\eta_i Z_i - \zeta_i Y_i) - \\ - \frac{B_x}{M} \sum_{i=1}^n m_i \eta_i + \frac{B_y}{M} \sum_{i=1}^{1-n} m_i \zeta_i, \dots \dots (649, a)$$

въ силу же равенствъ (647) двѣ послѣднія суммы второй части этого уравненія равны нулю, поэтому получится:

$$\frac{d(J_c)_x}{dt} = (J_c)_x, \dots \dots \dots (649, a)$$

гдѣ $(J_c)_x$ и $(J_c)_z$ суть проекція на ось X^{000} главныхъ моментовъ

вокругъ центра инерціи количествъ движенія системы и задаваемыхъ силъ (см. формулы (650) и (651)).

Подобнымъ же образомъ получимъ еще два слѣдующія дифференціальныя уравненія:

$$\frac{d(\mathcal{L}_c)_y}{dt} = (\mathcal{L}_c)_y \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot (649, \text{ b})$$

$$\frac{d(\mathcal{L}_c)_z}{dt} = (\mathcal{L}_c)_z ; \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot (649, \text{ c})$$

гдѣ:

$$(\mathcal{L}_c)_x = \sum_{i=1}^{i=n} m_i (\eta_i \zeta'_i - \zeta_i \eta'_i), \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot (650, \text{ a})$$

$$(\mathcal{L}_c)_x = \sum_{i=1}^{i=n} (\eta_i Z_i - \zeta_i Y_i); \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot (651, \text{ a})$$

(легко догадаться, какой видъ имѣютъ выраженія величинъ $(\mathcal{L}_c)_y$, $(\mathcal{L}_c)_z$, $(\mathcal{L}_c)_y$, $(\mathcal{L}_c)_z$).

Надо замѣтить, что величины $(\mathcal{L}_c)_x$, $(\mathcal{L}_c)_y$, $(\mathcal{L}_c)_z$ могутъ быть выражены еще иначе; такъ какъ:

$$\xi'_i = x'_i - x'_c, \quad \eta'_i = y'_i - y'_c, \quad \zeta'_i = z'_i - z'_c,$$

то $(\mathcal{L}_c)_x$ можно представить такъ:

$$(\mathcal{L}_c)_x = \sum_{i=1}^{i=n} m_i (\eta_i \zeta'_i - \zeta_i \eta'_i) - z'_c \sum_{i=1}^{i=n} m_i \eta_i + y'_c \sum_{i=1}^{i=n} m_i \zeta_i,$$

на основаніи же формулъ (647), двѣ послѣднія суммы равны нулю, а потому:

$$(\mathcal{L}_c)_x = \sum_{i=1}^{i=n} m_i \left(\eta_i \frac{dz_i}{dt} - \zeta_i \frac{dy_i}{dt} \right) \cdot \cdot (650, \text{ a, bis})$$

и проч.; т.-е. по формуламъ (650), величины $(\mathcal{L}_c)_x$, $(\mathcal{L}_c)_y$, $(\mathcal{L}_c)_z$ суть проэкціи главнаго момента вокругъ центра инерціи количествъ относительнаго движенія матерьяльныхъ точекъ по отношенію къ вообра-

жаемой неизмѣняемой средѣ, по формуламъ же (650, bis) онѣ же суть проэкціи главнаго момента вокругъ центра инерціи количествъ абсолютнаго движенія тѣхъ же точекъ.

Если задаваемые силы при всякомъ положеніи системы удовлетворяютъ условіямъ:

$$(L_x)_z = 0, (L_x)_y = 0, (L_x)_x = 0, \dots \quad (652)$$

то дифференціальныя уравненія движенія имѣютъ слѣдующіе интегралы:

$$(L_x)_z = C_1, (L_x)_y = C_2, (L_x)_x = C_3 \dots \quad (653)$$

Слѣдовательно, если главный моментъ задаваемыхъ силъ вокругъ центра инерціи равенъ нулю при всѣхъ положеніяхъ системы, то законъ площадей имѣетъ мѣсто въ плоскостяхъ ΓZ , ZZ , EZ , движущихся вмѣстѣ съ центромъ инерціи, черезъ который онѣ проходятъ. Главный моментъ вокругъ центра инерціи количествъ движенія точекъ системы сохраняетъ тогда постоянную величину и неизмѣнное направленіе; перпендикулярная къ нему плоскость, заключающая въ себѣ центръ инерціи, остается, поэтому, параллельною самой себѣ, переносясь вмѣстѣ съ неизмѣняемою средою въ пространствѣ; эта плоскость есть неизмѣняемая плоскость относительнаго движенія системы точекъ по отношенію къ воображаемой средѣ, движущейся вмѣстѣ съ центромъ инерціи.

Называя эту плоскость неизмѣняемою, мы подъ этимъ подразумеваемъ нижеслѣдующее.

Представимъ себѣ, что проведена какая-либо плоскость черезъ центръ инерціи C системы и что эта плоскость неизмѣнно связана съ воображаемою неизмѣняемою средою; составимъ секторьяльныя скорости вокругъ C относительнаго движенія проэкцій точекъ системы на эту плоскость; секторьяльную скорость каждой точки помножимъ на массу ея и возьмемъ сумму всѣхъ такихъ произведеній; эта сумма сохраняетъ постоянную величину $L_c \cos(P, L_c)$ во все время движенія (гдѣ P — направленіе нормали къ плоскости). Измѣняемая плоскость, о которой мы говоримъ, отличается отъ прочихъ

плоскостей, проведенныхъ черезъ C , тѣмъ, что для вся выше-сказанная сумма имѣетъ большую величину (а именно: $4c$) чѣмъ для всѣхъ прочихъ плоскостей.

§ 100. Примѣры случаевъ, въ которыхъ законы площадей имѣютъ мѣсто.

Если всѣ точки системы свободны, если вѣтъ другихъ силъ, кромѣ взаимодѣйствій между точками системы, если притомъ силы взаимодѣйствія между каждаыми двумя точками системы, не только равны и прямопротивоположны, но и *направлены вдоль по линіи соединяющей эти точки*, то законъ площадей имѣетъ мѣсто во всякой неподвижной плоскости, проходящей черезъ какую угодно точку пространства и во всякой плоскости проходящей черезъ центръ инерціи системы, движущейся вмѣстѣ съ нимъ и остающейся параллельною самой себѣ.

Примѣръ 61-й (стр. 326). Въ этомъ примѣрѣ система состоитъ только изъ двухъ материальныхъ точекъ. Центръ инерціи находится на линіи вращающаго разстоянія между точками и дѣлитъ это разстояніе въ постоянномъ отношеніи, равномъ обратному отношенію массъ точекъ; изъ этого слѣдуетъ, что траекторія относительнаго движенія точекъ суть кривыя подобныя между собою, подобно-расположенныя въ воображаемой неизмѣняемой средѣ и имѣющія центромъ подобія — центръ инерціи C этихъ точекъ.

Можно показать, что обѣ точки совершаютъ относительное движеніе въ одной плоскости, проходящей черезъ центръ инерціи C . Въ самомъ дѣлѣ, имѣ равенствъ:

$$\frac{\xi_2}{\xi_1} = \frac{\eta_2}{\eta_1} = \frac{z_2}{z_1} = \frac{v_2}{v_1} = - \frac{m_1}{m_2}, \dots \dots (654)$$

(гдѣ ρ_1 и ρ_2 суть длины радіусовъ векторовъ CM_1 и CM_2 , движущихся точекъ) слѣдуютъ равенства:

$$\frac{\xi_2'}{\xi_1'} = \frac{\eta_2'}{\eta_1'} = \frac{z_2'}{z_1'} = - \frac{m_1}{m_2}, \dots \dots \dots (655)$$

на основаніи этихъ равенствъ интегралы:

$$\begin{aligned} m_1(\eta_1 \tilde{z}_1' - \tilde{z}_1 \eta_1') + m_2(\eta_2 \tilde{z}_2' - \tilde{z}_2 \eta_2') &= C_1, \\ m_1(\tilde{z}_1 \xi_1' - \xi_1 \tilde{z}_1') + m_2(\tilde{z}_2 \xi_2' - \xi_2 \tilde{z}_2') &= C_2, \\ m(\xi_2 \eta_1' - \eta_1 \xi_1') + m_2(\xi_2 \eta_2' - \eta_2 \xi_2') &= C_3 \end{aligned}$$

могутъ быть преобразованы въ слѣдующія равенства:

$$m_1(\eta_1 z_1' - z_1 \eta_1') = C_1 \frac{m_2}{m_1 + m_2},$$

$$m_1(z_1 \xi_1' - \xi_1 z_1') = C_2 \frac{m_2}{m_1 + m_2},$$

$$m_1(\xi_1 \eta_1' - \eta_1 \xi_1') = C_3 \frac{m_2}{m_1 + m_2},$$

изъ которыхъ видно, что точка m_1 совершаетъ свое относительное движеніе въ плоскости

$$C_1 \xi_1 + C_2 \eta_1 + C_3 z_1 = 0 \dots \dots (656)$$

Въ той же самой плоскости совершаетъ свое относительное движеніе и точка m_2 ; эта плоскость есть неизмѣняемая плоскость относительнаго движенія системы по отношенію къ воображаемой неизмѣняемой средѣ, движущейся поступательно вмѣстѣ съ центромъ инерціи C .

Изъ того, что было упомянуто относительно настоящаго примѣра въ § 87 (стр. 429), и изъ только-что приведенныхъ разсужденій можемъ составить себѣ нѣкоторое, хотя еще и неполное, представленіе о движеніи точекъ.

Центръ инерціи C обѣихъ точекъ движется равномерно и прямолинейно; представимъ себѣ неизмѣняемую среду, движущуюся поступательно вмѣстѣ съ центромъ инерціи; движеніе каждой изъ материальныхъ точекъ можно разсматривать какъ составное изъ переноснаго движенія вмѣстѣ съ этою воображаемою средою и изъ относительнаго движенія по отношенію къ этой средѣ, относительнаго движенія обѣихъ точекъ совершаются въ нѣкоторой плоскости, проходящей черезъ центръ инерціи, и притомъ траекторіи обѣихъ точекъ подобны между собою и подобно расположены, имѣя центромъ подобія точку C ; что же касается до вида траекторій, то онъ зависитъ отъ вида функцій $F(r_{12})$.

Въ примѣрѣ 62-мъ центръ инерціи системы также движется прямолинейно и равномерно и притомъ, какъ замѣчено въ предыдущемъ параграфѣ, каждая изъ материальныхъ точекъ описываетъ свой эллипсъ въ относительномъ движеніи по отношенію къ воображаемой неизмѣняемой средѣ, движущейся поступательно вмѣстѣ съ центромъ инерціи, центры всѣхъ эллипсовъ совпадаютъ съ центромъ инерціи системы. Въ этомъ случаѣ относительное движеніе каждой материальной точки удовлетворяетъ закону площадей, а потому этотъ законъ имѣетъ мѣсто также и

для всей системы, во всякой плоскости, проведенной через центр инерции.

Положеніе неизмѣняемой плоскости зависитъ отъ положеній и размѣровъ всѣхъ эллипсовъ.

Если всѣ точки системы свободны и къ нимъ, кромѣ вышесказанныхъ силъ взаимодѣйствія, приложены силы, направленные къ началу координатъ, то законъ площадей навѣрно имѣетъ мѣсто въ плоскостяхъ, проходящихъ черезъ начало координатъ.

Примѣръ 85-й. Система состоитъ изъ двухъ матерьяльныхъ точекъ, между которыми дѣйствуютъ тѣ же самыя силы взаимодѣйствія, какъ и въ примѣрѣ 61-мъ; кромѣ того, точка m_1 притягивается къ началу координатъ силою $\mu_1 f(r_1)$, и точка m_2 — силою $\mu_2 f(r_2)$.

Въ этомъ случаѣ траекторіи точекъ могутъ быть не плоскими кривыми линіями; но, каковы бы ни были эти кривыя, законъ площадей имѣетъ мѣсто во всякой плоскости, проведенной черезъ начало координатъ; неизмѣняемая плоскость обладаетъ въ этомъ случаѣ тѣмъ свойствомъ, что въ ней заключается прямая линія, по которой пересѣкаются двѣ плоскости: одна — проходящая черезъ радіусъ векторъ и скорость точки m_1 , другая — черезъ радіусъ векторъ и скорость точки m_2 ; эти плоскости, конечно, измѣняютъ свои положенія вмѣстѣ съ движеніемъ матерьяльныхъ точекъ, но линія пересѣченія ихъ остается въ неизмѣняемой плоскости, хотя и можетъ мѣнять въ ней положеніе. Доказать это свойство неизмѣняемой плоскости весьма нетрудно. Дѣйствительно, плоскость, проходящая черезъ радіусъ векторъ и скорость m_1 , имѣетъ нормалью направленіе момента количества движенія этой точки; плоскость, проходящая черезъ радіусъ векторъ и скорость точки m_2 , имѣетъ нормалью направленіе момента ея количества движенія; наконецъ, неизмѣняемая плоскость имѣетъ нормалью главный моментъ количествъ движенія; всѣ эти три момента заключаются въ одной плоскости, а потому перпендикулярныя къ нимъ плоскости пересѣкаются по одной линіи, что и требовалось доказать.

Если, кромѣ вышесказанныхъ взаимодѣйствій и силъ, направленныхъ къ началу координатъ, къ точкамъ системы приложены силы, направленія которыхъ пересѣкаютъ нѣкоторую неподвижную ось, проходящую черезъ начало координатъ, то законъ площадей навѣрно имѣетъ мѣсто въ той плоскости, проходящей черезъ начало координатъ, которая перпендикулярна къ этой оси.

Если точки системы не свободны, но связи между ними принадлежать къ числу тѣхъ которыя указаны въ примѣрахъ 53-мъ, 54-мъ, 55-мъ (стр. 305—306), 56-мъ, 60-мъ (стр. 306 и 324) и притомъ, если ни одна изъ такихъ связей не связываетъ ни одной изъ материальныхъ точекъ системы ни съ какою-либо неподвижною точкою, ни съ какою-либо точкою постороннею системѣ; если, кромѣ того, всѣ силы, приложенныя къ материальнымъ точкамъ системы, суть силы взаимодѣйствія между парами точекъ, попарно равныя, прямопротивоположныя и направленныя вдоль по линіямъ, соединяющимъ взаимодѣйствующія материальныя точки, то законъ площадей имѣеть мѣсто во всякой неподвижной плоскости, даже и не проходящей черезъ начало координатъ, а также и во всякой поступательно-движущейся плоскости, проходящей черезъ центръ инерціи системы.

Такъ, напримѣръ, при движеніи неизмѣняемой системы точекъ (т.-е., такой системы, точки которой связаны между собою неизмѣняемыми связями), если эта система свободна и не подвержена никакимъ силамъ, законъ площадей имѣеть мѣсто во всякой неподвижной плоскости и во всякой поступательно-движущейся плоскости, проведенной черезъ центръ инерціи системы.

Если точки системы связаны между собою только вышеупомянутыми связями и къ нимъ, кромѣ вышеозначенныхъ взаимодѣйствій, приложены силы, направленныя къ нѣкоторой неподвижной точкѣ, то законъ площадей навѣрно имѣеть мѣсто во всякой плоскости, проходящей черезъ эту точку.

Примѣръ 66 й, (стр. 371) Въ этомъ примѣрѣ четыре точки связаны четырьмя неизмѣняемыми связями и притягиваются къ началу координатъ; поэтому законъ площадей имѣеть мѣсто для площадей, описываемыхъ радиусами векторами точекъ, проведенными изъ начала координатъ; кромѣ того, въ этомъ случаѣ законъ площадей имѣеть мѣсто также и въ относительномъ движеніи системы по отношенію къ невагнваемой средѣ, движущейся поступательно вмѣстѣ съ центромъ инерціи C , потому что здѣсь главный моментъ задаваемыхъ силъ вокругъ центра инерціи равенъ нулю, какъ въ этомъ не трудно убѣдиться; главный же моментъ количествъ движенія этой системы вокругъ центра инерціи, выражающійся такъ:

$$(m_1 \xi^2 + m_2 (l^2 - \xi^2)) \ddot{\xi},$$

долженъ, поэтому, сохранить постоянную величину, что и подтверждается однимъ изъ дифференціальныхъ уравненій системы, а именно тѣмъ, которое приведено въ послѣдней строкѣ страницы 371-й.

§ 101. Главный моментъ количествъ движенія сплошнаго тѣла.

Когда намъ придется разсматривать какой-либо вопросъ о движеніи сплошнаго тѣла, то поступимъ такъ, какъ сказано въ § 89-мъ предыдущей главы, т.-е. представимъ себѣ, что это тѣло раздѣлено на безконечно-малые элементы и что каждый элементъ замѣненъ матерьяльною точкою, масса которой равна массѣ элемента и которая находится внутри или на поверхности элемента; поэтому проекціи на оси координатъ главнаго момента вѣругъ начала координатъ количествъ движенія сплошнаго тѣла выразятся слѣдующими интегралами, распространенными по объему тѣла:

$$L_x = \int \int \int \sigma(yz' - zy')dO. \dots (657, a)$$

$$L_y = \int \int \int \sigma(zx' - xz')dO, \dots (657, b)$$

$$L_z = \int \int \int \sigma(xy' - yx')dO. \dots (657, c)$$

§ 102. Главный моментъ количествъ движенія неизмѣняемой системы точекъ или твердаго тѣла; проекціи его на неподвижныя оси координатъ.

Въ вопросахъ о движеніи неизмѣняемыхъ системъ матерьяльныхъ точекъ или сплошныхъ твердыхъ тѣлъ придется нерѣдко имѣть дѣло съ выраженіями проекцій главнаго момента количествъ движенія неизмѣняемой системы точекъ на неподвижныя оси координатъ и на оси координатъ, неизмѣнно связанныя съ системою. Въ этомъ и въ слѣдующихъ параграфахъ настоящей главы мы составимъ эти выраженія и разсмотримъ свойства нѣкоторыхъ величинъ, входящихъ въ составъ этихъ выраженій.

Положимъ, что неизмѣняемая система состоитъ изъ n материальныхъ точекъ. Представимъ себѣ неизмѣняемую среду, съ которою точки системы неизмѣняемо связаны. Одну изъ точекъ этой среды обозначимъ буквою $Ю$.

Составимъ выраженіе проэкцій на оси $X^{овъ}$, $Y^{овъ}$, и $Z^{овъ}$ главного момента вокругъ точки $Ю$ количества движенія неизмѣняемой системы материальныхъ точекъ. Возьмемъ выраженіе:

$$(\mathcal{L}_{ю})_x = \sum_{i=1}^{i=n} m_i [(y_i - y_{ю})z'_i - (z_i - z_{ю})y'_i] \dots (639, \text{a, bis})$$

и подобныя же выраженія для $(\mathcal{L}_{ю})_y$ и $(\mathcal{L}_{ю})_z$, выразимъ заключающіяся въ нихъ скорости x'_i , y'_i , z'_i по формуламъ (142) страницы 125-й кинематической части, тогда получимъ слѣдующія выраженія:

$$(\mathcal{L}_{ю})_x = M((y_c - y_{ю})z'_{ю} - (z_c - z_{ю})y'_{ю}) + \\ + (I_x)_{ю}P - S_{xy}Q - S_{xz}R \dots (658, \text{a})$$

$$(\mathcal{L}_{ю})_y = M((z_c - z_{ю})x'_{ю} - (x_c - x_{ю})z'_{ю}) + \\ + (I_y)_{ю}Q - S_{yz}R - S_{xy}P \dots (658, \text{b})$$

$$(\mathcal{L}_{ю})_z = M((x_c - x_{ю})y'_{ю} - (y_c - y_{ю})x'_{ю}) + \\ + (I_z)_{ю}R - S_{zx}P - S_{yz}Q, \dots (658, \text{c})$$

гдѣ:

$$(I_x)_{ю} = \sum_{i=1}^{i=n} m_i ((y_i - y_{ю})^2 + (z_i - z_{ю})^2),$$

$$S_{yz} = \sum_{i=1}^{i=n} m_i (y_i - y_{ю})(z_i - z_{ю}),$$

$$(I_y)_{ю} = \sum_{i=1}^{i=n} m_i ((z_i - z_{ю})^2 + (x_i - x_{ю})^2),$$

$$S_{zx} = \sum_{i=1}^{i=n} m_i (z_i - z_{ю})(x_i - x_{ю}),$$

$$(I_s)_o = \sum_{i=1}^{i=n} m_i ((x_i - x_o)^2 + (y_i - y_o)^2),$$

$$S_{xy} = \sum_{i=1}^{i=n} m_i (x_i - x_o) (y_i - y_o).$$

видно, не на
изменяется от
Y, Z, а на
направлений
проекции
на координат-
ные оси.

**§ 103. Проекция главного момента количества дви-
жения неизменяемой системы точек на оси координатъ,
неизменно связанные съ этою системою.**

Проекция этого главнаго момента на оси $ЮЕ$, $ЮГ$, $ЮZ$ мы
будемъ обозначать слѣдующими знаками: $(\mathcal{L}_o)_\xi$, $(\mathcal{L}_o)_\eta$, $(\mathcal{L}_o)_\zeta$.

Очевидно, что эти проекціи могутъ быть выражены слѣдую-
щими тричленами:

$$(\mathcal{L}_o)_\xi = \mathcal{L}_o \cos (\mathcal{L}_o, \Xi) = (\mathcal{L}_o)_x \lambda_x + (\mathcal{L}_o)_y \lambda_y + (\mathcal{L}_o)_z \lambda_z. \dots (659, a)$$

$$(\mathcal{L}_o)_\eta = \mathcal{L}_o \cos (\mathcal{L}_o, \Upsilon) = (\mathcal{L}_o)_x \mu_x + (\mathcal{L}_o)_y \mu_y + (\mathcal{L}_o)_z \mu_z. \dots (659, b)$$

$$(\mathcal{L}_o)_\zeta = \mathcal{L}_o \cos (\mathcal{L}_o, Z) = (\mathcal{L}_o)_x \nu_x + (\mathcal{L}_o)_y \nu_y + (\mathcal{L}_o)_z \nu_z, \dots (659, c)$$

гдѣ λ_x , μ_x , ν_x , ν_z суть косинусы угловъ между координат-
ными осями неподвижными и осями $ЮЕ$, $ЮГ$, $ЮZ$ (см. стр. 57
кинематической части).

Выразимъ въ тричленѣ (659, а) величины $(\mathcal{L}_o)_x$, $(\mathcal{L}_o)_y$, $(\mathcal{L}_o)_z$
по формуламъ (639, bis) предыдущаго параграфа, а величины
 λ_x , λ_y , λ_z по формуламъ (60, а, б, с) кинематической части
(стр. 60), получимъ:

$$\begin{aligned} (\mathcal{L}_o)_\xi = \sum_{i=1}^{i=n} m_i & \left[((y_i - y_o)z'_i - (z_i - z_o)y'_i)(\mu_y \nu_z - \mu_z \nu_y) + \right. \\ & + ((z_i - z_o)x'_i - (x_i - x_o)z'_i)(\mu_z \nu_x - \mu_x \nu_z) + \\ & \left. + ((x_i - x_o)y'_i - (y_i - y_o)x'_i)(\mu_x \nu_y - \mu_y \nu_x) \right]; \end{aligned}$$

выраженіе, заключающееся здѣсь въ прямыхъ скобкахъ, можетъ быть

преобразовано по формулѣ (154), приведенной на стр. 138-й кинематической части; оно окажется равнымъ:

$$\left[((x_i - x_{ю})\mu_x + (y_i - y_{ю})\mu_y + (z_i - z_{ю})\mu_z)(x'_i v_x + y'_i v_y + z'_i v_z) - \right. \\ \left. - ((x_i - x_{ю})v_x + (y_i - y_{ю})v_y + (z_i - z_{ю})v_z)(x'_i \mu_x + y'_i \mu_y + z'_i \mu_z) \right],$$

то-есть:

$$[\eta_i v_i \cos(v_i, \mathbf{Z}) - \zeta_i v_i \cos(v_i, \mathbf{Y})];$$

слѣдовательно, $(\lambda_{ю})_\xi$, $(\lambda_{ю})_\eta$, $(\lambda_{ю})_\zeta$ могутъ быть выражены подѣ видомъ слѣдующихъ суммъ:

$$(\lambda_{ю})_\xi = \sum_{i=1}^{i=n} m_i v_i (\eta_i \cos(v_i, \mathbf{Z}) - \zeta_i \cos(v_i, \mathbf{Y})) \dots (660, a)$$

$$(\lambda_{ю})_\eta = \sum_{i=1}^{i=n} m_i v_i (\zeta_i \cos(v_i, \mathbf{E}) - \xi_i \cos(v_i, \mathbf{Z})) \dots (660, b)$$

$$(\lambda_{ю})_\zeta = \sum_{i=1}^{i=n} m_i v_i (\xi_i \cos(v_i, \mathbf{Y}) - \eta_i \cos(v_i, \mathbf{E})) \dots (660, c)$$

Эти формулы аналогичны формуламъ (639 bis) предыдущаго параграфа.

Чтобы получить формулы, аналогичныя формуламъ (658) предыдущаго параграфа, выразимъ проеции скоростей точекъ неизмѣняемой системы на оси \mathbf{E} , \mathbf{Y} , \mathbf{Z} по формуламъ (143) стр. 125 кинематической части, напимѣръ:

$$v_i \cos(v_i, \mathbf{E}) = w_{ю} \cos(w_{ю}, \mathbf{E}) + \zeta_i q - \eta_i r,$$

и проч.; получимъ:

$$(\lambda_{ю})_\xi = M w_{ю} (\eta_c \cos(w_{ю}, \mathbf{Z}) - \zeta_c \cos(w_{ю}, \mathbf{Y})) + \\ + A_{ю} p - F_{ю} q - E_{ю} r; \dots (661, a)$$

$$(l_{ю})_{\eta} = Mw_{ю}(\zeta_c \cos(w_{ю}, \Xi) - \xi_c \cos(w_{ю}, Z)) + \\ + B_{ю}q - D_{ю}r - F_{ю}p, \dots \dots \dots (661, b)$$

$$(l_{ю})_{\zeta} = Mw_{ю}(\xi_c \cos(w_{ю}, \Upsilon) - \eta_c \cos(w_{ю}, \Xi)) + \\ + C_{ю}r - E_{ю}p - D_{ю}q, \dots \dots \dots (661, c)$$

гдѣ ξ_c, η_c, ζ_c суть относительныя координаты центра инерціи неизмѣняемой системы, а $A_{ю}, B_{ю}, C_{ю}, D_{ю}, E_{ю}, F_{ю}$ — постоянныя величины, выражаемыя слѣдующими суммами:

$$A_{ю} = \sum_{i=1}^{i=n} m_i(\eta_i^2 + \zeta_i^2), \dots (662, a), \quad D_{ю} = \sum_{i=1}^{i=n} m_i \eta_i \zeta_i, \dots (662, d)$$

$$B_{ю} = \sum_{i=1}^{i=n} m_i(\zeta_i^2 + \xi_i^2), \dots (662, b), \quad E_{ю} = \sum_{i=1}^{i=n} m_i \zeta_i \xi_i, \dots (662, e)$$

$$C_{ю} = \sum_{i=1}^{i=n} m_i(\xi_i^2 + \eta_i^2), \dots (662, c), \quad F_{ю} = \sum_{i=1}^{i=n} m_i \xi_i \eta_i, \dots (662, f)$$

104. Моменты инерціи.

Величины $A_{ю}, B_{ю}, C_{ю}$ (662, а, b, c) называются *моментами инерціи* неизмѣняемой системы точекъ вокругъ осей $Ю\Xi, Ю\Upsilon, ЮZ^*$).

Моментомъ инерціи какой-либо системы точекъ вокругъ какой-либо оси KU (K есть одна изъ тѣхъ точекъ, черезъ которую ось проходитъ) называется слѣдующая сумма:

$$m_1 \rho_1^2 + m_2 \rho_2^2 + \dots + m_i \rho_i^2 + \dots + m_n \rho_n^2,$$

гдѣ $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_n$ суть разстоянія точекъ системы отъ оси KU .

Такую сумму мы будемъ обозначать знакомъ $(I_U)_k$, гдѣ значокъ, поставленный внутри скобокъ, служитъ для обозначенія направленія

*) Величины $D_{ю}, E_{ю}, F_{ю}$ извѣстны у англійскихъ авторовъ подъ именемъ *произведеній инерціи* (product of inertia).

оси, а значокъ, поставленный въ скобокъ, — для обозначенія одной изъ тѣхъ точекъ, черезъ которыя ось проходитъ; напри- мѣръ, моменты инерціи вокругъ осей, проходящихъ черезъ точку O и параллельныхъ осямъ X^{oax} , Y^{oay} и Z^{oaz} мы обозначимъ сим- волами $(I_x)_o$, $(I_y)_o$, $(I_z)_o$, что уже и сдѣлано въ концѣ § 102.

Моментъ инерціи какаго-либо сплошнаго тѣла вокругъ оси KU выразится интеграломъ:

$$(I_U)_k = \int \int \int \sigma \rho^2 dO, \dots \dots \dots (663)$$

распространеннымъ по всему объему тѣла; здѣсь ρ означаетъ раз- стояніе элемента dO отъ оси KU .

Моментъ инерціи есть произведеніе изъ массы на квадратъ длины; единица моментовъ инерціи:

$$(\text{единица моментовъ инерціи}) = m \cdot d^2 \dots \dots \dots (664)$$

можетъ быть рассматриваема, какъ моментъ инерціи материаль- ной точки, масса которой равна единицѣ и которая отстоитъ отъ оси (вокругъ которой составляютъ моментъ инерціи) на разстоя- ніи, равномъ единицѣ длины.

При одномъ и томъ же относительномъ расположеніи точекъ системы между собою, моменты инерціи системы вокругъ различ- ныхъ осей имѣютъ весьма различныя величины; однако, суще- ствуетъ нѣкоторая зависимость между величинами моментовъ инерціи вокругъ различныхъ осей, проходящихъ черезъ одну и ту же точку, и нѣкоторая зависимость между величинами мо- ментовъ инерціи вокругъ различныхъ параллельныхъ между со- бою осей.

§ 105. Зависимость между моментами инерціи вокругъ осей, проходящихъ черезъ одну и ту же точку. Эллипсоидъ инерціи Главныя оси инерціи.

Для ориентирования данной системы точекъ или сплошнаго тѣла, представимъ себѣ неизмѣняемую среду, въ которой эта система или тѣло расположены и проведемъ черезъ точку O , черезъ которую про-

ходятъ разсматриваемыя оси, координатныя оси $ЮЕ$, $ЮΥ$, $ЮZ$, неизмѣнно связанныя со средою.

Означимъ черезъ λ , μ , ν косинусы угловъ, составляемыхъ съ этими осями координатъ какою-либо осью $ЮU$ (черт. 58); пусть m_i есть одна изъ точекъ системы, r_i — радиусъ векторъ ея, проведенный изъ точки $Ю$; ξ_i , η_i , ζ_i — ея координаты относительно осей $Е$, $Υ$, Z ; ρ_i — разстояніе ея отъ оси $ЮU$.

Очевидно:

$$\rho_i^2 = r_i^2 \sin^2(r_i, U) = r_i^2 - r_i^2 \cos^2(r_i, U);$$

но:

$$r_i^2 = \xi_i^2 + \eta_i^2 + \zeta_i^2; \quad r_i \cos(r_i, U) = \xi_i \lambda + \eta_i \mu + \zeta_i \nu,$$

поэтому:

$$\begin{aligned} \rho_i^2 = & (1 - \lambda^2)\xi_i^2 + (1 - \mu^2)\eta_i^2 + (1 - \nu^2)\zeta_i^2 - \\ & - 2\mu\nu\eta_i\zeta_i - 2\nu\lambda\zeta_i\xi_i - 2\lambda\mu\zeta_i\eta_i; \end{aligned}$$

далее:

$$1 - \lambda^2 = \mu^2 + \nu^2, \quad 1 - \mu^2 = \nu^2 + \lambda^2, \quad 1 - \nu^2 = \lambda^2 + \mu^2,$$

поэтому:

$$\begin{aligned} \rho_i^2 = & \lambda^2(\eta_i^2 + \zeta_i^2) + \mu^2(\zeta_i^2 + \xi_i^2) + \nu^2(\xi_i^2 + \eta_i^2) - \\ & - 2\mu\nu\eta_i\zeta_i - 2\nu\lambda\zeta_i\xi_i - 2\lambda\mu\xi_i\eta_i. \end{aligned}$$

Отсюда получимъ слѣдующее выраженіе для момента инерціи системы вокругъ оси $ЮU$:

$$\begin{aligned} (I_U)_{ю} = \sum_{i=1}^{i=n} m_i \rho_i^2 = & A_{ю} \lambda^2 + B_{ю} \mu^2 + C_{ю} \nu^2 - \\ & - 2D_{ю} \mu \nu - 2E_{ю} \nu \lambda - 2F_{ю} \lambda \mu, \quad (665) \end{aligned}$$

гдѣ $A_{ю}$, $B_{ю}$, $C_{ю}$, $D_{ю}$, $E_{ю}$, $F_{ю}$ суть величины, выражаемыя суммами (662) § 103.

Эта формула выражаетъ зависимость между величинами моментовъ инерціи вокругъ осей, проведенныхъ черезъ точку $Ю$; чтобы

представить эту зависимость въ болѣе наглядной формѣ, отложивъ отъ $Ю$ по $ЮU$ длину r , относящуюся къ единицѣ длины такъ, какъ корень изъ единицы моментовъ инерціи относится къ корню изъ $(I_U)_{Ю}$, т.-е.:

$$r = \frac{m^{\frac{1}{2}} d^2}{\sqrt{(I_U)_{Ю}}};$$

координаты конца этой длины будутъ:

$$\xi = r\lambda, \quad \eta = r\mu, \quad \zeta = r\nu,$$

а потому равенство (665) можно преобразовать въ слѣдующій видъ:

$$1 = \frac{1}{m d^4} [A_{Ю} \xi^2 + B_{Ю} \eta^2 + C_{Ю} \zeta^2 - 2D_{Ю} \eta \zeta - 2E_{Ю} \zeta \xi - 2F_{Ю} \xi \eta].. \quad (666)$$

Если представить себѣ, что то же самое сдѣлано для всевозможныхъ направлений, проведенныхъ изъ точки $Ю$, то концы длины r образуютъ поверхность, выражаемую уравненіемъ (666).

Эта поверхность есть одна изъ поверхностей втораго порядка, имѣющая центръ въ точкѣ $Ю$; нетрудно убѣдиться, что это можетъ быть либо эллипсоидъ, либо круговой цилиндръ.

Въ самомъ дѣлѣ, если поверхность (666) имѣетъ безконечно-длинные радіусы векторы, то эти векторы должны быть направлены по тѣмъ осямъ, вокругъ которыхъ моменты инерціи системы точекъ равны нулю; но такихъ осей можетъ быть только одна, и то въ томъ только случаѣ, если вдоль по ней расположены всѣ точки системы: поэтому, либо всѣ радіусы векторы поверхности (666) имѣютъ конечныя длины (тогда это есть эллипсоидъ), либо только два радіуса вектора, прямопротивоположные другъ другу, безконечно велики (тогда это есть цилиндрическая поверхность съ круговымъ основаніемъ).

Въ частности, эллипсоидъ можетъ быть эллипсоидомъ вращенія планетарнымъ или удлинненнымъ, или сферою.

Круговой цилиндръ можно разсматривать тоже какъ эллипсоидъ, одна изъ главныхъ осей котораго удлинена до безконечности а двѣ прочія главные оси равны между собою; такъ что можно сказать, что

поверхность (666) есть эллипсоидъ или вторая-либѣ изъ его разновидностей. Эту поверхность называютъ *эллипсоидомъ инерціи* (данной системы точекъ) для точки *Ю*.

Если оси координатъ *ЮЕ*, *ЮГ*, *ЮZ* совѣстимъ съ главными осями эллипсоида инерціи, то уравненіе его должно будетъ получить слѣдующій видъ:

$$1 = \sum_{m \neq 1} \left[\mathcal{A}_m \xi^2 + \mathcal{B}_m \eta^2 + \mathcal{C}_m \zeta^2 \right]; \dots (667)$$

слѣдовательно, величина момента инерціи данной системы материальныхъ точекъ вокругъ оси *ЮU*, составляющей съ главными осями эллипсоида инерціи углы, косинусы которыхъ суть λ , μ , ν , можетъ быть выражена слѣдующею формулою:

$$(I_U)_0 = \mathcal{A}_0 \lambda^2 + \mathcal{B}_0 \mu^2 + \mathcal{C}_0 \nu^2. \dots (668)$$

Главные оси эллипсоида инерціи называются *главными осями инерціи* (данной системы точекъ или сплошнаго тѣла) *въ той точкѣ Ю*, въ которой эллипсоидъ имѣетъ свой центръ.

Величины \mathcal{A}_0 , \mathcal{B}_0 , \mathcal{C}_0 суть моменты инерціи системы вокругъ главныхъ осей инерціи въ точкѣ *Ю*; суммы же вида (662, d, e, f), такъ называемыя *products of inertia*, при этихъ осяхъ координатъ равны нулю, какъ видно изъ сравненія выраженія (668) съ выраженіемъ (665).

Такъ какъ за точку *Ю* можетъ быть взята какая угодно точка той неизмѣняемой среды, относительно которой мы ориентуемъ данную систему точекъ (или сплошное тѣло), то можемъ сказать слѣдующее:

Черезъ всякую точку можно провести три такія взаимно перпендикулярныя оси, что если возмемъ эти оси за оси координатъ то *products of inertia* данной системы (или сплошнаго тѣла) будутъ равны нулю: эти три оси суть главные оси инерціи данной системы (или сплошнаго тѣла) въ разсматриваемой точкѣ.

Слово «инерція», входящее въ составъ вышеприведенныхъ терминовъ, должно указывать на то, что понятія, выражаемыя этими терминами,

играть существенную роль въ теоріи вращенія твердаго тѣла по инерціи; считаемъ нужнымъ теперь же дать нѣкоторыя указанія относительно этого предмета.

Представимъ себѣ, что данная система матеріальныхъ точекъ есть система неизмѣняемая (или данное сплошное тѣло есть тѣло твердое) и что она можетъ свободно вращаться только вокругъ неподвижной оси $ЮГ$; такъ какъ когда угловая скорость Ω неизмѣняемой системы можетъ быть направлена только вдоль по оси $ЮГ$ или по противоположному ея продолженію, то величина главнаго момента количества движенія неизмѣняемой системы будетъ равна:

$$\Omega \sum_{i=1}^n m_i r_i^2 = (I_G)_{\Omega} \Omega,$$

а если угловая скорость будетъ равна единицѣ, то главный моментъ количества движенія неизмѣняемой системы будетъ равенъ:

$$\frac{1}{\Omega} (I_G)_{\Omega} \dots \dots \dots (669)$$

Извѣстно, что твердое тѣло, неподверженное никакимъ силамъ, но могущее свободно вращаться вокругъ неподвижной оси, будетъ вращаться вокругъ нея по инерціи съ постоянною угловою скоростью, съ тою, которая была сообщена ему ударомъ или какими-либо силами, дѣйствовавшими на него, но прекратившими свое дѣйствіе.

Поэтому можно дать слѣдующее опредѣленіе величинѣ $(I_G)_{\Omega}$: *отношеніе (669) выражаетъ величину главнаго момента количества движенія неизмѣняемой системы, вращающейся по инерціи вокругъ оси ЮГ съ угловою скоростью, равною единицѣ; терминъ „моментъ инерціи неизмѣняемой системы точекъ вокругъ оси ЮГ“ есть сокращенное выраженіе этого опредѣленія.*

„Эллипсоидъ инерціи“, который слѣдовало бы называть *эллипсоидомъ моментовъ инерціи*, имѣетъ существенное значеніе въ теоріи вращенія твердаго тѣла вокругъ неподвижной точки по инерціи; въ главѣ о движеніи твердаго тѣла будетъ показано, что при этомъ вращеніи эллипсоидъ инерціи, имѣя неподвижный центръ, катится безъ скольженія по нѣкоторой неподвижной плоскости.

При такомъ движеніи угловая скорость твердаго тѣла, вообще говоря, не сохраняетъ неизмѣннаго положенія, ни въ самомъ тѣлѣ, ни въ пространствѣ, за исключеніемъ тѣхъ случаевъ, въ которыхъ начальная угло-

вая скорость была направлена по одной изъ трехъ главныхъ осей эллипсоида инерціи; тогда вращеніе тѣла по инерціи будетъ продолжаться вокругъ этой оси съ постоянною скоростью и эта ось будетъ сохранять неизмѣняемое направленіе въ пространствѣ; вотъ почему главные оси эллипсоида инерціи называются *главными осями инерціи*.

Вращеніе тѣла по инерціи будетъ разсмотрѣно въ главѣ о движеніи твердаго тѣла.

Эллипсоидъ инерціи для центра инерціи (данной системы точекъ) называется *центральнымъ эллипсоидомъ инерціи*, главные оси его — *главными центральными осями инерціи* данной системы, а моменты инерціи $\mathcal{A}_c, \mathcal{B}_c, \mathcal{C}_c$ вокругъ этихъ осей CE_c, CG_c, CZ_c — *главными центральными моментами инерціи* данной системы.

Величина момента инерціи данной системы точекъ вокругъ оси CU , проходящей черезъ центръ инерціи этой системы, выразится формулою:

$$(I_U)_c = \mathcal{A}_c \lambda^2 + \mathcal{B}_c \mu^2 + \mathcal{C}_c \nu^2, \dots \dots \dots (670)$$

если за оси координатъ взяты главные центральныя оси инерціи CE_c, CG_c, CZ_c .

§ 106. Зависимость между моментами инерціи вокругъ параллельныхъ осей.

Пусть черезъ точку $Ю$ проведена какая-ли'о ось, а черезъ центръ инерціи C — другая, ей параллельная; возьмемъ C за начало координатъ, послѣднюю ось — за координатную ось CZ , плоскость, проходящую черезъ обѣ оси, — за координатную плоскость ZCE (черт. 59); означимъ черезъ $(I_C)_c$ моментъ инерціи данной системы вокругъ оси CZ , черезъ $(I_C)_\omega$ моментъ инерціи ея вокругъ оси $ЮZ$, и черезъ Δ — разстояніе CK между осями.

Моменты инерціи системы вокругъ осей CZ и $ЮZ$, выразятся слѣдующими суммами:

$$(I_C)_c = \sum_{i=1}^{i=n} m_i (\xi_i^2 + \eta_i^2), \quad (I_C)_\omega = \sum_{i=1}^{i=n} m_i ((\xi_i - \Delta)^2 + \eta_i^2),$$

последнюю же сумму можно представить такъ:

$$(I_c)_o = \sum_{i=1}^n m_i (\xi_i^2 + \eta_i^2) = 2\Delta \sum_{i=1}^n m_i \xi_i + M\Delta^2;$$

но такъ какъ точка C есть центр инерціи, то сумма, заключающаяся во второмъ членѣ второй части, равна нулю, а потому:

$$(I_c)_o = (I_c)_c + M\Delta^2, \quad (671)$$

и вообще:

$$(I_o)_k = (I_o)_c + M\Delta^2 (672)$$

Если бы всѣ точки данной системы были сосредоточены въ ея центрѣ инерціи, то моментъ инерціи ея вокругъ оси KU былъ бы равенъ произведенію $M\Delta^2$. Выведенная здѣсь формула (672) выражаетъ, что *моментъ инерціи данной системы вокругъ какой либо оси, не проходящей черезъ центръ инерціи, равенъ суммѣ, составленной изъ момента инерціи этой же системы вокругъ параллельной оси, проведенной черезъ центръ инерціи и изъ того момента инерціи, который система имѣла бы, если бы была вся сосредоточена въ своемъ центрѣ инерціи.*

Между величинами моментовъ инерціи данной системы вокругъ двухъ параллельныхъ осей KU и K_1U_1 , отстоящихъ отъ центра инерціи C на разстояніяхъ Δ и Δ_1 , существуетъ слѣдующая зависимость:

$$\begin{aligned} (\text{Мом. инерц. вокругъ оси } KU) &= M\Delta^2 = \\ &= (\text{Мом. инерц. вокругъ оси } K_1U_1) + M\Delta_1^2. \end{aligned}$$

Между моментами инерціи вокругъ всевозможныхъ параллельныхъ осей, моментъ инерціи вокругъ той оси, которая проходитъ центръ инерціи, имѣетъ величину наименьшую.

§ 107. По центральнымъ главнымъ осямъ и моментамъ инерціи могутъ быть опредѣлены эллипсоиды инерціи во всѣхъ прочихъ точкахъ пространства.

Зная направленія главныхъ центральныхъ осей инерціи $C\Xi_0$,

CU_0 , CZ_0 данной системы и величины главных центральных моментов инерции, можем определить направлѣнія главных осей и величины главных моментов въ какой угодно точкѣ K .

Означимъ черезъ ξ_k , η_k , ζ_k координаты этой точки K относительно осей CE_0 , CU_0 , CZ_0 и черезъ λ , μ , ν — косинусы угловъ, составляемыхъ съ этими осями направлѣніями параллельныхъ между собою осей KU и CU , проведенныхъ черезъ точки K и C ; въ квадратъ разстоянія Δ точки K отъ оси CU можно выразить такъ:

$$\Delta^2 = r_k^2 - r_k^2 \cos^2(r_k, U) = \lambda^2(\eta_k^2 + \zeta_k^2) + \mu^2(\zeta_k^2 + \xi_k^2) + \\ + \nu^2(\xi_k^2 + \eta_k^2) - 2\mu\nu\eta_k\zeta_k - 2\nu\lambda\zeta_k\xi_k - 2\lambda\mu\xi_k\eta_k,$$

поэтому изъ равенства (672) и выраженія (670) получимъ слѣдующее выраженіе величины момента инерции данной системы вокругъ оси KU :

$$(I_U)_k = A_k\lambda^2 + B_k\mu^2 + C_k\nu^2 - 2D_k\mu\nu - 2E_k\nu\lambda - 2F_k\lambda\mu, \dots (673)$$

$$\left. \begin{aligned} A_k &= \mathfrak{A}_c + M(\eta_k^2 + \zeta_k^2), \\ B_k &= \mathfrak{B}_c + M(\zeta_k^2 + \xi_k^2), \\ C_k &= \mathfrak{C}_c + M(\xi_k^2 + \eta_k^2), \end{aligned} \right\} \dots (674) \quad \left. \begin{aligned} D_k &= M\eta_k\zeta_k, \\ E_k &= M\zeta_k\xi_k, \\ F_k &= M\xi_k\eta_k. \end{aligned} \right\} \dots (675)$$

Направлѣнія главных осей инерции той же системы въ точкѣ K суть направлѣнія главных осей эллипсоида инерции:

$$1 = \frac{1}{m \cdot \delta^4} (A_k x^2 + B_k y^2 + C_k z^2 - 2D_k yz - 2E_k zx - 2F_k xy), \dots (676)$$

гдѣ x , y , z суть координаты относительно осей KX , KY , KZ , проведенныхъ черезъ точку K параллельно осямъ CE_0 , CU_0 , CZ_0 .

Примѣнимъ къ эллипсоиду (676) извѣстный въ аналитической геометріи способъ опредѣленія направлѣній главных осей поверхности второго порядка.

Пусть λ_x , λ_y , λ_z суть косинусы угловъ, составляемыхъ одною изъ такихъ осей съ осями CX , CY , CZ ; эти косинусы опредѣлятся изъ равенствъ:

$$\left. \begin{aligned} A_k \lambda_x - F_k \lambda_y - E_k \lambda_z &= I \lambda_x \\ B_k \lambda_y - D_k \lambda_z - F_k \lambda_x &= I \lambda_y \\ C_k \lambda_z - E_k \lambda_x - D_k \lambda_y &= I \lambda_z \end{aligned} \right\}, \dots \dots \dots (677)$$

гдѣ I есть одинъ изъ трехъ корней уравненія третьей степени:

$$\begin{vmatrix} (A_k - I), & -F_k, & -E_k \\ -F_k, & (B_k - I), & -D_k \\ -E_k, & -D_k, & (C_k - I) \end{vmatrix} = 0 \dots \dots (678)$$

Помноживъ равенства (677): первое на λ_x , второе — на λ_y , третье на λ_z , и затѣмъ сложивъ эти равенства, мы увидимъ, что I означаетъ величину момента инерціи системы вокругъ искомой главной оси инерціи, слѣдовательно, три корня уравненія (678) суть моменты инерціи \mathfrak{A}_k , \mathfrak{B}_k , \mathfrak{C}_k вокругъ главныхъ осей разсматриваемаго эллипсоида.

Пусть \mathfrak{A}_k есть моментъ инерціи вокругъ той главной оси KE , косинусы угловъ которой съ осями KX , KY , KZ , суть λ_x , λ_y , λ_z ; двѣ другія главныя оси означимъ черезъ KY , KZ , косинусы угловъ, составляемыхъ этими осями съ осями KX , KY , KZ — черезъ μ_x , μ_y , μ_z , ν_x , ν_y , ν_z ; пусть \mathfrak{B}_k есть моментъ инерціи вокругъ оси KY , \mathfrak{C}_k — вокругъ оси KZ .

Если въ уравненія (677) подставить \mathfrak{A}_k вмѣсто I , то они послужатъ для опредѣленія величинъ λ_x , λ_y , λ_z ; если же замѣнить I черезъ \mathfrak{B}_k , то тѣ же самыя уравненія дадутъ, не λ_x , λ_y , λ_z , а косинусы μ_x , μ_y , μ_z ; точно также эти уравненія послужатъ для опредѣленія косинусовъ ν_x , ν_y , ν_z , если I будетъ замѣнено величиною \mathfrak{C}_k .

Если точка K лежитъ на которой-либо изъ главныхъ центральныхъ осей инерціи, то главныя оси инерціи KE , KY , KZ параллельны главнымъ центральнымъ осямъ; на примѣръ, если K находится на оси CE_0 , то η_k и ζ_k равны нулю, а слѣдовательно и D_k , E_k , F_k ; такъ что выраженіе (673) будетъ имѣть въ этомъ случаѣ слѣдующій видъ:

$$(I_U)_k = \mathfrak{A}_c \lambda^2 + (\mathfrak{B}_c + M \xi_k^2) \mu^2 + (\mathfrak{C}_c + M \xi_k^2) \nu^2 \dots \dots (679)$$

Можно составить себѣ общее представленіе о направленіяхъ главныхъ осей инерціи во всѣхъ точкахъ пространства; для этого надо подвергнуть уравненія (677) слѣдующему разсмотрѣнію.

Подставивъ въ нихъ \mathfrak{A}_k вмѣсто I и выраженія (674), (675) вмѣсто A_k, B_k, \dots, F_k , представимъ ихъ подъ слѣдующимъ видомъ:

$$\lambda_x = \frac{\xi_k}{(\alpha + q_1)} h; \quad \lambda_y = \frac{\eta_k}{(\beta + q_1)} h; \quad \lambda_z = \frac{\zeta_k}{(\gamma + q_1)} h, \dots \quad (680)$$

гдѣ:

$$\alpha = \frac{\mathfrak{A}_c}{M}, \quad \beta = \frac{\mathfrak{B}_c}{M}, \quad \gamma = \frac{\mathfrak{C}_c}{M},$$

$$h = \lambda_x \xi_k + \lambda_y \eta_k + \lambda_z \zeta_k, \quad q_1 = r_k^2 - \frac{\mathfrak{A}_k}{M} \dots \dots \dots (861)$$

Если исключить $\lambda_x, \lambda_y, \lambda_z$ изъ этихъ уравненій (680), то получимъ результатъ:

$$\frac{\xi_k^2}{\alpha + q_1} + \frac{\eta_k^2}{\beta + q_1} + \frac{\zeta_k^2}{\gamma + q_1} - 1 = 0,$$

выражающій, что точка K находится на поверхности второго порядка:

$$\frac{\xi^2}{\alpha + q_1} + \frac{\eta^2}{\beta + q_1} + \frac{\zeta^2}{\gamma + q_1} = 1, \dots \dots \dots (682, 1)$$

имѣющей центромъ точку C и главными осями—оси CE_0, CY_0, CZ_0 .

Изъ равенствъ (680) и равенства $\lambda_x^2 + \lambda_y^2 + \lambda_z^2 = 1$ окажется, что

$$h = \frac{1}{\sqrt{\frac{\xi_k^2}{(\alpha + q_1)^2} + \frac{\eta_k^2}{(\beta + q_1)^2} + \frac{\zeta_k^2}{(\gamma + q_1)^2}}};$$

а потому вторыя части равенствъ (680) суть косинусы угловъ, составляемыхъ съ осями CE_0, CY_0, CZ_0 нормалью къ поверхности (682, 1), возстановленной изъ точки K ; слѣдовательно, главная ось KE совпадаетъ съ этою нормалью.

Такимъ же образомъ убѣдимся, что черезъ точку K проходятъ еще двѣ поверхности:

$$\frac{\xi^2}{\alpha + q_2} + \frac{\eta^2}{\beta + q_2} + \frac{\zeta^2}{\gamma + q_2} = 1, \dots \dots \dots (682, 2)$$

$$\frac{\xi^2}{\alpha + q_3} + \frac{\eta^2}{\beta + q_3} + \frac{\zeta^2}{\gamma + q_3} = 1, \dots \dots \dots (682, 3)$$

гдѣ:

$$q_2 = r_{2k}^2 - \frac{\mathfrak{B}_k}{M}, \dots \dots \dots (683), \quad q_3 = r_k^2 - \frac{\mathfrak{C}_k}{M}; \dots \dots \dots (684)$$

по нормали къ поверхности (682, 2) направлена главная ось KY , а по нормали къ поверхности (682, 3) — главная ось KZ .

Положимъ, что главные моменты инерціи $\mathfrak{A}_k, \mathfrak{B}_k, \mathfrak{C}_k$ въ точкѣ K не равны другъ другу и что $\mathfrak{A}_k < \mathfrak{B}_k < \mathfrak{C}_k$; въ такомъ случаѣ изъ выражений (681) (683) (684) слѣдуетъ: $q_1 > q_2 > q_3$. Если принять во вниманіе, что \mathfrak{A}_k есть наименьшій изъ моментовъ инерціи системы вокругъ осей, проходящихъ черезъ точку K , то легко показать, что поверхность (682. 1) есть эллипсоидъ; въ самомъ дѣлѣ, суммы $(\alpha + q_1), (\beta + q_1), (\gamma + q_1)$ могутъ быть представлены (при помощи формулъ (674)) подъ слѣдующимъ видомъ:

$$\frac{A_k - \mathfrak{A}_k}{M} + \xi_k^2, \quad \frac{B_k - \mathfrak{A}_k}{M} + \eta_k^2, \quad \frac{C_k - \mathfrak{A}_k}{M} + \zeta_k^2,$$

а отсюда ясно, что всѣ онѣ положительныя.

Другія двѣ поверхности (682, 2) (682, 3) суть гиперболоиды, одинъ однополый, другой о двухъ полахъ. Чтобы показать это, замѣтимъ, что q_1, q_2, q_3 суть корни уравненія третьей степени:

$$(\alpha + q)(\beta + q)(\gamma + q) - \xi_k^2(\beta + q)(\gamma + q) - \eta_k^2(\gamma + q)(\alpha + q) - \zeta_k^2(\alpha + q)(\beta + q) = 0, \dots \dots \dots (685)$$

первая часть котораго

при $q = +\infty$ обращается въ $+\infty$

$$\begin{array}{lll} \text{" } q = -\alpha & \text{" } & \text{" } -\xi_k^2(\beta - \alpha)(\gamma - \alpha), \\ \text{" } q = -\beta & \text{" } & \text{" } +\eta_k^2(\gamma - \beta)(\beta - \alpha), \\ \text{" } q = -\gamma & \text{" } & \text{" } -\zeta_k^2(\gamma - \alpha)(\gamma - \beta); \end{array}$$

отсюда видно, что если $\alpha < \beta < \gamma$, то одинъ изъ трехъ корней этого уравненія заключается между $+\infty$ и $-\alpha$, другой между $-\alpha$ и $-\beta$, третій между $-\beta$ и $-\gamma$; первый корень есть q_1 , потому что, какъ мы уже доказали, $(\alpha + q_1)$ болѣе нуля, слѣдующій корень есть q_2 , а меньшій есть q_3 .

Такъ какъ:

$$+\infty > q_1 > -\alpha > q_2 > -\beta > q_3 > -\gamma,$$

то:

$$\gamma + q_3 > 0, \quad \beta + q_3 < 0, \quad \alpha + q_3 < 0,$$

$$\gamma + q_2 > 0, \quad \beta + q_2 > 0, \quad \alpha + q_2 < 0,$$

слѣдовательно, поверхность (682, 3) есть двухполый гиперболоидъ, дѣйствительная ось котораго совпадаетъ съ осью CZ_0 , а поверхность (682, 2) есть однополый гиперболоидъ, непересѣкающая ось котораго совпадаетъ съ осью CE_0 .

Изъ всего сказаннаго въ настоящемъ параграфѣ слѣдуетъ, что черезъ каждую точку пространства можно провести три взаимно-ортогональныя поверхности втораго порядка: эллипсоидъ, гиперболоидъ однополый и гиперболоидъ о двухъ полахъ; центры этихъ трехъ поверхностей находятся въ C и главные оси ихъ совпадаютъ съ главными центральными осями инерціи; нормали, возстановленныя къ этимъ тремъ поверхностямъ изъ точки ихъ пересѣченія, суть направленія главныхъ осей инерціи въ этой точкѣ.

Всѣ эллипсоиды, всѣ гиперболоиды однополые и о двухъ полахъ суть три системы взаимно-ортогональныхъ поверхностей; совокупность всѣхъ этихъ поверхностей образуютъ такъ-называемую *систему эллиптическихъ координатъ*.

§ 108. Эллиптическія координаты.

Координатныя поверхности этой системы координатъ суть:

1) Эллипсоиды, выражаемые уравненіями (682, 1), гдѣ q_1 можетъ имѣть всякія значенія отъ $+\infty$ до $(-\alpha)$; эллипсоидъ $q_1 = \infty$ имѣетъ бесконечно большія полуоси; эллипсоидъ $q_1 = -\alpha$ вплотную облегааетъ эллиптическую пластинку, находящуюся внутри контура:

$$\xi = 0, \quad \frac{\eta^2}{\beta - \alpha} + \frac{\zeta^2}{\gamma - \alpha} = 1, \quad (686)$$

такъ какъ полуось $\sqrt{\alpha + q_1}$ этого эллипсоида равна нулю.

2) Однополые гиперболоиды, выражаемые уравненіями (682, 2), гдѣ q_2 можетъ имѣть всякія значенія отъ $(-\alpha)$ до $(-\beta)$; непересѣкающія или мнимыя полуоси ихъ направлены по оси E_0 , дѣйствительныя полуоси, направленные по оси Y_0 , не болѣе $\sqrt{\beta - \alpha}$, а дѣйствительныя полуоси, направленные по оси Z_0 , не болѣе $\sqrt{\gamma - \alpha}$ и не менѣе $\sqrt{\gamma - \beta}$; предѣльными поверхностями этой системы гиперболоидовъ служатъ тѣ поверхности, которыя имѣютъ параметры $q_2 = -\alpha$, $q_2 = -\beta$; поверхность $q_2 = -\alpha$ должно разсматривать какъ гиперболоидъ, облегающій вплотную обѣ стороны той части плоскости Y_0Z_0 , которая остается за выдѣленіемъ эллиптической пластинки, упомянутой выше; другую предѣльную поверхность: $q_2 = -\beta$ должно разсматривать какъ гиперболоидъ, облегающій

вплотную обѣ стороны той части плоскости Z_0E_0 , которая ограничена гиперболою:

$$\eta = 0, \quad \frac{\zeta^2}{\gamma - \beta} - \frac{\xi^2}{\beta - \alpha} = 1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (687)$$

и заключаетъ въ себѣ ось E_0 .

3) Гиперболоиды о двухъ полахъ, выражаемые уравненіями (682, 3); гдѣ q_3 можетъ имѣть всякія значенія отъ $q_3 = -\beta$ до $q_3 = -\gamma$; дѣйствительныя полуоси этихъ гиперболюидовъ направлены по оси Z_0 и имѣютъ величины не большія $\sqrt{\gamma - \beta}$; предѣльная поверхность $q_3 = -\beta$ есть гиперболюидъ, вплотную облегающій тѣ двѣ части плоскости E_0Z_0 , которыя ограничены гиперболою (687) и простираются въ безконечность; другая предѣльная поверхность: $q_3 = -\gamma$ есть вся плоскость E_0Y_0 .

Черезъ каждую точку пространства проходятъ три координатныя поверхности: эллипсоидъ, гиперболюидъ однополый и гиперболюидъ двуполый, которые въ этой точкѣ взаимно-ортогональны; координатныя параметры q_1, q_2, q_3 этихъ поверхностей суть корни уравненія (685) и они называются эллиптическими координатами этой точки.

Рѣшивъ уравненія (682, 1), (682, 2), (682, 3) относительно ξ, η, ζ , получимъ слѣдующія выраженія прямоугольныхъ прямолинейныхъ координатъ въ эллиптическихъ координатахъ:

$$\xi = \pm \sqrt{\frac{(\alpha + q_1)(\alpha + q_2)(\alpha + q_3)}{(\beta - \alpha)(\gamma - \alpha)}} *). \quad . \quad . \quad . \quad (688, a)$$

$$\eta = \pm \sqrt{\frac{(\beta + q_1)(\beta + q_2)(\beta + q_3)}{(\beta - \alpha)(\beta - \gamma)}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (688, b)$$

$$\zeta = \pm \sqrt{\frac{(\gamma + q_1)(\gamma + q_2)(\gamma + q_3)}{(\gamma - \alpha)(\gamma - \beta)}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (688, c)$$

Эллиптическія координатныя поверхности называются софокусными, потому что кривыя втораго порядка, по которымъ эти поверхности пе-

*) Выводъ этихъ формулъ значительно облегчается помощію преобразованій, подобныхъ слѣдующему:

ресѣкаются плоскостями $\Xi_0\Upsilon_0$, Υ_0Z_0 , $Z_0\Xi_0$, имѣютъ общіе фокусы *).

§ 109. Квадратичные моменты: полярные и относительно плоскостей. Эллипсоиды: основной и гираціонный. Плечи инерціи.

Квадратичнымъ полярнымъ моментомъ системы точекъ вокругъ полюса K называется сумма:

$$H_k = \sum_{i=1}^{i=n} m_i r_i^2, \dots \dots \dots (689)$$

гдѣ r_i есть разстояніе матеріальной точки m_i отъ точки K .

Сумма произведеній, составленныхъ изъ массъ точекъ на квадраты ихъ разстояній отъ какой-либо плоскости, называется *квадратичнымъ моментомъ относительно этой плоскости*; такъ, квадратичный мо-

Означимъ: $\alpha + q_1$, $\alpha + q_2$, $\alpha + q_3$, $\beta + q_1$, $\beta + q_2$, \dots , $\gamma + q_3$, черезъ α_1 , α_2 , α_3 , β_1 , β_2 , \dots , γ_3 .

$$D = \begin{vmatrix} \frac{1}{\alpha_1} & \frac{1}{\beta_1} & \frac{1}{\gamma_1} \\ \frac{1}{\alpha_2} & \frac{1}{\beta_2} & \frac{1}{\gamma_2} \\ \frac{1}{\alpha_3} & \frac{1}{\beta_3} & \frac{1}{\gamma_3} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{\alpha_1} & \frac{1}{\beta_1} - \frac{1}{\alpha_1} & \frac{1}{\gamma_1} - \frac{1}{\alpha_1} \\ \frac{1}{\alpha_2} & \frac{1}{\beta_2} - \frac{1}{\alpha_2} & \frac{1}{\gamma_2} - \frac{1}{\alpha_2} \\ \frac{1}{\alpha_3} & \frac{1}{\beta_3} - \frac{1}{\alpha_3} & \frac{1}{\gamma_3} - \frac{1}{\alpha_3} \end{vmatrix} = \frac{(\alpha - \beta)(\alpha - \gamma)}{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3} D_1$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{\beta_1} & \frac{1}{\gamma_1} \\ 1 & \frac{1}{\beta_2} & \frac{1}{\gamma_2} \\ 1 & \frac{1}{\beta_3} & \frac{1}{\gamma_3} \end{vmatrix}.$$

*) Дальнѣйшія подробности относительно эллиптическихъ координатъ и софокусныхъ поверхностей можно найти въ слѣдующихъ сочиненіяхъ:

G. Salmon. A Treatise on the Analytic Geometry of three Dimensions. 1874.

Hesse. Analytische Geometrie des Raumes.

Сомовъ. Раціональная механика.

Jacobi. Vorlesungen über Dynamik.

Будаевъ. Теоретическая механика. 1871.

ментъ относительно плоскости, проходящей через точку K и перпендикулярной къ оси KU , выразится такъ:

$$(I'_{U'})_k = \sum_{i=1}^{i=n} m_i (r_i^2 - \rho_i^2) = H_k - (I_U)_k \dots \dots (690)$$

Квадратичные моменты относительно плоскостей координатъ UKZ , ZKX , XKU суть слѣдующія суммы:

$$A'_k = \sum_{i=1}^{i=n} m_i x_i^2, \quad B'_k = \sum_{i=1}^{i=n} m_i y_i^2, \quad C'_k = \sum_{i=1}^{i=n} m_i z_i^2 \dots \dots (691)$$

Легко видѣть, что

$$A_k + B_k + C_k = 2(A'_k + B'_k + C'_k) = 2H_k \dots \dots (692)$$

$$2A'_k = B_k + C_k - A_k; \quad 2B'_k = C_k + A_k - B_k; \dots \dots (693)$$

$$2C'_k = A_k + B_k - C_k \dots \dots \dots (693)$$

Изъ выраженій (690) и (665) слѣдуетъ:

$$(I'_{U'})_k = A'_k \lambda^2 + B'_k \mu^2 + C'_k \nu^2 + 2D_{k\mu\nu} + 2E_{k\nu\lambda} + 2F_{k\lambda\mu} \dots \dots (694)$$

Если по направленію нормали къ каждой плоскости, проведенной через точку K , отложить отъ этой точки длину, обратно-пропорціональную корню квадратному изъ квадратичнаго момента относительно этой плоскости, то концы этихъ длинъ образуютъ поверхность эллипсоида, называемаго *основнымъ эллипсоидомъ* *); уравненіе этого эллипсоида:

$$1 = A'_k x^2 + B'_k y^2 + C'_k z^2 + 2D_{k\mu\nu} yz + 2E_{k\nu\lambda} zx + 2F_{k\lambda\mu} xy \dots \dots (695)$$

Главные оси этого эллипсоида, конечно, совпадаютъ съ главными осями инерціи.

Квадратичный моментъ относительно всякой плоскости, не проходящей черезъ центръ инерціи, равенъ квадратичному моменту относительно

*) W. Thomson называетъ этотъ эллипсоидъ такъ: ellipsoid of construction, см. его статью: On the principal axes of a solid body; Cambridge and Dublin Math. Journ. Vol. I. 1846.

параллельной плоскости, проходящей через центр инерціи, сложенному съ произведеніемъ изъ массы системы на квадратъ разстоянія между плоскостями; наримѣръ:

$$A'_k = \sum_{i=1}^{i=n} m_i (\xi_i + x_c)^2 = A'_c + 2x_c \sum_{i=1}^{i=n} m_i \xi_i + Mx_c^2,$$

$$A'_k = A'_c + Mx_c^2 \dots \dots \dots (696)$$

Отсюда слѣдуетъ, что квадратичный полярный моментъ вокругъ полюса K равенъ квадратичному полярному моменту вокругъ центра инерціи, сложенному съ произведеніемъ изъ массы системы на квадратъ разстоянія между полюсами; такъ что, если r_k есть разстояніе точки K отъ полюса, то:

$$H_k = H_c + Mr_k^2 \dots \dots \dots (697)$$

Квадратичный моментъ относительно главной плоскости YKZ точки K (эта плоскость есть касательная плоскость къ эллипсоиду (682, 1) въ точкѣ K) равенъ:

$$\mathfrak{A}'_k = H_k - \mathfrak{A}_k = H_c + M\left(r_k^2 - \frac{\mathfrak{A}_k}{M}\right) = H_c + Mq_1;$$

такъ что:

$$q_1 = \frac{\mathfrak{A}'_k - H_c}{M}, \quad q_2 = \frac{\mathfrak{B}'_k - H_c}{M}, \quad q_3 = \frac{\mathfrak{C}'_k - H_c}{M},$$

слѣдовательно, квадратичные моменты относительно всѣхъ касательныхъ плоскостей одной и той же координатной поверхности эллиптическихъ координатъ имѣютъ одну и ту же величину, равную:

$$\frac{\mathfrak{A}_c + \mathfrak{B}_c + \mathfrak{C}_c}{2} + Mq, \dots \dots \dots (698)$$

гдѣ $\mathfrak{A}_c, \mathfrak{B}_c, \mathfrak{C}_c$ суть главные центральные моменты инерціи системы материальныхъ точекъ, а q — координатный эллиптический параметръ координатной поверхности.

Кромѣ вышеупомянутаго эллипсоида, мы дадимъ здѣсь понятіе еще объ одномъ эллипсоидѣ, выражаемомъ слѣдующимъ уравненіемъ:

$$\frac{\xi^2}{\mathfrak{A}_k} + \frac{\eta^2}{\mathfrak{B}_k} + \frac{\zeta^2}{\mathfrak{C}_k} = \frac{1}{M}; \dots \dots \dots (699)$$

этот эллипсоидъ, называемый *инерционнымъ эллипсоидомъ* *) для точки K , обладаетъ тѣмъ свойствомъ, что если мы проведемъ какую-либо касательную къ нему плоскость, то квадратъ расстоянія этой плоскости отъ точки K , будучи умноженъ на массу системы, дастъ произведение, равное моменту инерціи системы вокругъ оси, проходящей черезъ точку K и перпендикулярной къ этой касательной плоскости. предоставляемъ читателю убѣдиться въ этомъ.

Если раздѣлить моментъ инерціи данной системы материальныхъ точекъ вокругъ какой либо оси на массу системы, и затѣмъ изъ частнаго извлечь квадратный корень, то получится нѣкоторая длина, называемая *плечомъ инерціи* данной системы вокругъ этой оси.

§ 110. Примеры вычисленія моментовъ инерціи нѣкоторыхъ тѣлъ.

При опредѣленіи направленій главныхъ осей инерціи весьма полезно имѣть въ виду слѣдующія замѣчанія.

1) Если система точекъ или сплошное тѣло имѣетъ полную симметрію относительно нѣкоторой плоскости, такъ что кратчайшія разстоянія между взаимно-симметричными элементами перпендикулярны къ этой плоскости и дѣлятся ею пополамъ, то для каждой изъ точекъ этой плоскости двѣ главные оси инерціи заключаются въ самой плоскости, а третья перпендикулярна къ ней. Въ самомъ дѣлѣ, если принять эту плоскость за плоскость XU , то D_x и E_x будутъ равны нулю, потому что каждому элементу dm , имѣющему какія либо координаты x, y, z , соответствуетъ симметрично расположенный элементъ, имѣющій ту же самую массу dm и координаты $x, y, (-z)$; поэтому все элементы сумми:

$$D_x = \sum m y z, \quad E_x = \sum m z x$$

или интеграловъ:

$$D_x = \int \int \int y z d m, \quad E_x = \int \int \int z x d m$$

попарно сокращаются, а слѣдовательно, уравненіе эллипсоида инерціи будетъ:

$$d^4. m = A_x x^2 - 2 F_x x y + B_x y^2 + G_x z^2.$$

*) Ellipsoid of gyration

2) Если однородное сплошное тѣло имѣетъ три взаимно-перпендикулярныя плоскости симметріи (которыя проходятъ черезъ центръ инерціи), то пересѣченія этихъ осей суть главныя центральныя оси инерціи тѣла.

3) Если всѣ точки системы находятся въ одной плоскости или сплошное тѣло имѣетъ видъ бесконечно-тонкой плоской пластинки, то для всякой точки этой плоскости или пластинки одна изъ главныхъ осей инерціи перпендикулярна къ плоскости. Если эту плоскость принять за плоскость XU , то для всѣхъ точекъ системы или элементовъ пластинки координата $z = 0$, а потому:

$$A_k = B'_k = \sum m y^2, \quad B_k = A'_k = \sum m x^2, \quad (700)$$

$$\mathfrak{C}_k^*) = \sum m(x^2 + y^2) = A'_k + B'_k, \quad (701)$$

$$D_k = 0, \quad E_k = 0, \quad F_k = \sum m x y.$$

4) Если система материальныхъ точекъ имѣетъ ось симметріи или сплошное однородное тѣло есть тѣло вращенія, то во всякой точкѣ оси симметріи эллипсоидъ инерціи есть эллипсоидъ вращенія.

Обращаемся къ примѣрамъ. Прежде всего приведемъ нѣсколько примѣровъ вычисленія главныхъ центральныхъ моментовъ инерціи сплошныхъ однородныхъ тѣлъ, имѣющихъ три взаимно-перпендикулярныя плоскости симметріи. Въ этихъ случаяхъ удобнѣе всего вычислять слѣдующія величины по слѣдующимъ формуламъ:

$$\mathfrak{A}'_c = \sigma \int \int \int \xi^2 d\xi d\eta d\zeta = 2\sigma \int_0^{\xi_1} \xi^2 Q_\xi d\xi, \quad . . (702, 1)$$

$$\mathfrak{B}'_c = \sigma \int \int \int \eta^2 d\xi d\eta d\zeta = 2\sigma \int_0^{\eta_1} \eta^2 Q_\eta d\eta, \quad . (702, 2)$$

*) $H_k = \mathfrak{C}_k$.

$$\mathfrak{G}'_c = 2 \int \int \int \zeta \, d\zeta \, d\eta \, d\xi = 2 \int_0^{\xi_1} \zeta \, Q_\zeta \, d\zeta, \quad (702, 3)$$

гдѣ Q_ξ есть величина площади сѣченія тѣла координатною плоскостью ξ , а ξ_1 предѣльная координата тѣла по оси Ξ_0 ; Q_η , Q'_η , η_1 , ζ_1 имѣютъ соотвѣтственные значенія по отношенію къ координатамъ η и ζ .

Примѣръ 86-й. Вычислить главные центральные моменты инерціи однороднаго эллипсоида:

$$\frac{\xi^2}{a^2} + \frac{\eta^2}{b^2} + \frac{\zeta^2}{c^2} = 1.$$

Въ этомъ случаѣ: $\xi_1 = a$, $\eta_1 = b$, $\zeta_1 = c$.

$$Q_\xi = \pi b c \left(1 - \frac{\xi^2}{a^2}\right), \quad Q_\eta = \pi c a \left(1 - \frac{\eta^2}{b^2}\right), \quad Q_\zeta = \pi a b \left(1 - \frac{\zeta^2}{c^2}\right),$$

$$\mathfrak{A}_c = M \frac{a^2}{5}, \quad \mathfrak{B}_c = M \frac{b^2}{5}, \quad \mathfrak{G}_c = M \frac{c^2}{5} \quad \quad (703)$$

Поэтому:

$$\mathfrak{A}_c = \frac{M}{5}(b^2 + c^2), \quad \mathfrak{A}_c = \frac{M}{5}(c^2 + a^2), \quad \mathfrak{G}_c = \frac{M}{5}(a^2 + b^2). \quad (704)$$

Если $a > b > c$, то $\mathfrak{A}_c < \mathfrak{B}_c < \mathfrak{G}_c$, т. е., вокругъ наибольшей полуоси моментъ инерціи наименьшій и вокругъ наименьшей полуоси — наибольшій; поэтому наибольшая главная полуось центральнаго эллипсоида инерціи направлена по оси Ξ_0 , средняя — по оси Υ_0 , меньшая — по оси Z_0 .

Если данный эллипсоидъ есть эллипсоидъ вращенія, то таковъ же и центральный эллипсоидъ инерціи; притомъ *удлиненный* сплошной эллипсоидъ имѣетъ *удлиненный* центральный эллипсоидъ инерціи и, обратно, *планетарный* сплошной эллипсоидъ имѣетъ *планетарный* же эллипсоидъ инерціи. Если $a = b$, то:

$$\mathfrak{A}_c = \mathfrak{B}_c = \frac{M}{5}(c^2 + a^2), \quad \mathfrak{G}_c = \frac{2}{5} M a^2; \quad . . \quad (705)$$

моменты инерціи вокругъ всѣхъ экваторіальныхъ центральныхъ осей равны между собою и равны \mathcal{U}_c .

Центральный моментъ инерціи сплошнаго однороднаго шара вокругъ какой либо центральной оси равенъ $\frac{2}{5} MR^2$, гдѣ R есть радіусъ шара.

Примѣръ 87-й. Главные центральные моменты инерціи однороднаго прямоугольнаго параллелоипеда, длины сторонъ котораго: $2a$, $2b$, $2c$.

Здѣсь:

$$\xi_1 = a, \quad \eta_1 = b, \quad \zeta_1 = c, \quad Q_\xi = 4bc, \quad Q_\eta = 4ca, \quad Q_\zeta = 4ab,$$

$$\mathcal{U}_c = \frac{M}{3} (b^2 + c^2), \quad \mathcal{V}_c = \frac{M}{3} (c^2 + a^2), \quad \mathcal{W}_c = \frac{M}{3} (a^2 + b^2); \quad . \quad (706)$$

(главныя центральныя оси инерціи перпендикулярны къ гранямъ параллелоипеда).

Кубъ имѣетъ центральнымъ эллипсоидомъ шаръ; моментъ инерціи вокругъ всякой центральной оси равенъ $\frac{2}{3} Ma^2$, гдѣ $2a$ — сторона куба.

Примѣръ 88-й. Главные центральные моменты инерціи прямаго однороднаго эллиптическаго цилиндра (высота $2h$, полуоси основанія b и c).

$$\mathcal{U}_c = \frac{M}{4} (b^2 + c^2), \quad \mathcal{V}_c = M \left(\frac{h^2}{3} + \frac{c^2}{4} \right), \quad \mathcal{W}_c = M \left(\frac{h^2}{3} + \frac{b^2}{4} \right). \quad (707)$$

Далѣе, приведемъ нѣсколько примѣровъ вычисленія главныхъ центральныхъ моментовъ однородныхъ тѣлъ вращенія.

Для вычисленія моментъ инерціи такого тѣла вокругъ оси вращенія CZ_0 , выразимъ элементы объема въ круговыхъ цилиндрическихъ координатахъ и произведемъ интегрированіе по θ въ предѣлахъ отъ нуля до 2π ; получимъ:

$$\mathcal{W}_c = 2\pi\sigma \int \int \rho^3 d\rho d\zeta \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (708)$$

Вслѣдствіе симметріи тѣла вокругъ оси вращенія, нижеслѣдующія величины равны между собою и потому равны половинѣ \mathfrak{C}_c .

$$\mathfrak{A}'_c = \mathfrak{B}'_c = \frac{1}{2} \mathfrak{C}_c; \dots \dots \dots (709)$$

наконецъ моментъ инерціи тѣла вокругъ всякой центральной экваторьяльной оси равенъ:

$$\mathfrak{A}_c = \mathfrak{B}_c = \sigma \int \zeta^2 Q_\zeta d\zeta + \frac{1}{2} \mathfrak{C}_c \dots \dots \dots (710)$$

Примѣръ 89-й. Главные центральные моменты инерціи цилиндрической круговой трубки; длина трубки $2h$, радіусъ внутренней поверхности R , толщина стѣнки k .

Въ выраженіи (708) надо интегрировать по ρ въ предѣлахъ отъ R до $(R + k)$ и по ζ въ предѣлахъ отъ $(-h)$ до $(+h)$.

$$\mathfrak{C}_c = \frac{M}{2} (2R^2 + 2Rk + k^2); \quad \mathfrak{A}_c = \mathfrak{B}_c = M \frac{h^2}{3} + \frac{1}{2} \mathfrak{C}_c \dots \dots (711)$$

Примѣръ 90. Главные центральные моменты инерціи кольца съ круговымъ меридіональнымъ сѣченіемъ; радіусъ сѣченія кольца $= r$, разстояніе центра сѣченія до оси вращенія $= R$.

$$\mathfrak{C}_c = M \left(R^2 + \frac{3}{4} r^2 \right); \quad \mathfrak{A}_c = \mathfrak{B}_c = \frac{M}{4} r^2 + \frac{1}{2} \mathfrak{C}_c \dots \dots (712)$$

Главныя центральныя моменты инерціи однородныхъ площадей (поверхностная плотность κ).

Примѣръ 91-й. Площадь эллипса:

$$\frac{\xi^2}{a^2} + \frac{\eta^2}{b^2} = 1$$

$$\mathfrak{A}_c = 4\kappa \int_0^b a \eta^2 \sqrt{1 - \frac{\eta^2}{b^2}} d\eta = \pi ab \kappa \frac{b^2}{4} = M \frac{b^2}{4}$$

$$\mathfrak{B}_c = M \frac{a^2}{4}; \quad \mathfrak{C}_c = M \frac{a^2 + b^2}{4} \dots \dots \dots (713)$$

Примѣръ 92-й. Площадь прямоугольника; длины сторонъ: $2a$ и $2b$.

$$\mathfrak{A}_c = M \frac{b^2}{3}, \quad \mathfrak{B}_c = M \frac{a^2}{3}, \quad \mathfrak{C}_c = M \frac{a^2 + b^2}{3} \dots \dots (714)$$

Примѣръ 93-й. Моментъ инерціи площади треугольника $A_1A_2A_3$ вокругъ одной изъ его сторонъ: A_1A_2 .

Сначала возьмемъ треугольникъ прямоугольный и опредѣлимъ его моментъ инерціи вокругъ одного изъ катетовъ. Примемъ A_1A_2 (чертежъ 60) за ось $X^{овъ}$, а ось $Y^{овъ}$ проведемъ черезъ точку A_1 ; означимъ координаты вершины A_3 черезъ x_3 и y_3 ($A_1A_2 = x_3$, $A_2A_3 = y_3$); кромѣ того, означимъ черезъ (y) ординаты точекъ гипотенузы A_1A_3 ; очевидно:

$$\frac{(y)}{x} = \frac{y_3}{x_3}.$$

Искомый моментъ инерціи выразится такъ:

$$\kappa \int_0^{x_3} \int_0^{(y)} y^2 dx dy = \frac{\kappa}{3} \int_0^{x_3} (y)^3 dx = \frac{\kappa}{3} \frac{y_3^3}{x_3^3} \frac{x_3^4}{4} = M \frac{y_3^2}{6},$$

гдѣ $M = \kappa \frac{x_3 y_3}{2}$ есть масса треугольника.

Теперь возьмемъ треугольникъ косоугольный (черт. 61 и 62); его площадь и моментъ инерціи равняется суммѣ (черт. 61) или разности (черт. 62) площадей и моментовъ инерціи прямоугольныхъ треугольниковъ A_1DA_3 и A_2DA_3 , такъ что искомый моментъ инерціи равенъ:

$$M' \frac{y^2}{6} \pm M'' \frac{y^2}{6} = M \frac{y^2}{6}, \dots \dots (715)$$

гдѣ:

$$M' = \kappa \frac{x_3 y_3}{2}, \quad M'' = \kappa \frac{(a_3 - x_3) y_3}{2} \text{ или } \kappa \frac{(x_3 - a_3) y_3}{2},$$

$$a_3 = A_1A_2, \quad M = \kappa \frac{a_3 y_3}{2} = M' \pm M''.$$

Примѣръ 94-й. Моментъ инерціи площади однороднаго треугольника вокругъ какой-либо оси, проведенной черезъ вершину треугольника и лежащей въ его плоскости.

Примемъ вершину A_1 за начало координатъ и данную ось за ось $X^{овъ}$; продолжимъ сторону A_3A_2 (черт. 63) до пересѣченія ея K съ осью $X^{овъ}$.

Очевидно, что моментъ инерціи треугольника $A_1A_3A_2$ вокругъ оси A_1X равенъ разности моментовъ инерціи треугольниковъ A_1A_3K и

A, A, K , а выраженія этихъ моментовъ инерціи извѣстны изъ предыдущаго примѣра; такъ что:

$$I_x = \frac{x}{12} ly_3^3 - \frac{x}{12} ly_2^3 = \frac{x}{12} l(y_3 - y_2)(y_3^2 + y_3y_2 + y_2^2),$$

гдѣ l есть длина A, K ; но такъ какъ площадь даннаго треугольника выражается половиною произведенія $l(y_3 - y_2)$, то искомый моментъ инерціи выразится такъ:

$$I_x = \frac{M}{6} (y_3^2 + y_3y_2 + y_2^2) \dots \dots \dots (716)$$

Это выраженіе можетъ быть представлено еще подъ слѣдующимъ видомъ:

$$I_x = \frac{M}{3} \left[\left(\frac{y_3 + y_2}{2} \right)^2 + \left(\frac{y_2}{2} \right)^2 + \left(\frac{y_3}{2} \right)^2 \right],$$

а это выражаетъ, что моментъ инерціи даннаго треугольника равняется моменту инерціи системы, состоящей изъ трехъ матерьяльныхъ точекъ, массы которыхъ равны $\frac{M}{3}$ и которыя помѣщены въ серединахъ сторонъ треугольника.

Центръ инерціи этихъ трехъ точекъ тоже совпадаетъ съ центромъ инерціи площади однороднаго треугольника *), поэтому моментъ инерціи даннаго треугольника вокругъ какой бы то ни было оси, имѣющей какое бы то ни было направленіе и проходящей черезъ какую бы то ни было точку, равняется моменту инерціи трехъ вышеупомянутыхъ матерьяльныхъ точекъ.

Примѣръ 95-й. Квадратичный полярный моментъ площади треугольника вокругъ вершины.

Изъ формулъ (692) слѣдуетъ, что искомый квадратичный моментъ равенъ суммѣ моментовъ инерціи I_x и I_y площади треугольника вокругъ взаимно-перпендикулярныхъ осей A, X и A, Y (черт. 63); вмѣстѣ

*) Если x_1y_1, x_2y_2, x_3y_3 суть координаты вершинъ треугольника, то координаты центра инерціи его площади выражаются такъ:

$$x_c = \frac{x_1 + x_2}{2} \frac{2}{3} + x_3 \frac{1}{3} = \frac{1}{3} (x_1 + x_2 + x_3); \quad y_c = \frac{1}{3} (y_1 + y_2 + y_3);$$

такъ же выражаются и координаты центра инерціи трехъ вышесказанныхъ точекъ.

съ тѣмъ онъ равенъ моменту инерціи вокругъ оси, проходящей черезъ точку A_1 и перпендикулярной къ площади треугольника; такъ что:

$$\begin{aligned} \zeta = H &= \frac{M}{6} (x_1^2 + x_2x_3 + x_3^2 + y_1^2 + y_2y_3 + y_3^2) = \\ &= \frac{M}{6} (a_1^2 + a_2a_3 \cos \alpha_1 + a_2^2), \dots \dots \dots (717) \end{aligned}$$

гдѣ a_2 и a_3 суть длины сторонъ A_1A_2 и A_1A_3 , а α_1 величина угла при вершинѣ A_1 .

Примѣръ 96-й. Центральные моменты инерціи площадей однородныхъ правильныхъ многоугольниковъ (число сторонъ n , длина каждой стороны равна b).

Очевидно, что моменты инерціи такого многоугольника вокругъ центральныхъ осей, перпендикулярныхъ къ различнымъ сторонамъ многоугольника, равны между собою; слѣдовательно эллипсъ, образуемый пересѣченіемъ центрального эллипсоида съ плоскостью многоугольника, долженъ имѣть столько равныхъ между собою и равноотстоящихъ другъ отъ друга радіусовъ векторовъ, сколько многоугольникъ имѣетъ сторонъ, а для этого необходимо, чтобы эллипсъ былъ кругомъ. Изъ этого слѣдуетъ, что моменты инерціи правильного многоугольника вокругъ центральныхъ осей, лежащихъ въ плоскости многоугольника, равны между собою и равны по половинѣ квадратичнаго полярнаго момента вокругъ центра, или, что то же самое, половинѣ момента инерціи вокругъ центральной оси, перпендикулярной къ площади многоугольника.

Данный правильный многоугольникъ разобьемъ на треугольники, имѣющіе вершинами центръ многоугольника, а основаніями — стороны его; очевидно, что моментъ инерціи ζ_c всего многоугольника равняется n разъ взятому моменту инерціи одного изъ этихъ треугольниковъ вокругъ оси CZ_0 , восстановленной изъ центра C перпендикулярно къ плоскости многоугольника; основываясь на формулѣ (717), найдемъ:

$$\zeta_c = H_c = \frac{Mb^2}{n} \frac{\left(2 + \cos \frac{2\pi}{n}\right)}{1 - \cos \frac{2\pi}{n}}, \dots \dots \dots (718)$$

или, означая радіусъ круга, описаннаго черезъ вершины многоугольника, буквою a :

$$\zeta_c = H_c = \frac{Ma^2}{6} \left(2 + \cos \frac{2\pi}{n}\right) \dots \dots \dots (718)$$

Наконецъ, вычислимъ центральные моменты однородныхъ правильныхъ многогранниковъ.

Центральный эллипсоидъ такого многогранника есть шаръ, а потому моментъ инерціи такого тѣла вокругъ всякой центральной оси равенъ двумъ третямъ квадратичнаго полярнаго момента вокругъ центра инерціи, какъ это слѣдуетъ изъ формулы (692) при $A_c = B_c = C_c$.

Квадратичный полярный моментъ правильного многогранника, имѣющаго μ граней, въ μ разъ болѣе квадратичнаго полярнаго момента одной изъ тѣхъ правильныхъ пирамидъ, на которыя можетъ быть раздѣленъ объемъ многогранника; поэтому рѣшимъ сначала слѣдующую задачу:

Примѣръ 97-й. Вычислить квадратичный полярный моментъ данной правильной пирамиды вокругъ ея вершины; высота пирамиды $= h$, число сторонъ основанія $= n$ и радіусъ описаннаго круга $= a$.

Примемъ вершину пирамиды за начало координатъ, направленіе перпендикуляра, опущеннаго изъ вершины на основаніе, за ось X^{0yz} ; разобъемъ пирамиду на бесконечно-тонкія пластинки плоскостями, перпендикулярными къ оси X^{0yz} ; каждая такая пластинка имѣетъ толщину dx .

По формулѣ (718) мы вычислимъ квадратичный полярный моментъ каждой такой пластинки вокругъ ея центра, а по формулѣ (697)—квадратичный полярный моментъ ея вокругъ вершины; для пластинки, отстоящей на разстояніи x отъ вершины, этотъ моментъ будетъ равенъ:

$$\sigma dx \frac{na^2}{2h^2} x^2 \sin \frac{2\pi}{n} \left[x^2 + \frac{a^2}{6h^2} x^2 \left(2 + \cos \frac{2\pi}{n} \right) \right];$$

интегрируя по x въ предѣлахъ отъ нуля до h , получимъ слѣдующее выраженіе квадратичнаго полярнаго момента правильной пирамиды вокругъ ея вершины:

$$\frac{3}{5} M \left(h^2 + \frac{a^2}{6} \left(2 + \cos \frac{2\pi}{n} \right) \right) (719)$$

Примѣръ 98-й. Центральные моменты инерціи правильныхъ многогранниковъ.

Центральный моментъ инерціи правильного многогранника съ μ гранями, каждая изъ которыхъ есть правильный многоугольникъ, имѣющій n сторонъ, равенъ:

$$\frac{2}{3} H_c = \frac{2M}{5} \left(R^2 + \frac{a^2}{6} \left(2 + \cos \frac{2\pi}{n} \right) \right) , . . . (720)$$

гдѣ R есть радіусъ сферы, вписанной въ многогранникъ, а длина a выражается слѣдующимъ образомъ въ R , n и μ :

$$a = R \operatorname{tg} \varphi, \quad \cos \varphi = \cotg \frac{\pi}{n} \cotg \left(\frac{2\pi}{n\mu} - \frac{\pi}{n} + \frac{\pi}{2} \right) *).$$

По этой формулѣ получимъ слѣдующія величины центральныхъ моментовъ инерціи правильныхъ многогранниковъ:

$$\text{Правильнаго тетраэдра: } \frac{6}{5} MR^2, (n=3, \mu=4).$$

$$\text{Куба: } \frac{2}{3} MR^2, (n=4, \mu=6).$$

$$\text{Октаэдра: } \frac{3}{5} MR^2, (n=3, \mu=8).$$

$$\text{Двѣнадцатигранника: } \frac{37\sqrt{5}-59}{30} MR^2, (n=5, \mu=12).$$

$$\text{Двадцатигранника: } \frac{3}{10} (5\sqrt{5}-9) MR^2, (n=3, \mu=20).$$

§ 111. Законъ площадей для системы точекъ былъ открытъ почти одновременно Эйлеромъ *), Данииломъ Бернулли **) и д'Арси ***).

*) Euler. Opuscula varii argumenti. Томъ I-й, 1746 года, статья: Solutio problematis mechanici de motu corporum tubis mobilibus inclusorum.

**) Daniel Bernoulli. Nouveau problème de mécanique. Mémoires de l'Académie de Berlin. 1745.

***) d'Arcy. Problème de dynamique 1747. Mém. de l'Acad. des Sciences. Paris 1752.

*) a есть радіусъ круга, описаннаго черезъ всѣ вершины многоугольника, образующаго грань многогранника; φ — уголъ, подъ которымъ этотъ радіусъ виденъ изъ центра многогранника. Предоставляемъ читателю убѣдиться въ вѣрности приведеннаго выраженія для $\cos \varphi$.

ГЛАВА IX.

Законъ живой силы.

§ 112. Составленіе дифференціального уравненія.

Съ тремя дифференціальными уравненіями движенія (517) § 70 каждой изъ точекъ системы поступимъ такъ, какъ показано въ концѣ параграфа 21-го (стр. 86) относительно составленія дифференціального уравненія (111); затѣмъ, всѣ полученныя такимъ образомъ равенства сложимъ, тогда будемъ имѣть слѣдующее дифференціальное уравненіе:

$$\frac{dT}{dt} = \sum_{i=1}^{i=n} (X_i x_i' + Y_i y_i' + Z_i z_i') + \lambda(u_1) \left(\frac{du_1}{dt} - \frac{\partial u_1}{\partial t} \right) + \lambda(u_2) \left(\frac{du_2}{dt} - \frac{\partial u_2}{\partial t} \right) + \dots + \lambda(u_p) \left(\frac{du_p}{dt} - \frac{\partial u_p}{\partial t} \right), \dots \quad (721)$$

гдѣ

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{i=n} m_i v_i^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{i=n} m_i [(x_i')^2 + (y_i')^2 + (z_i')^2] \dots \quad (535)$$

есть сумма живыхъ силъ всѣхъ точекъ системы и называется *живою силою системы* (какъ уже сказано на стр. 365-й) или *кинетическою энергіею* ея.

§ 113. Силы, имѣющія потенціалъ.

Обратимъ особенное вниманіе на тѣ случаи, въ которыхъ проэкціи на оси координатъ всѣхъ задаваемыхъ силъ суть функціи только координатъ точекъ и притомъ такія, что сумма:

$$X_1 dx_1 + Y_1 dy_1 + Z_1 dz_1 + X_2 dx_2 + Y_2 dy_2 + Z_2 dz_2 + \dots + Z_n dz_n$$

или, что то же самое.

$$\sum_{i=1}^{i=n} (X_i dx_i + Y_i dy_i + Z_i dz_i)$$

есть полный дифференціалъ отъ какой либо функціи:

$$U(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \dots, x_n, y_n, z_n),$$

заключающей только координаты точекъ.

Для того, чтобы равенство:

$$\sum_{i=1}^{i=n} (X_i dx_i + Y_i dy_i + Z_i dz_i) = dU \dots \dots (722)$$

имѣло мѣсто при всякихъ значеніяхъ координатъ и дифференціаловъ координатъ, необходимо, чтобы задаваемые силы выражались слѣдующими частными производными:

$$\left. \begin{aligned} X_1 &= \frac{\partial U}{\partial x_1}, & X_2 &= \frac{\partial U}{\partial x_2}, & \dots & X_n &= \frac{\partial U}{\partial x_n}, \\ Y_1 &= \frac{\partial U}{\partial y_1}, & Y_2 &= \frac{\partial U}{\partial y_2}, & \dots & Y_n &= \frac{\partial U}{\partial y_n}, \\ Z_1 &= \frac{\partial U}{\partial z_1}, & Z_2 &= \frac{\partial U}{\partial z_2}, & \dots & Z_n &= \frac{\partial U}{\partial z_n}. \end{aligned} \right\} \dots \dots (723)$$

Примѣчаніе. Если задаваемые силы выражаются частными производными (723) отъ функціи W , заключающей не только координаты точекъ системы, но еще и время, то вышесказанная сумма не будетъ равна полному дифференціалу отъ W и вмѣсто равенства (722) будемъ имѣть слѣдующее:

$$\sum_{i=1}^{i=n} (X_i dx_i + Y_i dy_i + Z_i dz_i) = dW - \frac{\partial W}{\partial t} dt \dots \dots (724)$$

Функція U или W называется *потенціаломъ* или *силовою функціею* силъ F_1, F_2, \dots, F_n , приложенныхъ въ системѣ матерьяльныхъ точекъ m_1, m_2, \dots, m_n , а такая совокупность силъ называется *совокупностью силъ, имѣющихъ потенциалъ*.

Простѣйшимъ примѣромъ такой совокупности силъ могутъ служить силы взаимодѣйствія между двумя матерьяльными точками,

указанныя въ примѣрѣ 61-мъ (стр. 326); въ заданіи этого примѣра предполагается, что силы взаимнодѣйствія между точками m_1 и m_2 равны, прямопротивоположны и направлены по продолженіямъ кратчайшаго разстоянія между точками, такъ что сила, приложенная къ точкѣ m_1 , направлена по продолженію прямой, проведенной изъ m_2 черезъ m_1 ; величины силъ предполагаются равными $F(r_{12})$, гдѣ r_{12} есть разстояніе между точками, а F — какая нибудь функція этого разстоянія:

$$r_{12} = + \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}.$$

Косинусы угловъ, составляемыхъ съ осями координатъ направленіемъ r_{21} , проведеннымъ изъ точки m_2 черезъ точку m_1 , выражаются такъ:

$$\cos(r_{21}, X) = \frac{x_1 - x_2}{r_{12}} = \frac{\partial r_{12}}{\partial x_1}, \quad \cos(r_{21}, Y) = \frac{y_1 - y_2}{r_{12}} = \frac{\partial r_{12}}{\partial y_1},$$

$$\cos(r_{21}, Z) = \frac{z_1 - z_2}{r_{12}} = \frac{\partial r_{12}}{\partial z_1}$$

а косинусы угловъ, составляемыхъ съ осями координатъ направленіемъ r_{12} , проведеннымъ изъ точки m_1 черезъ точку m_2 , выражаются такъ:

$$\cos(r_{12}, X) = \frac{x_2 - x_1}{r_{12}} = \frac{\partial r_{12}}{\partial x_2}, \quad \cos(r_{12}, Y) = \frac{y_2 - y_1}{r_{12}} = \frac{\partial r_{12}}{\partial y_2},$$

$$\cos(r_{12}, Z) = \frac{z_2 - z_1}{r_{12}} = \frac{\partial r_{12}}{\partial z_2}.$$

Такъ какъ по направленію r_{21} дѣйствуетъ сила, приложенная къ точкѣ m_1 , а по направленію r_{12} — сила, приложенная къ точкѣ m_2 , то сумма, находящаяся въ первой части равенства (722), приметъ въ настоящемъ случаѣ слѣдующій видъ:

$$\begin{aligned} F(r_{12}) \left[\frac{\partial r_{12}}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial r_{12}}{\partial y_1} dy_1 + \frac{\partial r_{12}}{\partial z_1} dz_1 + \frac{\partial r_{12}}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial r_{12}}{\partial y_2} dy_2 + \frac{\partial r_{12}}{\partial z_2} dz_2 \right] = \\ = F(r_{12}) dr_{12}; \end{aligned}$$

слѣдовательно, эти силы имѣютъ потенциалъ:

$$U = \int F(r_{12}) dr_{12} \dots \dots \dots (725)$$

Слѣдуетъ обратить вниманіе на знакъ силы $F(r_{12})$; если точки m_1 и m_2 взаимно отталкиваются, то подъ $F(r_{12})$ подразумѣвается положительно взятая величина силы, приложенной къ каждой точкѣ, если же точки взаимно-притягиваются, такъ что сила, приложенная къ точкѣ m_1 , направлена къ точкѣ m_2 , то предыдущія выраженія примѣняются и къ этимъ случаямъ при условіи, чтобы подъ $F(r_{12})$ подразумѣвалась отрицательно-взятая величина силы. Напримѣръ, если точки взаимно притягиваются силами равными ($\epsilon m_1 m_2 : r_{12}^2$), то потенциалъ равенъ:

$$U = - \epsilon m_1 m_2 \int \frac{dr_{12}}{r_{12}^2} = \epsilon \frac{m_1 m_2}{r_{12}};$$

если точки взаимно-отталкиваются силами равными ($\epsilon \tilde{r}_{12}^n$), то потенциалъ будетъ:

$$U = \epsilon \int r_{12}^n dr_{12} = \epsilon \frac{r_{12}^{n+1}}{n+1}.$$

Положимъ, что имѣемъ систему матерьяльныхъ точекъ $m_1, m_2, \dots m_n$, къ которымъ приложены слѣдующія силы:

а) Силы взаимодѣйствія между точками системы, подобныя вышеупомянутымъ; то есть, на каждую точку m_i со стороны всякой другой точки m_j системы дѣйствуетъ сила $F_{ij}(r_{ij})$, направленная по продолженію линіи, проведенной изъ точки m_j черезъ m_i , а вмѣстѣ съ тѣмъ равная и прямопротивоположная сила приложена къ точкѣ m_j .

б) Силы притяженія или отталкиванія, дѣйствующія на точки системы со стороны какихъ либо *неподвижныхъ* центровъ $O_1, O_2, \dots O_n$; пусть x_k, y_k, z_k суть координаты одного изъ этихъ центровъ, r_{ik} —разстояніе точки m_i отъ этого центра O_k ; величина силы, дѣйствующей изъ каждаго центра на каждую изъ матерьяльныхъ

точекъ, предполагается функциею разстоянія между ними; пусть $\varphi_{ik}(r_{ik})$ есть функція, выражающая положительно вѣтую величину отталкивающей силы, дѣйствующей изъ центра O_k на точку m_i .

И такъ, къ каждой точкѣ системы приложены: силы, дѣйствующія со стороны прочихъ точекъ и силы, дѣйствующія со стороны неподвижныхъ точекъ; зная всѣ функціи $F_{12}, F_{13}, \dots, F_{1n}, \dots, \varphi_{12}, \varphi_{13}, \dots$ можемъ составить выраженія для $X_i, Y_i, Z_i, X_i, \dots$; напримѣръ, X_i выразится слѣдующею суммою:

$$X_i = F_{1i} \frac{\partial r_{1i}}{\partial x_i} + F_{2i} \frac{\partial r_{2i}}{\partial x_i} + \dots + F_{ni} \frac{\partial r_{ni}}{\partial x_i} + \\ + \varphi_{1i} \frac{\partial r_{1i}}{\partial x_i} + \dots + \varphi_{pi} \frac{\partial r_{pi}}{\partial x_i};$$

поэтому сумма, заключающаяся въ первой части равенства (722), выразится такъ:

$$\sum_j F_{ij}(r_{ij}) dr_{ij} + \sum_k \sum_{i=1}^{k-p} \sum_{i=1}^n \varphi_{ik}(r_{ik}) dr_{ik};$$

первая изъ этихъ суммъ заключаетъ $\frac{n(n-1)}{1.2}$ членовъ, соотвѣственно числу сочетаній, которые можно сдѣлать изъ n точекъ по двѣ; i есть каждое изъ чиселъ: $1, 2, \dots, n$; j — тоже одно изъ этихъ чиселъ, но не равное i .

Потенціалъ всей совокупности силъ выразится слѣдующею суммою интеграловъ:

$$U = \sum_{i,j} \int F_{ij}(r_{ij}) dr_{ij} + \sum_k \sum_{i=1}^{k-p} \sum_{i=1}^n \int \varphi_{ik}(r_{ik}) dr_{ik} \dots \quad (726)$$

Если центры O_1, O_2, \dots, O_p суть движущіяся точки, совершающія данныя движенія, то координаты ихъ $x_1, y_1, z_1, x_2, \dots, z_p$ будутъ данными функциями времени; въ этомъ случаѣ потенціалъ силъ также выразится формулою (726), но это уже будетъ функція не только отъ координатъ матерьяльныхъ точекъ, но и еще отъ времени, которое заключается въ выраженіяхъ координатъ $x_1, y_1, z_1, x_2, \dots, z_p$; сумма, заключающаяся въ первой части

равенства (722), выразится, не полнымъ дифференціаломъ потенціала, но разностью того же самаго вида, какой имѣетъ вторая часть равенства (724).

Силы взаимодѣйствія между двумя матерьяльными точками m_1 и m_2 , указанныя въ заданіи примѣра 63-го (стр. 327), имѣютъ слѣдующій потенциалъ:

$$U = \pm \mu m_1 m_2 \arctg \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}.$$

Вообще, если силы взаимодѣйствія между двумя матерьяльными точками имѣютъ потенциаломъ какую-либо функцію отъ разностей координатъ этихъ точекъ (т.-е., отъ $(x_1 - x_2)$, $(y_1 - y_2)$, $(z_1 - z_2)$), то эти взаимодѣйствія равны и противоположны.

Если силы взаимодѣйствія между каждыми двумя точками m_i и m_j системы m_1, m_2, \dots, m_n имѣютъ потенциалъ U_{ij} и если сила, дѣйствующая изъ каждаго неподвижнаго центра O_k на каждую точку m_i системы тоже имѣетъ потенциалъ V_{ik} , то потенциалъ всей совокупности силъ выразится суммою всѣхъ частныхъ потенциаловъ, т.-е.:

$$U = \sum_{i,j} U_{ij} + \sum_{k=1}^{k=p} \sum_{i=1}^{i=n} V_{ik} (727)$$

§ 114. Законъ живой силы.

Заключающіеся въ дифференціальномъ уравненіи (721) члены:

$$\lambda(s_1) \frac{ds_1}{dt} + \lambda(s_2) \frac{ds_2}{dt} + \dots + \lambda(s_p) \frac{ds_p}{dt}$$

равны нулю; въ самомъ дѣлѣ, если связь s_k — удерживающая, то при всякихъ положеніяхъ системы точекъ скорости точекъ должны обращать полную производную $\frac{ds_k}{dt}$ въ нуль; если же эта связь не удерживающая, то при тѣхъ скоростяхъ, которыя дѣлаютъ полную производную $\frac{ds_k}{dt}$ большею нуля, множитель $\lambda(s_k)$ долженъ быть равенъ нулю, потому что при этихъ условіяхъ связь не оказываетъ реакціи (см. стр. 341); слѣдовательно, либо-тотъ, либо-другой изъ множителей произведенія $\lambda(s_k) \frac{ds_k}{dt}$ равенъ нулю; то же самое слѣдуетъ ска-

затѣ относительно подобныхъ произведеній, соотвѣтствующихъ всѣмъ прочимъ связямъ.

Поэтому дифференціальное уравненіе (721) имѣетъ слѣдующій видъ:

$$\frac{dT}{dt} = \sum_{i=1}^{i=n} (X_i x_i' + Y_i y_i' + Z_i z_i') - \lambda(v_1) \frac{\partial v_1}{\partial t} - \dots - \lambda(v_p) \frac{\partial v_p}{\partial t}. (721, A)$$

Если задаваемые силы имѣютъ потенциалъ, а выраженія связей не заключаютъ явнымъ образомъ времени, то это дифференціальное уравненіе будетъ имѣть слѣдующій видъ: {

$$\frac{d(T-U)}{dt} = 0,$$

а потому дифференціальныя уравненія движенія будутъ имѣть слѣдующій интегралъ:

$$T - U = h, \dots \dots \dots (728)$$

гдѣ h есть постоянная произвольная.

И такъ, если задаваемые силы, приложенныя къ точкамъ системы, имѣютъ потенциалъ, а связи независятъ отъ времени, то движеніе системы подчиняется слѣдующему закону: разность между живою силою и потенциаломъ сохраняетъ постоянную величину.

Этотъ законъ движенія извѣстенъ подъ именемъ закона живой силы для движенія системы точекъ.

§ 115. Работа задаваемыхъ силъ. Потенціальная энергія.

Дифференціальное уравненіе (721) можетъ быть представлено еще подъ слѣдующимъ видомъ:

$$\frac{dT}{dt} = \sum_{i=1}^{i=n} F_i v_i \cos(F_i, v_i) + \sum_{i=1}^{i=n} R_i v_i \cos(R_i, v_i), \dots \dots (721, B)$$

гдѣ R_i означаетъ величину и направленіе равнодѣйствующей всѣхъ реакцій, приложенныхъ къ точкѣ m_i .

Помноживъ это уравненіе на dt и принявъ во вниманіе, что $v_1 dt = ds_1$, $v_2 dt = ds_2$, $v_n dt = ds_n$, гдѣ ds_1 , ds_2 , ds_n суть безконечно-малые элементы путей, пробѣгаемые матерьяльными точками m_1 , m_2 , m_n въ теченіи безконечно-малаго промежутка времени dt , получимъ:

$$dT = \sum_{i=1}^{i=n} (F_i \cos (F_i, v_i) + R_i \cos (R_i, v_i)) ds_i, \dots (721, C)$$

т.-е. безконечно-малое приращеніе живой силы, получаемое системою въ теченіи безконечно-малаго промежутка времени dt , равняется суммѣ элементарныхъ работъ, совершаемыхъ всѣми задаваемыми силами и реакціями связей въ теченіи этого промежутка времени.

Обратимъ вниманіе на какія-либо два положенія, занимаемыя системою во время движенія; вычислимъ работу всѣхъ силъ и реакцій на протяженіи путей, проходимыхъ точками системы при переходѣ ея изъ перваго положенія во второе и означимъ черезъ T_1 живую силу системы въ первомъ, а черезъ T_2 — во второмъ положеніи; изъ равенства (721, C) получимъ:

$$T_2 - T_1 = \sum_{i=1}^{i=n} \int_1^2 (F_i \cos (F_i, v_i) + R_i \cos (R_i, v_i)) ds_i, \dots (729)$$

т.-е., приращеніе, получаемое живою силою при переходѣ системы изъ одного положенія въ другое, равняется суммѣ работъ, совершаемыхъ всѣми задаваемыми силами и реакціями связей на протяженіи путей, пробѣгаемыхъ точками системы при этомъ переходѣ; такое равенство имѣетъ мѣсто при всякихъ силахъ и связяхъ.

Если связи независятъ отъ времени, то сумма работъ реакцій свя-

зей будетъ нуль; дѣйствительно, сумма элементарныхъ работъ реакцій какой-либо связи v_k выразится такъ:

$$\lambda(v_k) \sum_{i=1}^{i=n} (P_{iv_k}) \cos(P_{iv_k}, ds_i) ds_i;$$

но намъ извѣстно, что если связь есть удерживающая и независитъ отъ времени, то сумма, помноженная на $\lambda(v_k)$, равна нулю (стр. 402, формула (588, k)), если же связь не удерживающая, то либо эта сумма равна нулю, либо $\lambda(v_k)$ равно нулю.

Если задаваемые силы имѣютъ потенціалъ, то сумма элементарныхъ работъ всѣхъ этихъ силъ равна дифференціалу потенціала, слѣдовательно, тогда:

$$\sum_{i=1}^{i=n} \int_1^2 F_i \cos(F_i, v_i) ds_i = U_2 - U_1, \dots (730)$$

гдѣ U_1 и U_2 суть значенія потенціала въ первомъ и во второмъ положеніяхъ системы.

Отсюда слѣдуетъ, что если U есть однократная функція отъ координатъ точекъ системы (т.-е. такая, которая имѣетъ по одному, а не по нѣскольку значеній для каждаго положенія системы), то, при переходѣ системы изъ одного опредѣленнаго положенія въ другое, величина работы, совершаемой задаваемыми силами, независитъ отъ того, по какимъ путямъ движутся точки при этомъ переходѣ.

Если система, выйдя изъ какого либо положенія и совершивъ какое-либо движеніе, возвратится въ это же самое положеніе, то работа задаваемыхъ силъ на всемъ протяженіи этого перехода будетъ равна нулю, если эти силы имѣютъ потенціаломъ однократную функцію координатъ точекъ системы.

Если же U есть многократная функція, такъ что для каждаго положенія системы U имѣетъ нѣсколько значеній, то при переходѣ системы изъ перваго положенія во второе по различнымъ путямъ, функція U , исходя изъ одного и того же значенія U_1 , можетъ достигнуть до раз-

личныхъ значений, свойственныхъ ей во второмъ положеніи системы, смотря по тому, по какому пути совершается переходъ системы.

Напримѣръ, потенциальная функція задаваемыхъ силъ въ примѣрѣ 63 есть функція многократная; во всякомъ положеніи системы она имѣетъ безчисленное множество значений, разнящихся на $\mu m_1 m_2 \pi$, взятое цѣлое число разъ, т.-е.:

$$U = \mu m_1 m_2 \left(\operatorname{arctg} \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} \pm n\pi \right).$$

Положимъ, что координаты перваго положенія системы суть $x_1 = a$, $y_1 = 0$, $x_2 = 0$, $y_2 = 0$ и координаты втораго положенія: $x_1 = 0$, $y_1 = a$, $x_2 = 0$, $y_2 = 0$; пусть $U_1 = 0$.

Если система переходитъ изъ перваго во второе положеніе, такимъ движеніемъ, при которомъ уголъ, составляемый линіею $M_2 M_1$ (черт. 40), возрастетъ непрерывно отъ нуля до $\frac{\pi}{2}$, то U достигнетъ величины $\mu m_1 m_2 \frac{\pi}{2}$; если же переходъ совершается такимъ движеніемъ, при которомъ линія $M_2 M_1$ повернется на уголъ $\frac{5\pi}{2}$, то U достигнетъ величины $5\mu m_1 m_2 \frac{\pi}{2}$. При второмъ переходѣ задаваемые силы совершаютъ работу въ пять разъ большую, чѣмъ въ первомъ.

Къ неопредѣленному интегралу, выражающему потенциалъ задаваемыхъ силъ, можно присоединить произвольную постоянную и положить, что:

$$U = C + \int dU.$$

Постоянною C мы распорядимся такъ, чтобы U обращалось въ нуль, при нѣкоторомъ произвольно избранномъ положеніи системы; это положеніе будемъ называть нулевымъ.

Положимъ, что U есть функція однократная.

Въ большей части случаевъ нулевое положеніе избираютъ такимъ образомъ, чтобы въ немъ $(-U)$ имѣла наименьшее значеніе, а такъ какъ это значеніе полагается равнымъ нулю, то тогда во всѣхъ возможныхъ положеніяхъ системы величина $(-U)$ будетъ имѣть знакъ положительный; означимъ $(-U)$ черезъ \mathcal{E} .

Каждому положенію системы свойственно нѣкоторое положительное значеніе, выражающее величину работы, которую совершатъ

задаваемые силы при всякомъ переходѣ системы изъ разсматриваемаго положенія въ нулевое; эта величина \mathcal{E} называется *потенціальной энергіею системы въ разсматриваемомъ положеніи*; въ нулевомъ положеніи потенциальная энергія системы равна нулю.

Сумма $(T + \mathcal{E})$ кинетической энергіи и потенциальной энергіи системы называется *полною энергіею системы*.

Если задаваемые силы, приложенныя къ системѣ точекъ, имѣютъ потенциаломъ функцію однократную, независимую отъ времени и если связи между точками системы тоже независимы явно отъ времени, то система точекъ называется *консервативною системою*.

Полная энергія движущейся консервативной системы сохраняетъ постоянную величину:

$$T + \mathcal{E} = h \dots \dots \dots (728, \text{bis})$$

Пусть $T_1, T_2, \mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2$ суть величины кинетической и потенциальной энергіи въ двухъ положеніяхъ системы; изъ предыдущаго равенства слѣдуетъ:

$$T_2 - T_1 = \mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2 \dots \dots \dots (731)$$

т.-е. при переходѣ системы изъ одного положенія въ другое, она приобретаетъ столько же кинетической энергіи, сколько теряетъ потенциальной энергіи и обратно.

§ 116. Живая сила системы равна живой силѣ движенія центра инерціи, сложенной съ суммою живыхъ силъ относительныхъ движеній точекъ системы по отношенію къ воображаемой неизмѣняемой средѣ, совершающей поступательное движеніе вмѣстѣ съ центромъ инерціи.

Пользуясь обозначеніями, принятыми въ § 99-ю предыдущей главы, можемъ преобразовать выраженіе T слѣдующимъ образомъ:

$$\begin{aligned} T = & \frac{1}{2} \sum_1^n m_i [(x'_i)^2 + (y'_i)^2 + (z'_i)^2] = \frac{1}{2} M [(x'_c)^2 + (y'_c)^2 + (z'_c)^2] + \\ & + x'_c \sum_1^n m_i \xi'_i + y'_c \sum_1^n m_i \eta'_i + z'_c \sum_1^n m_i \zeta'_i + \\ & + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i [(\xi'_i)^2 + (\eta'_i)^2 + (\zeta'_i)^2]; \end{aligned}$$

[X - 116.117]

такъ какъ начало относительныхъ координатъ есть центръ инерціи системы, то суммы, помноженныя на x_c' , y_c' , z_c' , равны нулю; въ самомъ дѣлѣ, взявъ производныя по времени отъ равенствъ (647) стр. 462, получимъ:

$$\sum_{i=1}^{i=n} m_i \xi_i' = 0, \quad \sum_{i=1}^{i=n} m_i \eta_i' = 0, \quad \sum_{i=1}^{i=n} m_i \zeta_i' = 0;$$

поэтому:

Теорема Кенига.

$$T = \frac{1}{2} M v_c^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{i=n} m_i u_i^2, \quad (732)$$

здѣсь u_i означаетъ скорость относительнаго движенія точки m_i по отношенію къ воображаемой неизмѣняемой средѣ, совершающей поступательное движеніе вмѣстѣ съ центромъ инерціи системы.

§ 117. Живая сила движенія твердаго тѣла.

Если система точекъ неизмѣняемая и мы выразимъ скорости точекъ ея по формуламъ (143) ^{kin.} кинематической части (стр. 125), то получимъ слѣдующее выраженіе живой силы движенія ея:

$$\begin{aligned} T = & \frac{1}{2} M w_{ю}^2 + w_{ю} \left(r \cos(w_{ю}, \Upsilon) - q \cos(w_{ю}, \mathbf{Z}) \right) \sum_{i=1}^{i=n} m_i \xi_i + \\ & + w_{ю} \left(p \cos(w_{ю}, \mathbf{Z}) - r \cos(w_{ю}, \Xi) \right) \sum_{i=1}^{i=n} m_i \eta_i + \\ & + w_{ю} \left(q \cos(w_{ю}, \Xi) - p \cos(w_{ю}, \Upsilon) \right) \sum_{i=1}^{i=n} m_i \zeta_i + \\ & + \frac{1}{2} (A_{ю} p^2 + B_{ю} q^2 + C_{ю} r^2 - 2D_{ю} q r - 2E_{ю} r p - 2F_{ю} p q). \quad . \quad (733) \end{aligned}$$

Здѣсь ξ_i , η_i , ζ_i суть координаты точки m_i относительно осей $Ю\Xi$, $Ю\Upsilon$, $Ю\mathbf{Z}$, неизмѣнно связанныхъ съ системою; величины $A_{ю}$, $B_{ю}$, $C_{ю}$, $D_{ю}$, $E_{ю}$, $F_{ю}$ выражаются формулами (662) § 103 стр. 474.

$\xi, \eta, \zeta, \mathbf{Z};$

Сущна членовъ, заключающихъ вторыя степени провѣдѣй угловой скорости, есть ни что иное, какъ:

$$\frac{1}{2} \Omega^2 (I_Q)_0, \dots \dots \dots (734)$$

т.-е., половина квадрата угловой скорости, помноженнаго на моментъ инерціи неизмѣняемой системы вокругъ мгновенной оси, проходящей черезъ точку Ю.

Если точка Ю неподвижна, то живая сила (вращательнаго движенія твердаго тѣла вокругъ этой неподвижной точки) выразится произведеніемъ (734).

Если за точку Ю взять центръ инерціи твердаго тѣла, то живая сила выразится такъ:

$$T = \frac{1}{2} M v_c^2 + \frac{1}{2} \Omega^2 (I_Q)_c \dots \dots \dots (735)$$

Слѣдовательно, если твердое тѣло движется поступательно, то живая сила его движенія измѣряется половиною произведенія массы тѣла на квадратъ скорости которой-либо точки его. Если тѣло вращается вокругъ неподвижной точки, то живая сила измѣряется половиною произведенія момента инерціи тѣла вокругъ мгновенной оси на квадратъ угловой скорости. Если твердое тѣло совершаетъ какое бы то ни было сложное движеніе, то живую силу можно разсматривать какъ сумму живой силы поступательнаго движенія, общаго съ движеніемъ центра инерціи, съ живою силою вращательнаго движенія вокругъ этого центра; послѣдняя выражается половиною произведенія момента инерціи тѣла вокругъ мгновенной оси, проходящей черезъ центръ инерціи, на квадратъ угловой скорости.

§ 118. Поводомъ къ открытію закона живой силы послужилъ вопросъ о качаніи физическаго маятника и объ опредѣленіи такъ-называемаго центра качанія. Занимаясь послѣдованіемъ этого вопроса, Гюйгенсъ (1629—1695) *) нашелъ его рѣшеніе, основывался на особомъ принципѣ,

*) Въ сочиненіи: Horologium oscillatorium 1673.

который есть ни что иное, какъ законъ живой силы въ примѣненіи къ неизмѣняемой системѣ точекъ, имѣющей неподвижную ось и подверженной силѣ тяжести. Доказательство этого принципа и его обобщеніе принадлежатъ Ивану Бернулли (1667—1748) *) и Даниилу Бернулли (1700—1782), которые примѣнили законъ живой силы къ рѣшенію многихъ вопросовъ механики твердаго тѣла и гидромеханики.

Терминъ „живая сила“ былъ введенъ Лейбницемъ (1646—1716), который называлъ этимъ именемъ *произведение изъ массы на квадратъ скорости*; онъ доказывалъ, что существующее со временъ Галилея и принятое Декартомъ (1596—1650) измѣреніе величины силы произведеніемъ изъ массы на ускореніе неправильно, когда оно примѣняется къ силамъ, приложеннымъ къ движущимся тѣламъ, и что истинною мѣрою такихъ силъ должно служить вышесказанное произведеніе **). Мнѣніе Лейбница приобрѣло многихъ сторонниковъ; между ними и приверженцами прежняго воззрѣнія завязался споръ замѣчательный согласіемъ результатовъ, получаемыхъ геометрами противоположныхъ воззрѣній при рѣшеніи одинаковыхъ вопросовъ. Этотъ споръ былъ поконченъ д'Аламберомъ, который доказалъ спорящимъ, что они спорятъ только изъ за терминовъ, а что существеннаго различія между ихъ воззрѣніями нѣтъ.

Въ сочиненіяхъ Лагранжа, Пуассона, Якоби и у многихъ современныхъ авторовъ живою силою называются произведеніе изъ массы на квадратъ скорости, между тѣмъ какъ Коріолисъ, Гельмгольцъ ***), Кирхгофъ и большая часть физико-математиковъ называютъ живою силою *половину* произведенія изъ массы на квадратъ скорости; въ этой книгѣ мы поступили по примѣру послѣднихъ.

*) Mém. de l'Académie de Paris 1703 et 1704. Démonstration de principe de M. Hugen, touchant le centre de balancement et de l'indentité de ce centre avec celui de percussion.

**) Demonstratio erroris memorabilis cartesii et aliorum in aestimandis viribus motricibus corporum. Acta erudit. 1686. Mathematische Werke v. Leibniz, Ausgabe von Pertz und Gerhardt, Bd. VI, Halle, 1860.

***) Helmholtz. Ueber die Erhaltung der Kraft. Abhandlungen. Bd. I, s. 18.

ГЛАВА X.

Примѣры и задачи.

При помощи указанныхъ примѣровъ можно рѣшить многія задачи и вопросы о движеніи системъ матеріальныхъ точекъ и тѣлъ. Прежде всего обратимся къ тѣмъ примѣрамъ, которые были приведены въ главѣ V-й и для которыхъ тамъ были составлены дифференціальныя уравненія движенія; нѣкоторые изъ этихъ примѣровъ могутъ быть рѣшены вполне, въ другихъ же могутъ быть найдены только нѣкоторые интегралы, выражающіе законы сохранения движенія центра инерціи, площадей и живой силы.

Примѣръ 61-й (стр. 326) въ которомъ положимъ:

$$F(r_{12}) = -\varepsilon \frac{m_1 m_2}{r_{12}^3}.$$

Эта задача можетъ быть рѣшена вполне. Обѣ точки свободны, а потому полное рѣшеніе ея требуетъ опредѣленія двѣнадцати интеграловъ, съ такимъ же числомъ постоянныхъ произвольныхъ.

Десять интеграловъ суть:

Шесть интеграловъ, выражающихъ, что центръ инерціи системы движется прямолинейно и равномерно (см. стр. 429):

$$\left. \begin{aligned} x_c' &= C_1, & y_c' &= C_2, & z_c' &= C_3, \\ x_c &= C_1 t + \Gamma_1, & y_c &= C_2 t + \Gamma_2, & z_c &= C_3 t + \Gamma_3, \end{aligned} \right\} \dots (736)$$

$$x_c = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}, \quad y_c = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2}{m_1 + m_2}, \quad z_c = \frac{m_1 z_1 + m_2 z_2}{m_1 + m_2}.$$

Три интеграла, выражающіе законъ площадей въ относителъномъ движеніи системы по отношенію къ воображаемой неизмѣняемой средѣ, движущейся поступательно вмѣстѣ съ центромъ инерціи; на стр. 467 въ § 100 было уже показано, что этимъ интеграламъ можно дать слѣдующій видъ:

$$\left. \begin{aligned} m_1(m_1 + m_2)(\mu_1 \zeta' - \zeta_1 \eta'_1) &= m_2 C_4 \\ m_1(m_1 - m_2)(\zeta_1 \xi' - \xi_1 \zeta'_1) &= m_2 C_5 \\ m_1(m_1 + m_2)(\xi_1 \eta' - \eta_1 \xi'_1) &= m_2 C_6 \end{aligned} \right\} \dots (737)$$

Интегралъ, выражающій законъ живой силы

$$\frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 - \varepsilon \frac{m_1 m_2}{r_{12}} = h.$$

На основаніи формулы (732) параграфа 116-го, равенствъ (654) и (655) параграфа 100-го и равенствъ:

$$\frac{r_{12}}{(m_1 + m_2)} = \frac{\rho_1}{m_2} = \frac{\rho_2}{m_1}, \dots \dots (654 \text{ bis})$$

получаемыхъ изъ равенствъ (654), можно послѣдній интегралъ представить такъ:

$$\frac{u_1^2}{2} - \frac{\varepsilon m_2^3}{(m_1 + m_2)^2} \frac{1}{\rho_1} = \left(\frac{h}{m_1 + m_2} - \frac{v_c^2}{2} \right) \frac{m_2}{m_1} \dots \dots (738)$$

Изъ интеграловъ (737) слѣдуетъ, что относительное движеніе точки m_1 совершается въ плоскости:

$$C_4 \xi_1 + C_5 \eta_1 + C_6 \zeta_1 = 0 \dots \dots (656)$$

и что секторьяльная скорость радіуса вектора ρ_1 равна:

$$\sigma = \frac{m_2}{2m_1(m_1 + m_2)} \sqrt{C_4^2 + C_5^2 + C_6^2}.$$

Послѣднія два интегрированія должно произвести надъ дифференціальными уравненіями (738) и

$$\rho_1^2 \frac{d\theta_1}{dt} = 2\sigma, \dots \dots (739)$$

гдѣ θ_1 есть уголъ, составляемый радіусомъ векторомъ ρ_1 съ нѣкоторымъ постояннымъ направленіемъ, заключающимся въ плоскости относительной траекторіи; интегрированія должно произвести такъ, какъ указано въ § 27-мъ стр. 119—125.

Если относительное движеніе точки m_1 будетъ найдено, то относительное движеніе другой точки (m_2) опредѣлится при помощи равенствъ (654) стр. 466. Обѣ точки будутъ описывать въ движущейся неизмѣняемой плоскости коническія сѣченія, подобныя и подобно расположенныя относительно центра инерціи, который будетъ вмѣстѣ съ тѣмъ и общимъ фокусомъ обѣихъ кривыхъ; радіусы векторы обѣихъ точекъ будутъ всегда противоположны (черт. 64) и отношеніе между величинами радіусовъ векторовъ будетъ постоянное (654 bis).

Примѣръ 62-й (стр. 326—327). Полное рѣшеніе требуетъ опредѣленія $6n$ интеграловъ съ такимъ же числомъ постоянныхъ произвольныхъ. Такъ какъ центръ инерціи системы движется прямолинейно и равномерно и дифференціальныя уравненія относительнаго движенія каждой точки имѣютъ видъ (648) стр. 463, то всѣ $6n$ интеграловъ могутъ быть найдены, и слѣдовательно, рѣшеніе задачи можетъ быть доведено до конца. Составивъ 6 интеграловъ движенія центра инерціи, надо будетъ получить еще $(6n-6)$ интеграловъ, интегрируя дифференціальныя уравненія относительнаго движенія $(n-1)$ точекъ. Объ томъ, что каждая точка въ относительномъ движеніи описываетъ эллипсъ, было уже упомянуто на стр. 463 и 467.

Въ этомъ примѣрѣ силы имѣютъ слѣдующій потенціалъ:

$$U = C - \frac{\mu}{2} \sum_{i,j} m_i m_j r_{ij}^2,$$

а потому законъ живой силы выразится здѣсь такъ:

$$\frac{1}{2} M v_c^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{i=n} m_i u_i^2 + \frac{\mu}{2} \sum_{i,j} m_i m_j r_{ij}^2 = h.$$

Примѣръ 63-й, стр. 327. Система состоитъ изъ двухъ свободныхъ точекъ, движущихся въ плоскости XU , поэтому число независимыхъ координатъ равно четыремъ, а число искомымъ интеграловъ—восемью. Четыре интеграла выражаютъ прямолинейное и равномерное движеніе центра инерціи; пятый интегралъ выражаетъ законъ живой силы:

$$\frac{1}{2} (m_1 + m_2) v_c^2 + \frac{m_1}{2} u_1^2 + \frac{m_2}{2} u_2^2 - \mu m_1 m_2 \operatorname{arctg} \frac{\eta_1 - \eta_2}{\xi_1 - \xi_2} = h.$$

стр. 327,
506, 516
117,

(Предполагается, что силы направлены такъ, какъ изображено на чертежѣ 40-мъ).

Этотъ интегралъ можно представить еще такъ:

$$\frac{u_1^2}{2} - \mu \frac{m_2^2}{m_1 + m_2} \operatorname{arctg} \frac{\eta_1}{\xi_1} = \left(\frac{h}{m_1 + m_2} - \frac{v_c^2}{2} \right) \frac{m_2}{m_1}.$$

Вмѣсто интеграла, выражающаго законъ площадей въ относительномъ движеніи точки m_1 , получимъ слѣдующій интегралъ:

$$\xi_1 \eta_1' - \eta_1 \xi_1' = \mu \frac{m_2^2}{m_1 + m_2} t + C_3.$$

Примѣръ 64-й (стр. 369—370). Здѣсь $n=2$, а, слѣдовательно, для получения полнаго рѣшенія надо найти четыре интеграла; одинъ изъ интеграловъ, выражающій законъ площадей для точки m_1 , будетъ: $\rho_1^2 \theta_1' = C_1$; другой интегралъ выражаетъ законъ живой силы:

$$\frac{1}{2} (m_1 + m_2) (\rho_1')^2 + \frac{1}{2} m_1 \rho_1^2 (\theta_1')^2 - m_2 g (l - \rho_1) = h.$$

Можно произвести и слѣдующія два интегрированія.

Примѣръ 66-й (стр. 371). Здѣсь $n=4$, слѣдовательно, для полнаго рѣшенія задачи надо произвести восемь интегрированій.

Первыя два изъ четырехъ дифференціальныхъ уравненій втораго порядка суть дифференціальныя уравненія движенія центра инерціи системы, который движется какъ свободная матерьяльная точка, притягиваемая къ началу координатъ силою, пропорціональною разстоянію; четыре интеграла этихъ уравненій суть:

$$\rho_c^2 \theta_c' = C_1, \quad \frac{1}{2} [(\rho_c')^2 + \rho_c^2 (\theta_c')^2] + \frac{\mu}{2} \rho_c^2 = h_1. \quad (740)$$

$$\frac{1}{\rho_c^2} = \frac{\cos^2(\theta_c + \Gamma_1)}{b^2} + \frac{\sin^2(\theta_c + \Gamma_1)}{a^2}; \quad \operatorname{tg}(\theta_c + \Gamma_1) = \frac{a}{b} \operatorname{tg}(t\sqrt{\mu} + \Gamma_2)$$

$$a^2 = \frac{C_1^2}{h_1 - \sqrt{h_1^2 - \mu C_1^2}}, \quad b^2 = \frac{C_1^2}{h_1 + \sqrt{h_1^2 - \mu C_1^2}}.$$

Изъ остальныхъ интеграловъ, одинъ есть:

$$(m_2 l^2 + (m_1 - m_2) \xi^2) \vartheta' = C_2, \quad \dots \dots \dots (741)$$

другой выражаетъ законъ живой силы въ движеніи всей системы; вычтя изъ него равенство (740), помноженное на $2(m_1 + m_2)$, получимъ:

$$\begin{aligned} & (m_2 l^2 + (m_1 - m_2) \xi^2) (\vartheta')^2 + \frac{m_1 l^2 - (m_1 - m_2) \xi^2}{l^2 - \xi^2} (\xi')^2 = \\ & = h_2 - 2h_1 (m_1 + m_2) - \mu (m_2 l^2 + (m_1 - m_2) \xi^2). \quad (742) \end{aligned}$$

Если $m_2 = m_1$, то четыре интеграла относительнаго движенія будутъ:

$$m_1 l^2 \vartheta' = C_2; \quad \vartheta = \frac{C_2}{m_1 l^2} t + \Gamma_2$$

$$m_1 l^2 (\vartheta')^2 + m_1 l^2 \frac{(\xi')^2}{l^2 - \xi^2} = B m_1 l^2;$$

$$\xi = l \sin(pt + \Gamma_3); \quad p^2 = B - \frac{C_2^2}{m_1^2 l^4}; \quad B = \frac{h_2 - 4h_1 m_1}{m_1 l^2} - \mu.$$

Слѣдовательно, если массы всѣхъ четырехъ точекъ равны между собою, то движеніе будетъ совершаться слѣдующимъ образомъ: центръ инерціи системы (центръ ромба) будетъ описывать эллипсъ, центръ котораго совпадаетъ съ началомъ координатъ, вмѣстѣ съ тѣмъ взаимно-перпендикулярныя діагонали ромба будутъ равномерно вращаться вокругъ центра инерціи и въ то же время длины діагоналей будутъ измѣняться періодически, такъ какъ каждая точка будетъ совершать гармоническое колебаніе вдоль по своей діагонали, отклоняясь на длину l по обѣ стороны центра инерціи.

Кромѣ этихъ примѣровъ, приводимъ рядъ задачъ; въ числѣ ихъ нѣкоторыя хотя и относятся къ движенію твердаго тѣла, но могутъ быть рѣшены съ помощію средствъ, данныхъ въ предыдущихъ главахъ.

19. По наклонной плоскости, составляющей съ горизонтомъ уголъ J катится тяжелый однородный полый шаръ радіуса R ; сферическая полость его (радіуса R_1) заполнена тяжелою жидкостью той же самой плотности, какъ и вещество шара; эта жидкость не участвуетъ во вращеніи шара, но движется поступательно; предполагается, что шаръ катится не скользя по плоскости и что въ начальный моментъ онъ былъ въ покоѣ.

Опредѣлить движеніе шара и сравнить съ этимъ движеніе сплошнаго шара того же радіуса R и той же плотности.

Этотъ вопросъ можетъ быть рѣшенъ слѣдующимъ образомъ.

Составимъ интегралъ, выражающій законъ живой силы. Означимъ черезъ x длину пути, пройденнаго центромъ шара въ теченіи времени t отъ начала движенія и черезъ θ уголъ, на который повернулся шаръ (вокругъ горизонтальной, перпендикулярной къ плоскости паденія, оси) въ теченіи того же времени; такъ какъ шаръ катится по плоскости не скользя, то $\theta R = x$. Потенціалъ силы тяжести, приложенной къ шару и къ жидкости, есть $Mgx \sin J$; моментъ инерціи шара вокругъ оси вращенія равенъ:

$$I = \frac{2}{5} \frac{4}{3} \pi \rho (R^5 - R_1^5).$$

Уравненіе живой силы будетъ:

$$\frac{1}{2} M(x')^2 + \frac{1}{2} I(\theta')^2 - Mgx \sin J = 0; \quad M = \frac{4}{3} \pi \rho R^3.$$

Замѣнивъ $\theta'R$ черезъ x' , отдѣливъ переменныя, проинтегрировавъ и возвысивъ обѣ части полученнаго равенства въ квадратъ, получимъ:

$$x = \frac{5}{2} \frac{g \sin J}{7-2n^2} t^2; \quad n = \frac{R_1}{R}.$$

Точно также найдемъ, что длина пути, проходимого въ теченіи времени t сплошнымъ шаромъ выразится такъ:

$$x_1 = \frac{5}{2} \frac{g \sin J}{7} t^2,$$

слѣдовательно:

$$\frac{x}{x_1} = \frac{7}{7-2n^2}.$$

20. Двѣ тяжелыя матерьяльныя точки m_1 и m_2 прикрѣплены къ концамъ гибкой нерастяжимой нити, перекинутой черезъ блокъ A (чертежъ 65), вращающійся безъ тренія вокругъ горизонтальной оси; среда, въ которой точки находятся, оказываетъ движенію ихъ сопротивленіе, пропорціональное квадрату скорости. Предполагается, что нить не скользитъ по блоку и что свободныя части ея висятъ вертикально и остаются вертикальными во время движенія.

Опредѣлить движеніе системы, предполагая, что блокъ есть однородный цилиндръ радіуса R и массы M ; пусть $m_1 > m_2$.

Такъ какъ нить не скользитъ по блоку, то уголъ θ , на который повернется цилиндръ въ теченіе времени t отъ начала движенія, опредѣлится изъ равенства: $\theta R = x_1 - a_1$, гдѣ x_1 и a_1 суть координаты точки m_1 въ моментъ t и въ начальный моментъ (ось $X^{0в}$ направлена вертикально внизъ).

Эту задачу можно рѣшить, выходя изъ уравненія (721, С) стр. 508; надо прежде всего составить это уравненіе для настоящаго случая.

Моментъ инерціи блока вокругъ оси вращенія равенъ половинѣ MR^2 , живая сила вращенія его равна четверти $MR^2(\theta')^2$ или $M(x_1')^2$; работа вѣса точки m_1 на протяженіи бесконечно-малаго перемѣщенія dx_1 равна $m_1 G dx_1$, а работа вѣса точки m_2 равна $(-m_2 G dx_1)$, гдѣ G означаетъ величину ускоренія силы тяжести; элементарная работа сопротивленій среды должна быть величиною отрицательною, она выражается такъ: $\mp (\mu_1 + \mu_2) (x_1')^2 dx_1$, гдѣ верхній знакъ должно взять при положительномъ dx_1 , то-есть при движеніи точки m_1 сверху внизъ, а нижній знакъ — при отрицательномъ dx_1 , т.-е., при движеніи этой точки снизу вверхъ; μ_1 и μ_2 суть коэффициенты сопротивленія среды движенію точекъ m_1 и m_2 .

Уравнение (721, С) въ настоящемъ случаѣ будетъ имѣть слѣдующій видъ:

$$\left(m_1 + m_2 + \frac{M}{2}\right)x_1' dx_1' = \left[(m_1 - m_2)G \mp (\mu_1 + \mu_2)(x_1')^2\right] dx.$$

Представимъ это уравнение такъ:

$$\frac{x_1' dx_1'}{g_1 \mp k_1^2 (x_1')^2} = dx, \dots \dots \dots (K)$$

гдѣ:

$$\frac{\mu_1 + \mu_2}{m_1 + m_2 + \frac{M}{2}} = k_1^2, \quad \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2 + \frac{M}{2}} G = g_1.$$

Сравнивъ дифференціальное уравнение (K) съ подобными же дифференціальными уравненіями, встрѣчающимися въ примѣрѣ 11-мъ (стр. 71—73), мы можемъ заключить, что при движеніи всей системы точка m_1 движется такимъ образомъ, какъ будто бы она была свободна и двигалась прямолинейно при дѣйствіи силы $m_1 g_1$ и сопротивленія среды, равнаго $k_1^2 m_1 (x_1')^2$.

21. Представимъ себѣ неподвижное твердое тѣло, имѣющее сферическую полость радіуса R_0 (черт. 66). Внутри этой полости, по ея поверхности катается безъ скольженія такой же шаръ радіуса R , какъ въ задачѣ 19-й; шаръ этотъ имѣетъ сферическую полость радіуса R_1 , заполненную жидкостью той же плотности, какъ и вещество шара; центръ его остается въ одной и той же вертикальной плоскости.

Опредѣлить движеніе шара при дѣйствіи силы тяжести, предполагая, что въ начальный моментъ линія OC , соединяющая центръ O сферы радіуса R_0 съ центромъ C подвижнаго шара, составляетъ уголъ β съ вертикальною линіею OD и что въ этотъ моментъ шаръ находится въ покоѣ.

Означимъ черезъ φ уголъ, составляемый длиною OC съ вертикальною линіею OD въ какой-либо моментъ t ; пусть D_1 (черт. 66) есть та точка движущагося шара, которая совпадаетъ съ точкою D тогда, когда уголъ φ равенъ нулю, означимъ черезъ θ уголъ, составляемый длиною CD_1 съ вертикальною линіею. Такъ какъ шаръ катается безъ скольженія, то дуга AD равна дугѣ AD_1 , т.-е.: $R_0 \varphi = R(\theta + \varphi)$.

Законъ живой силы выразится слѣдующимъ уравненіемъ:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} M(R_0 - R)^2 (\varphi')^2 + \frac{1}{2} \frac{8}{15} \pi \sigma (R^5 - R_1^5) \left(\frac{R_0 - R}{R}\right)^2 (\varphi')^2 = \\ = Mg(R_0 - R) (\cos \varphi - \cos \beta), \\ \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = \frac{10g}{(7 - 2n^5)(R_0 - R)} (\cos \varphi - \cos \beta); \end{aligned}$$

сравнивъ это уравненіе съ уравненіемъ живой силы движенія простаго маятника (стр. 236), мы заключимъ, что длина OC качается по тому же закону, какъ простой маятникъ длины:

$$\frac{7-2n^5}{5} (R_0 - R).$$

22. На гладкой горизонтальной плоскости лежитъ тяжелая призма, имѣющая основаніемъ прямоугольный треугольникъ $BЮК$ (черт. 67); эта призма можетъ скользить безъ тренія вдоль по плоскости, по направленію оси $X^{овъ}$; въ начальный моментъ призма была въ покоѣ, причемъ центръ инерціи ея находился на оси $Y^{овъ}$. Въ этотъ же моментъ на наклонную плоскость $ЮК$ былъ положенъ тяжелый однородный шаръ, радіуса R и массы m . Вслѣдствіе дѣйствія силы тяжести, шаръ начнетъ катиться по наклонной плоскости и если треніе между нимъ и этою плоскостью достаточно велико, то катаніе шара не будетъ сопровождаться скольженіемъ по плоскости.

Требуется опредѣлить, на какую длину ξ скатится шаръ вдоль по плоскости $ЮК$ въ теченіи времени t .

Всѣ задаваемые силы, приложенныя къ этой системѣ, суть силы тяжести, направленныя по отрицательной оси $Y^{овъ}$, поэтому центръ инерціи всей системы не долженъ сходить съ той вертикальной линіи, на которой онъ сходилъ въ начальный моментъ.

Отсюда слѣдуетъ, что вмѣстѣ съ паденіемъ шара по наклонной плоскости, сама призма должна скользить по направленію положительной оси $X^{овъ}$; въ то время, въ которое центръ шара пройдетъ вдоль по наклонной плоскости разстояніе ξ , центръ инерціи призмы долженъ пройти разстояніе x , удовлетворяющее равенству:

$$Mx = m(\xi \cos J - x),$$

гдѣ J есть уголъ, составляемый наклонною плоскостью $ЮК$ съ горизонтомъ, M — масса призмы, m — масса шара.

Живая сила призмы равна половинѣ $M(x')^2$; живая сила шара состоитъ: изъ живой силы его центра инерціи и изъ живой силы вращательнаго движенія вокругъ центра инерціи:

$$\frac{1}{2} \left[m(\xi' \cos J - x')^2 + m(\xi')^2 \sin^2 J + \frac{2}{5} m R^2 (\theta')^2 \right];$$

такъ какъ шаръ катится по наклонной плоскости безъ скольженія, то $R\theta' = \xi'$.

Составимъ уравненіе, выражающее законъ живой силы:

$$\frac{m}{2(M+m)} \left(\frac{7}{5} M + \frac{2}{5} m + m \sin^2 J \right) (\xi')^2 = mg\xi \sin J;$$

изъ него получимъ:

$$\xi = \frac{(M+m)g \sin J}{\frac{7}{5} M + \left(\frac{2}{5} + \sin^2 J \right) m} \frac{t^2}{2}.$$

23. На поверхность круговаго горизонтальнаго цилиндра, радіусъ котораго равенъ R , положено сочлененіе, состоящее изъ двухъ тяжелыхъ однородныхъ стержней, связанныхъ шарниромъ. Въ начальный моментъ оба стержня DB и DB_1 приподняты за концы B и B_1 до горизонтальнаго положенія (см. черт. 68) причемъ шарниръ D прикасается къ высшей точкѣ окружности одного изъ сѣченій цилиндра, а стержни находятся въ плоскости этого сѣченія. Изъ этого положенія концы стержней пущены свободно; подъ вліяніемъ силы тяжести свободные концы стержней начинаютъ опускаться внизъ, а шарниръ D — подыматься вверхъ. Требуется опредѣлить, какъ великъ наибольшій уголъ съ горизонтомъ, до котораго наклонятся стержни при этомъ движеніи.

Стержни предполагаются безконечно-тонкими; каждый изъ нихъ имѣетъ длину $3\sqrt{2}R$ и массу M .

Примемъ центръ круга за начало координатъ и направимъ ось Y вертикально внизъ; означимъ черезъ θ уголъ наклоненія стержней къ горизонту, а координаты центра инерціи C стержня $D'B'$ черезъ x_c и y_c .

Легко видѣть, что:

$$OD' = \frac{R}{\cos \theta}, \quad x_c = \frac{3}{\sqrt{2}} R \cos \theta, \quad y_c = \frac{3}{\sqrt{2}} R \sin \theta - \frac{R}{\cos \theta}.$$

Потенціалъ вѣса обоихъ стержней равенъ $2Mgy_c$; въ начальномъ положеніи стержней $y_c = -R$ и потенціалъ имѣетъ тогда значеніе: $-2MgR$; живая сила стержней равна нулю и въ начальномъ положеніи и въ тотъ моментъ, когда стержни достигнутъ наибольшаго наклона θ_1 . Изъ уравненія, выражающаго законъ живой силы, слѣдуетъ:

$$2MgR \left(\frac{3}{\sqrt{2}} \sin \theta_1 - \frac{1}{\cos \theta_1} + 1 \right) = 0;$$

отсюда найдемъ: $\cos \theta_1 = \frac{1}{3}$.

24. Къ точкамъ A и B (черт. 69) прикрѣплены концы гибкой нерастяжимой нити длины $2an$, гдѣ $2a$ есть разстояніе между точками A и B , а n — нѣкоторое отвлеченное число или дробь; къ серединѣ нити прикрѣплена тяжелая масса M . Однородный тяжелый стержень, имѣющій длину $2a$ и массу M снабженъ на концахъ ушками, черезъ которыя нить продѣта. Въ начальный моментъ концы D и E стержня совпадаютъ съ точками A и B и грузъ находится въ покоѣ на вытянутыхъ половинахъ нити MB и MA .

Затѣмъ стержень пущенъ свободно. Опреѣлнить, какова должна быть наименьшая длина нити, при которой, въ концѣ паденія стержня, грузъ M прикоснется къ его серединѣ.

Въ начальный моментъ координаты (по оси $Y^{овъ}$) груза M и центра инерціи стержня суть $a\sqrt{n^2-1}$ и нуль; въ тотъ моментъ, въ который требуемое прикосновеніе дѣйствительно произойдетъ, обѣ эти точки будутъ имѣть координату: $a(n-1)$. Для того, чтобы прикосновеніе произошло, необходимо, чтобы было удовлетворено условіе:

$$Mg(2a(n-1) - a\sqrt{n^2-1}) \geq 0,$$

получаемое изъ уравненія, выражающаго законъ живой силы; изъ этого условія находимъ: $n \geq \frac{5}{3}$.

25. На совершенно гладкой горизонтальной плоскости можетъ скользить свободно, безъ всякаго тренія, круговой плоскій дискъ радіуса R и массы M . На той же плоскости прикрѣпленъ неподвижно другой дискъ, радіусъ котораго равенъ Rn ; (на черт. 70-мъ изображены оба диска; неподвижный, имѣющій центромъ точку O и подвижный, имѣющій центромъ точку B). На диски надѣтъ накрестъ (см. черт. 70-й) упругій, связанный концами шнуръ, модуль упругости котораго равенъ E ; этотъ шнуръ въ натуральномъ состояніи имѣетъ длину, равную суммѣ окружностей обоихъ дисковъ. Въ начальный моментъ подвижный дискъ оттянутъ отъ неподвижнаго на столько, что шнуръ имѣетъ натяженіе T ; затѣмъ дискъ B пущенъ свободно. Опреѣлнить скорость, съ которою дискъ B ударится о дискъ неподвижный.

Означимъ черезъ θ уголъ, составляемый свободными частями шнура съ линіею OB ; по извѣстной формулѣ, выражающей зависимость между натяженіемъ и относительнымъ удлинненіемъ шнура: $Tl_0 = \lambda E$, гдѣ λ есть удлинненіе шнура, т.-е., разность между длиною растянутаго шнура и длиною его l_0 въ натуральномъ состояніи.

Легко рассчитать, что

$$\lambda = 2R(1+n) \left(\theta + \cotg \theta - \frac{\pi}{2} \right), \quad x = \frac{R(1+n)}{\sin \theta},$$

гдѣ x означаетъ разстояніе OB . Затѣмъ окажется, что элементарная работа силъ, приложенныхъ къ диску, выражается такъ:

$$-2T \cos \theta dx = \frac{2E}{\pi} R(1+n) \left(\theta + \cotg \theta - \frac{\pi}{2} \right) \cotg^2 \theta d\theta$$

и что это есть полный дифференціалъ слѣдующей функціи:

$$\frac{2E}{\pi} R(1+n) \left[\frac{\pi}{2} \theta + \frac{\pi}{2} \cotg \theta - \theta \cotg \theta - \frac{\theta^2}{2} - \frac{1}{2} \cotg^2 \theta \right].$$

Изъ уравненія, выражающаго законъ живой силы, найдемъ, что иско-
мая скорость равна:

$$V = \frac{T}{E} \sqrt{\frac{2(n+1)R\pi E}{M}}.$$

26. Въ вертикальную гладкую стѣну вбиты два круглыхъ гвоздя A и B на одномъ уровнѣ и въ разстояніи $2b$ одинъ отъ другаго; на эти гвозди наложена крестовина, состоящая изъ двухъ стержней KL и K_1L_1 (черт. 71) равной длины и вѣса, сочлененныхъ шарниромъ C , проходящимъ черезъ середины стержней. Въ начальный моментъ стержни взаимно-перпендикулярны и шарниръ C приходится надъ серединою O разстоянія AB , а стержни находятся въ покоѣ.

Подъ вліяніемъ силы тяжести точка C станетъ опускаться, а уголъ L_1CL — увеличиваться. Требуется опредѣлить, какую скорость будетъ имѣть точка C тогда, когда она совпадетъ съ точкою O ; предполагается, что центры инерціи стержней находятся въ C и что плечо инерціи каждаго стержня вокругъ C равно k .

Означимъ уголъ CBO черезъ θ и координату (по оси Y^{OVB}) точки C черезъ y_c . Легко видѣть, что

$$y_c = -b \tg \theta, \quad \theta' = -\frac{y'_c}{b} \cos^2 \theta$$

и что интеграль, выражающій законъ живой силы, будетъ имѣть слѣдующій видъ:

$$M(y'_c)^2 + Mk^2(\theta')^2 = 2Mg(b + y_c);$$

отсюда найдемъ, что искомая скорость равна:

$$V \sqrt{\frac{2gb^3}{b^2 + k^2}}.$$

27. Весьма тонкая твердая трубка, имѣющая видъ винтовой линіи, на-
вернутой на цилиндръ радіуса R , можетъ свободно вращаться вокругъ
оси этого цилиндра. Ось цилиндра вертикальна, уголъ подъема винтовой
линіи $= \alpha$, масса трубки равна M . Въ начальный моментъ трубка въ по-
коѣ, а въ верхній конецъ ея свободно пущена тяжелая матерьяльная
точка, масса которой равна m . Опреѣлить величину угловой скорости,
пріобрѣтенную трубкою при паденіи точки m на глубину h .

Точка m скользитъ вдоль по трубкѣ и въ то же время трубка должна
вращаться вокругъ вертикальной оси; зависимость между относительною
скоростью точки m по отношенію къ трубкѣ и угловою скоростью по-
слѣдней опредѣлится изъ интеграла, выражающаго, что законъ площадей
имѣетъ мѣсто вокругъ оси вращенія. Если s' есть относительная ско-
рость точки m , а θ' — угловая скорость трубки, то моментъ абсолютнаго
количества движенія точки m вокругъ оси $Z^{овъ}$ (черт. 72) будетъ:
 $mR(s' \cos \alpha - R\theta')$, а моментъ количествъ движенія трубки: $MR^2\theta'$; такъ
какъ въ начальный моментъ вся система была въ покоѣ, то:

$$mR(s' \cos \alpha - R\theta') - MR^2\theta' = 0;$$

отсюда получимъ величину отношенія между s' и θ' .

Затѣмъ изъ интеграла, выражающаго законъ живой силы, найдемъ:

$$\theta' = \frac{m}{R} \sqrt{\frac{2gh \cos^2 \alpha}{(M+m)(M+m \sin^2 \alpha)}}.$$

28. Твердая тонкая однородная трубка можетъ свободно вращаться
вокругъ горизонтальной оси къ ней перпендикулярной и проходящей че-
резъ ея середину. Трубка имѣетъ длину $2a$ и массу M . Кромѣ трубки
имѣется еще тонкій однородный и тяжелый стержень длины $2a$, и массы
 m ; этотъ стержень свободно входитъ въ трубку.

Въ начальный моментъ трубка AB находится въ покоѣ въ горизон-
тальномъ положеніи, а стержень DE приставленъ концемъ D къ концу
 B трубки (черт. 73), причемъ ось его составляетъ продолженіе оси
трубки. Въ этомъ положеніи стержню сообщена скорость V въ напра-
вленіи DC . Какъ только стержень начнетъ входить въ трубку, то своимъ

вѣсомъ начнетъ клонить конецъ B къ низу, такъ что, вмѣстѣ съ скользяніемъ стержня вдоль по трубкѣ, будетъ происходить вращеніе системы вокругъ оси C . Предполагая, что начальная скорость V на столько велика, что середина C_1 стержня дойдетъ только до середины C трубки, опредѣлить величину угловой скорости системы въ моментъ совпаденія серединъ.

Чтобы опредѣлить эту угловую скорость, надо составить интеграль, выражающій законъ живой силы, и примѣнить его къ моменту совпаденія серединъ стержня и трубки; изъ него найдемъ, что искомая угловая скорость равна корню квадратному изъ величины:

$$\frac{3m V^2}{Ma^2 + ma_1^2}.$$

29. На совершенно гладкой горизонтальной плоскости находится твердый параллелопипедъ $ABDE$ (черт. 74), заключающій въ себѣ сферическую пустоту (радіуса R); въ этой полости находится тяжелая материальная точка (масса m). Въ начальный моментъ точка m находится въ нижней точкѣ сферической полости и абсолютная скорость ея равна нулю, а параллелопипедъ (масса M) имѣетъ скорость V вдоль по горизонтальной оси $X^{овъ}$; опредѣлить, какъ должна быть велика скорость V для того, чтобы точка m двигалась по окружности большаго вертикальнаго круга сферы въ одномъ направленіи.

Черезъ центръ $Ю$ сферы проведемъ: ось $ЮЕ$ параллельно оси $X^{овъ}$ и ось $ЮУ$ вертикально внизъ.

По закону движенія центра инерціи:

$$Mx'_{ю} + m(x'_{ю} + \xi') = MV,$$

по закону живой силы:

$$\frac{1}{2} \left[M(x'_{ю})^2 + m(x'_{ю} + \xi')^2 + m(\eta')^2 \right] - \frac{1}{2} MV^2 = mg(\eta - R).$$

Исключивъ изъ этихъ равенствъ $x'_{ю}$, получимъ:

$$\frac{Mt}{M+m} (\xi'^2 - V^2) + m(\eta')^2 = 2mg(\eta - R).$$

Когда точка m будетъ въ самой верхней точкѣ сферы, тогда $\eta = -R$, $\eta' = 0$; притомъ тогда давленіе точки на сферу должно быть направлено снизу вверхъ, слѣдовательно, центробѣжная сила должна быть болѣе

вѣса точки, т.-е.: $(\xi')^2 > gR$, а потому изъ послѣдняго равенства заключимъ, что скорость V должна удовлетворять слѣдующему условію:

$$V^2 > 5gR + 4gR \frac{m}{M}.$$

30. Такой же параллелопедъ, какъ и въ предыдущей задачѣ, но въ немъ, вмѣсто сферической пустоты, просверленъ тонкій каналъ, имѣющій видъ циклоиды, обращенной выпуклостью книзу; уравненіе ея:

$$\xi = R(\omega + \sin \omega), \quad \eta = R(1 + \cos \omega);$$

тяжелая матерьяльная точка m скользитъ безъ тренія по этому каналу.

Рѣшить вопросъ о движеніи этой системы, предполагая, что въ начальный моментъ параллелопедъ (масса M) и точка m были въ покоѣ и что тогда эта точка не находилась въ самой нижней точкѣ циклоиды.

Изъ уравненій, выражающихъ законы движенія центра инерціи и живой силы:

$$Mx_{\text{ю}} + m(x_{\text{ю}} + \xi) = 0$$

$$M(x'_{\text{ю}})^2 + m((x'_{\text{ю}} + \xi')^2 + (\eta')^2) = 2mg(\eta - \eta_0)$$

и изъ уравненій кривой получимъ:

$$R^2 \left(\frac{1}{1 + \mu} (1 + \cos \omega)^2 + \sin^2 \omega \right) \left(\frac{d\omega}{dt} \right)^2 = 2gR(\cos \omega - \cos \omega_0),$$

гдѣ μ означаетъ величину отношенія m къ M . Сдѣлавъ подстановку:

$$\sin \frac{\omega}{2} = \sin \frac{\omega_0}{2} \cos \varphi,$$

отдѣливъ переменныя и произведя интегрированіе, получимъ:

$$\frac{T}{\pi} \int d\varphi \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi} = t + \Gamma,$$

$$T = \pi \sqrt{\frac{4R \left(1 + \mu \sin^2 \frac{\omega_0}{2} \right)}{g(1 + \mu)}}, \quad k^2 = \frac{\mu \sin^2 \frac{\omega_0}{2}}{1 + \mu \sin^2 \frac{\omega_0}{2}}.$$

31. Двѣ матеріальныя точки, массы которыхъ (m) равны между собою, находятся внутри кольцеобразной тонкой однородной трубки (радіусъ кольца R); онѣ связаны упругою нитью, тоже помещающеюся въ трубкѣ; длина этой нити, въ натуральномъ состояніи, равна двумъ третямъ длины трубки. Трубка (масса M) лежитъ на гладкой горизонтальной плоскости, по которой можетъ скользить безъ всякаго тренія. Въ начальный моментъ нить растянута настолько, что обѣ точки прикасаются одна къ другой въ точкѣ A трубки; какъ онѣ, такъ и трубка, находятся въ этотъ моментъ въ покоѣ, а затѣмъ система предоставлена самой себѣ. Найти, чему равняется отношеніе кинетической энергіи обѣихъ точекъ къ кинетической энергіи всей системы въ тотъ моментъ, когда нить приметъ натуральную длину.

Примемъ начальное положеніе центра кольца за начало неподвижныхъ координатъ, линію OA — за ось X ; начало подвижныхъ осей возьмемъ въ центрѣ K кольца, который будетъ оставаться на оси X^{old} ; само кольцо будетъ двигаться поступательно, а хорда, соединяющая обѣ точки, будетъ всегда перпендикулярна къ оси X . Оси ξ и η расположимъ такъ, какъ изображено на чертѣжѣ 75-мъ.

Такъ какъ центръ инерціи всей системы неподвиженъ и матеріальныя точки остаются на окружности: $\xi^2 + \eta^2 = R^2$, то:

$$(M + 2m)x'' + 2m\xi' = 0, \quad \eta' = -\frac{\xi}{\eta} \xi'.$$

Въ разсматриваемый моментъ ξ относится къ η , какъ 1 къ $\sqrt{3}$; кинетическая энергія обѣихъ точекъ окажется равною.

$$m((x'' + \xi')^2 + (\eta')^2) = \frac{4m}{3(M + 2m)^2} (M^2 + mM + m^2) (\xi')^2,$$

а кинетическая энергія всей системы — равною:

$$\frac{2m}{3(M + 2m)^2} (2M + m)(M + 2m) (\xi')^2.$$

32. Двѣ матеріальныя точки m_1 и m_2 связаны нерастяжимою нитью, имѣющею длину l и проходящею черезъ точку O ; точка m_1 притягивается къ O силою, обратно пропорціоальною квадрату расстоянія. Рѣшить вопросъ о движеніи этой системы.

Эту задачу можно рѣшить слѣдующимъ образомъ.

Къ точкѣ m_1 приложена сила, направленная къ точкѣ O , и реакція связи: $l - r_1 - r_2 \geq 0$, направленная туда же, поэтому точка m_1 должна

постоянно оставаться въ плоскости, проведенной черезъ начальный радіусъ векторъ и черезъ направленіе начальной скорости ея; точно также и точка m_2 во все время движенія остается въ одной плоскости; слѣдовательно, траекторіи обѣихъ точекъ суть плоскія кривыя, заключающіяся въ плоскостяхъ, проходящихъ черезъ точку O .

Движеніе каждой точки въ отдѣльности удовлетворяетъ закону площадей, а движеніе обѣихъ точекъ — закону живой силы; т.-е., мы имѣемъ слѣдующіе интегралы.

$$\rho_1^2 \theta_1' = C_1, \quad \rho_2^2 \theta_2' = C_2,$$

$$(m_1 + m_2) (\rho_1')^2 + m_1 \rho_1^2 (\theta_1')^2 + m_2 \rho_2^2 (\theta_2')^2 = 2h + \frac{2m_1 \mu}{\rho_1};$$

гдѣ ρ_1 и ρ_2 суть радіусы векторы точекъ; θ_1 — уголъ, составляемый радіусомъ векторомъ ρ_1 съ нѣкоторымъ неподвижнымъ направленіемъ, заключающимся въ плоскости орбиты точки m_1 ; θ_2 есть уголъ, составляемый радіусомъ векторомъ ρ_2 съ неподвижнымъ направленіемъ, заключающимся въ плоскости орбиты точки m_2 .

Величина реакціи, оказываемой связью на каждую изъ точекъ, выразится по формулѣ, составленной на страницѣ 338; въ примѣненіи къ настоящему вопросу эта формула дастъ:

$$\lambda = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \left(\rho_1 (\theta_1')^2 + \rho_2 (\theta_2')^2 - \frac{\mu}{\rho_1^2} \right).$$

Связь находится въ состояніи напряженія до тѣхъ поръ, пока выраженіе:

$$\frac{C_1^2}{\rho_1^3} + \frac{C_2^2}{\rho_2^3} - \frac{\mu}{\rho_1^2} \dots \dots \dots (743)$$

болѣе нуля.

Пока связь находится въ состояніи напряженія, радіусъ векторъ ρ_2 равняется $(l - \rho_1)$; исключивъ изъ предыдущихъ интеграловъ θ_1' и θ_2' , замѣнивъ ρ_2 черезъ $(l - \rho_1)$, отдѣливъ переменныя ρ_1 и t , и интегрируя, получимъ:

$$\int \rho_1 (l - \rho_1) \frac{d\rho_1}{R} = \frac{(t + \Gamma_1)}{\sqrt{m_1 + m_2}},$$

гдѣ

$$R = \sqrt{(2h\rho_1^2 + 2m_1\mu\rho_1 - m_1 C_1^2)(l - \rho_1)^2 - m_2 C_2^2 \rho_1^2}.$$

Произведя интегрированіе и рѣшивъ полученный интегралъ относи-

тельно ρ_1 , будемъ имѣть выраженіе этого радіуса вектора въ функціи отъ времени. Затѣмъ придется произвести еще два интегрированія для того, чтобы найти выраженія угловъ θ_1 и θ_2 въ функціяхъ отъ времени.

Слѣдуетъ замѣтить, что если C_1 и C_2 не равны нулю и если начальная величина a радіуса вектора ρ_1 заключается между нулемъ и l , то и во все время движенія ρ_1 не можетъ, ни обратиться въ нуль, ни возрасти до l . Въ самомъ дѣлѣ, изъ третьяго интеграла слѣдуетъ, что при $\rho_1 = a$, подкоренной многочленъ R^2 имѣетъ положительную величину:

$$(m_1 + m_2)(\rho_1')^2 a^2 (l - a)^2,$$

далѣе, при $\rho_1 = 0$, и при $\rho_1 = l$ многочленъ R^2 имѣетъ отрицательныя величины:

$$-m_1 C_1^2 l^2, \quad -m_2 C_2^2 l^2,$$

слѣдовательно, должны существовать два значенія ρ_1 , обращающія многочленъ R^2 въ нуль, притомъ одно изъ нихъ (b_1) должно заключаться между нулемъ и a , другое (b_2) — между a и l ; такъ какъ R не можетъ, при движеніи, получать мнимыхъ значеній, то ρ_1 должно колебаться между предѣлами b_1 и b_2 .

33. Система состоитъ изъ двухъ тяжелыхъ матерьяльныхъ точекъ m_1 и m_2 , между которыми существуетъ взаимное притяженіе, пропорціональное произведенію массъ и разстоянію между точками; точка m_1 должна оставаться на нѣкоторой наклонной плоскости: $z_1 - y_1 \cotg J = 0$, а точка m_2 — на вертикальной линіи: $z_2 = 0$, $x_2 = 0$ (ось Y направлена внизъ). Определить движеніе точекъ.

Составимъ дифференціальныя уравненія движенія:

$$m_1 x_1'' = -\mu m_1 m_2 x_1,$$

$$m_1 y_1'' = -\mu m_1 m_2 (y_1 - y_2) - \lambda \cotg J + m_1 g,$$

$$m_1 z_1'' = -\mu m_1 m_2 z_1 + \lambda,$$

$$m_2 y_2'' = -\mu m_1 m_2 (y_2 - y_1) + m_2 g.$$

Изъ двухъ среднихъ уравненій исключимъ λ , замѣнимъ y_1 черезъ $z_1 \tg J$, а затѣмъ положимъ:

$$y_2 = \eta + \frac{g(m_2 + m_1 \sin^2 J)}{\mu m_1 m_2 \cos^2 J}, \quad \dots \dots \dots (744)$$

$$\frac{z_1}{\cos J} = y_2 \sin J + r + \frac{g \sin J}{\mu m_2} = r + \eta \sin J + \frac{g(m_1 + m_2) \sin J}{\mu m_1 m_2 \cos^2 J}, \quad (745)$$

тогда получимъ слѣдующія дифференціальныя уравненія, подлежащія интегрированію:

$$\begin{aligned} x_1'' &= -\mu m_2 x, & r'' + \vartheta'' \sin J &= -\mu m_2 r, \\ \vartheta'' &= -\mu m_1 (\vartheta \cos^2 J - r \sin J); \end{aligned}$$

первое изъ нихъ интегрируется отдѣльно, второе же и третье суть совокупныя линейныя дифференціальныя уравненія второго порядка, имѣющія слѣдующее частное рѣшеніе:

$$r = e^{kt}, \quad \vartheta = \kappa e^{kt},$$

гдѣ k и κ суть постоянныя, опредѣляемыя изъ уравненій:

$$k^2 + \kappa k^2 \sin J + \mu m_2 = 0, \quad \kappa k^2 + \mu m_1 (\kappa \cos^2 J - \sin J) = 0.$$

Этимъ уравненіямъ удовлетворяютъ четыре совокупности значеній k и κ :

$$\begin{aligned} 1 \quad & \begin{cases} k_1 = +i\omega_1 \sqrt{\mu}, \\ \kappa_1, \end{cases} & 2 \quad & \begin{cases} k_2 = +i\omega_2 \sqrt{\mu}, \\ \kappa_2, \end{cases} \\ 3 \quad & \begin{cases} k_3 = -i\omega_1 \sqrt{\mu}, \\ \kappa_3, \end{cases} & 4 \quad & \begin{cases} k_4 = -i\omega_2 \sqrt{\mu}, \\ \kappa_4. \end{cases} \end{aligned}$$

$$\omega_1 \sqrt{2} = \sqrt{(m_1 + m_2) + \sqrt{m_1^2 + m_2^2 - 2m_1 m_2 \cos 2J}},$$

$$\omega_2 \sqrt{2} = \sqrt{(m_1 + m_2) - \sqrt{m_1^2 + m_2^2 - 2m_1 m_2 \cos 2J}},$$

$$\kappa_1 = \frac{m_1 \sin J}{m_1 \cos^2 J - \omega_1}, \quad \kappa_2 = \frac{m_1 \sin J}{m_1 \cos^2 J - \omega_2}.$$

Въ результатѣ получимъ слѣдующее полное рѣшеніе этой задачи:

$$x_1 = A_1 \cos(t \sqrt{\mu m_2} + A_2), \quad (746, 1)$$

$$\begin{aligned} \frac{x_1}{\cos J} &= \frac{g(m_1 + m_2) \sin J}{\mu m_1 m_2 \cos^2 J} + B_1 (1 + \kappa_1 \sin J) \cos(t \omega_1 \sqrt{\mu} + C_1) + \\ &+ B_2 (1 + \kappa_2 \sin J) \cos(t \omega_2 \sqrt{\mu} + C_2), \quad (746, 2) \end{aligned}$$

$$y_2 = \frac{g(m_2 + m_1 \sin^2 J)}{\mu m_1 m_2 \cos^2 J} + B_1 x_1 \cos(t\omega_1 \sqrt{\mu} + C_1) + \\ + B_2 x_2 \cos(t\omega_2 \sqrt{\mu} + C_2) \dots \dots \dots (746, 3)$$

Отношение $(z_1 : \cos J)$ выражаетъ разстояніе точки m_1 отъ оси $X^{\text{овъ}}$.

Формула (746, 3) выражаетъ, что матерьяльная точка m_2 совершаетъ сложныя гармоническія колебанія по обѣ стороны точки:

$$x = 0, \quad y = \frac{g(m_2 + m_1 \sin^2 J)}{\mu m_1 m_2 \cos^2 J}, \quad z = 0;$$

эти сложныя колебанія можно разсматривать какъ результатъ интерференціи простыхъ колебаній, имѣющихъ періоды:

$$\frac{2\pi}{\omega_1 \sqrt{\mu}} \quad \text{и} \quad \frac{2\pi}{\omega_2 \sqrt{\mu}}.$$

Движеніе точки m_1 по наклонной плоскости совершается около точки:

$$x = 0, \quad \frac{z}{\cos J} = \frac{g(m_1 + m_2) \sin J}{\mu m_1 m_2 \cos^2 J}, \quad y = z \operatorname{tg} J$$

и есть результатъ простыхъ гармоническихъ колебаній по оси $X^{\text{овъ}}$, имѣющихъ періодъ $(2\pi : \sqrt{\mu m_2})$ и сложныхъ гармоническихъ колебаній, перпендикулярныхъ къ этой оси.

34. Вокругъ горизонтальной оси вращается равномерно (съ угловою скоростью ω) плоскость, параллельная этой оси и отстоящая отъ нея въ разстояніи l . (На чертежѣ 76-мъ плоскость чертежа изображаетъ нѣкую вертикальную плоскость, перпендикулярную къ оси вращенія; точка O — слѣдъ этой оси, а линія QBP — слѣдъ вращающейся плоскости въ моментъ t). Въ начальный моментъ ($t = 0$) вращающаяся плоскость горизонтальна и на нее, въ точку B (черт. 76), былъ положенъ тяжелый однородный шаръ радіуса R и массы M ; предполагается, что шаръ этотъ не можетъ скользить по плоскости. Требуется опредѣлить движеніе шара, пока онъ остается на вращающейся плоскости.

Очевидно, что центръ шара C останется въ плоскости XU и что положеніе шара на плоскости и въ пространствѣ вполне опредѣлится разстояніемъ ξ_c его центра отъ линіи OB (по которой мы направимъ ось OY), такъ какъ уголъ θ , на который повернется шаръ, будетъ равенъ:

$$\theta = \omega t + \frac{\xi_c}{R}.$$

Абсолютныя координаты центра инерціи выразятся такъ:

$$x_c = \xi_c \cos \omega t - (l - R) \sin \omega t, \quad y_c = \xi_c \sin \omega t + (l - R) \cos \omega t.$$

Для рѣшенія этого вопроса, составимъ сначала Лагранжево дифференціальное уравненіе, которому долженъ удовлетворять координатный параметръ ξ_c ; составляя это уравненіе:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \xi'_c} \right) = \frac{\partial T}{\partial \xi_c} + Q,$$

придется составить слѣдующія выраженія:

$$v_c^2 = (\xi'_c)^2 + \xi_c^2 \omega^2 + \omega^2 (l - R)^2 - 2 \xi'_c \omega (l - R),$$

$$R^2 (\theta')^2 = R^2 \omega^2 + 2 \omega R \xi'_c + (\xi'_c)^2$$

$$T = \frac{M}{2} \left(v_c^2 + \frac{2}{5} R^2 (\theta')^2 \right); \quad Q = Mg \frac{\partial y_c}{\partial \xi_c} = Mg \sin \omega t.$$

Окажется, что Лагранжево уравненіе имѣетъ слѣдующій видъ:

$$\frac{7}{5} \xi_c'' = \omega^2 \xi_c + g \sin \omega t.$$

Полный интегралъ этого уравненія:

$$\xi_c = A_1 e^{kt} + A_2 e^{-kt} - \frac{5}{12} \frac{g}{\omega^2} \sin \omega t, \quad k = \omega \sqrt{\frac{5}{7}}.$$

Въ моментъ $t=0$, центръ шара находится на оси Y , т.-е., въ этотъ моментъ $\xi_c = 0$, а потому $A_2 = -A_1$; кромѣ того, въ этотъ моментъ абсолютная скорость центра инерціи равна нулю, а, слѣдовательно:

$$(\xi'_c)_0 = (l - R)\omega; \quad A_1 = \frac{\sqrt{35}}{24} \frac{g}{\omega^2} + \sqrt{\frac{7}{5}} \frac{(l - R)}{2}.$$

35. Двѣ тяжелыя матерьяльныя точки (массы m_1 и m_2) связаны нерастяжимою гибкою нитью длины l и движутся въ средѣ, оказывающей сопротивленіе, пропорціональное скорости и массѣ точки; движеніе совершается въ одной вертикальной плоскости.

Въ этомъ случаѣ:

$$X_1 = -\kappa m_1 x_1'; \quad Y_1 = -\kappa m_1 y_1' + m_1 g$$

$$X_2 = -\kappa m_2 x_2'; \quad Y_2 = -\kappa m_2 y_2' + m_2 g$$

$$x_1 = x_c + \frac{m_2}{m_1 + m_2} l \cos \theta, \quad y_1 = y_c + \frac{m_2}{m_1 + m_2} l \sin \theta$$

$$x_2 = x_c - \frac{m_1}{m_1 + m_2} l \cos \theta, \quad y_2 = y_c - \frac{m_1}{m_1 + m_2} l \sin \theta.$$

Составивъ уравненія Лагранжа, получимъ:

$$x_c'' = -\kappa x_c', \quad y_c'' = -\kappa y_c' + g, \quad \theta'' = -\kappa \theta';$$

первыя два дифференціальныя уравненія выражаютъ, что центръ инерціи движется какъ свободная тяжелая точка, имѣющая массу, равную единицѣ (см. примѣръ 18-й, стр. 83—85); послѣднее дифференціальное уравненіе, по интегрированіи, даетъ слѣдующій результатъ:

$$\theta = \theta_0 + \frac{\theta_0'}{\kappa} (1 - e^{-\kappa t}).$$

По формуламъ страницы 345-й составимъ выраженія для реакцій λ ; найдемъ:

$$Q = -\kappa u \cos(u, r_{12}), \quad K = -\frac{u^2}{r_{12}} + \frac{u^2 \cos^2(u, r_{12})}{r_{12}};$$

пока скорости точекъ удовлетворяютъ условію:

$$u \cos(u, r_{12}) = v_1 \cos(v_1, r_{12}) - v_2 \cos(v_2, r_{12}) = 0,$$

до тѣхъ поръ:

$$\lambda = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \frac{u^2}{l} = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} l (\theta')^2,$$

т.-е., λ имѣетъ величину положительную; значитъ, если въ начальный моментъ нить была натянута, то она останется натянутою и во все время движенія.

ГЛАВА XI.

О движеніи твердаго тѣла.

§ 119. Дифференціальныя уравненія движенія свободного твердаго тѣла.

Свободная неизмѣняемая система точекъ или свободное твердое тѣло имѣетъ шесть *степеней свободы* *), потому что число координатныхъ параметровъ, вполне опредѣляющихъ положеніе такой системы въ пространствѣ, равно шести.

Этими координатными параметрами могутъ служить координаты твердаго тѣла: $x_0, y_0, z_0, \phi, \theta, \psi$ или другія шесть независимыхъ переменныхъ, могущія замѣнить эти координаты.

Въ томъ, что число степеней свободы свободной неизмѣняемой системы точекъ равно шести, можно убѣдиться при помощи слѣдующаго соображенія.

Неизмѣняемость системы, состоящей изъ n точекъ, можетъ быть достигнута нѣкоторымъ числомъ неизмѣняемыхъ стержней, соединяющихъ точки попарно; наименьшее число стержней, потребное для этого, легко можетъ быть рассчитано. Три точки будутъ неизмѣняемо связаны тремя стержнями, а всякая новая точка будетъ прикрѣплена къ предыдущимъ тремъ не менѣе, какъ тремя новыми стержнями, такъ что, для неизмѣннаго соединенія между собою

3-хъ точекъ	—	требуется	3	стержня,
4-хъ	»	»	$3 + 3 = 6$	стержней,
5-и	»	»	$3 + 2 \cdot 3 = 9$	стержней,
.				
n	»	»	$3 + (n - 3)3 = 3n - 6$	стержн.

*) Значеніе этого термина указано на стран. 372-й, въ примѣчаніи 1-мъ.

Итакъ для того, чтобы связать между собою неизмѣняемо n точекъ, требуется $(3n - 6)$ связей, выражающихся равенствами слѣдующаго вида:

$$\sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 + (z_i - z_j)^2} - l_{ij} = 0,$$

а потому число степеней свободы такой системы равно

$$n = 3n - (3n - 6) = 6.$$

Такъ какъ $n=6$, то таково же число дифференціальныхъ уравненій движенія такой системы, не заключающихъ реакцій тѣхъ воображаемыхъ стержней, которые дѣлаютъ систему неизмѣняемою.

Эти шесть уравненій легко могутъ быть написаны прямо, если примемъ во вниманіе, что реакціи воображаемыхъ стержней попарно равны, прямопротивоположны и направлены вдоль по стержнямъ; такъ какъ въ этомъ случаѣ имѣетъ мѣсто специальная форма закона движенія центра инерціи, упомянутая на страницѣ 428-й, и такъ какъ главный моментъ реакцій связей равенъ нулю (стр. 457), то имѣемъ слѣдующія уравненія:

$$Mx''_c = \sum_{i=1}^{i=n} X_i, \quad My''_c = \sum_{i=1}^{i=n} Y_i, \quad Mz''_c = \sum_{i=1}^{i=n} Z_i \dots (616, A)$$

$$\frac{dL_x}{dt} = L_x, \quad \frac{dL_y}{dt} = L_y, \quad \frac{dL_z}{dt} = L_z \dots (641)$$

Эти же самыя уравненія могутъ быть получены еще другимъ путемъ, а именно изъ равенства (567) стр. 383, выражающаго начало д'Аламбера; для этого надо выразить возможные варьаціи координатъ точекъ неизмѣняемой системы помощью нѣкоторыхъ шести независимыхъ варьацій, а затѣмъ приравнять нулю коэффициенты этихъ варьацій въ равенствѣ (567).

За эти независимыя варьаціи мы примемъ: варьаціи координатъ какой-либо точки $Ю$, неизмѣнно связанной съ неизмѣняемою систе-

моу, и три другія безконечно-малыя величины, выражающіяся слѣдующими линейными функціями варьацій угловъ ϕ , ψ , θ :

$$\left. \begin{aligned} \theta_x &= \delta\theta \cos \psi \sin \phi - \delta\phi \sin \psi \\ \theta_y &= \delta\theta \sin \psi \sin \phi + \delta\phi \cos \psi \\ \theta_z &= \delta\theta \cos \phi + \delta\psi \end{aligned} \right\} ; \dots (747)$$

сравнивъ эти выраженія съ выраженіями (107), (108), (109) для P , Q и R на страницахъ 94—95 кинематической части, легко видѣть, что, при одновременномъ увеличеніи угловъ ϕ , ψ и θ на $\delta\phi$, $\delta\psi$, $\delta\theta$, вся система поворачивается на безконечно-малый уголъ:

$$\begin{aligned} \theta &= \sqrt{(\theta_x)^2 + (\theta_y)^2 + (\theta_z)^2} \\ &= \sqrt{(\delta\phi)^2 + (\delta\psi)^2 + (\delta\theta)^2 + 2\delta\theta\delta\psi \cos \phi} \dots (748) \end{aligned}$$

вокругъ оси, составляющей съ осями $X^{овъ}$, $Y^{овъ}$, $Z^{овъ}$, углы, косинусы которыхъ равны отношеніямъ:

$$\frac{\theta_x}{\theta}, \quad \frac{\theta_y}{\theta}, \quad \frac{\theta_z}{\theta}.$$

Безконечно-малый уголъ θ можетъ быть названъ *угловою варьаціею* положенія тѣла, а вышесказанная ось — *мгновенною осью* этой варьаціи; величины θ_x , θ_y , θ_z можно условиться называть проеяціями угловою варьаціи на оси координатъ $X^{овъ}$, $Y^{овъ}$, $Z^{овъ}$. Если направленіе мгновенной оси угловою варьаціи означить черезъ θ , то можно написать слѣдующія равенства:

$$\theta_x = \theta \cos(\theta, X), \quad \theta_y = \theta \cos(\theta, Y), \quad \theta_z = \theta \cos(\theta, Z). \dots (749)$$

По аналогіи, существующей между выраженіями (747), (748), (749) и соотвѣтственными выраженіями (107), (108), (109), (110), (101) кинематической части, мы вправѣ заключить, что возможные варьаціи координатъ точекъ неизмѣняемой системы выразятся слѣдующими линейными функціями шести независимыхъ варьацій $\delta x_{ю}$, $\delta y_{ю}$, $\delta z_{ю}$, θ_x , θ_y , θ_z :

$$\left. \begin{aligned} \delta x_i &= \delta x_{i0} + (z_i - z_{i0}) \theta_y - (y_i - y_{i0}) \theta_x, \\ \delta y_i &= \delta y_{i0} + (x_i - x_{i0}) \theta_z - (z_i - z_{i0}) \theta_x, \\ \delta z_i &= \delta z_{i0} + (y_i - y_{i0}) \theta_x - (x_i - x_{i0}) \theta_z. \end{aligned} \right\} \dots (750)$$

Подставивъ эти выраженія въ равенство (567) и приравнявъ нулю коэффициенты независимыхъ варьаций, получимъ уравненія (616, А) и три слѣдующія уравненія:

$$\sum_{i=1}^{i=n} m_i ((y_i - y_{i0}) z_i'' - (z_i - z_{i0}) y_i'') = (L_{i0})_x, \dots (751, a)$$

$$\sum_{i=1}^{i=n} m_i ((z_i - z_{i0}) x_i'' - (x_i - x_{i0}) z_i'') = (L_{i0})_y, \dots (751, b)$$

$$\sum_{i=1}^{i=n} m_i ((x_i - x_{i0}) y_i'' - (y_i - y_{i0}) x_i'') = (L_{i0})_z, \dots (751, c)$$

которыя, на основаніи уравненій (616, А), могутъ быть приведены въ виду (641).

Во многихъ вопросахъ уравненіямъ (641) должно предпочесть другія три уравненія, заключающія проеціи главнаго момента задаваемыхъ силъ на оси E , Y , Z , неизмѣнно связанныя съ системою; эти уравненія мы теперь выводимъ.

Равенство (567), по подстановленіи въ него, вмѣсто δx_i , δy_i , δz_i , —выраженій (750), можетъ быть представлено подъ слѣдующимъ видомъ:

$$\sum_{i=1}^{i=n} [(X_i - m_i x_i'') \delta x_{i0} + (Y_i - m_i y_i'') \delta y_{i0} + (Z_i - m_i z_i'') \delta z_{i0}] +$$

$$+ \theta \sum_{i=1}^{i=n} \begin{vmatrix} \cos(\theta, X), & \cos(\theta, Y), & \cos(\theta, Z) \\ x_i - x_{i0}, & y_i - y_{i0}, & z_i - z_{i0} \\ X_i - m_i x_i'', & Y_i - m_i y_i'', & Z_i - m_i z_i'' \end{vmatrix} = 0 \dots (752)$$

Опредѣлитель, заключающійся подъ знакомъ второй суммы, выражаетъ величину объема параллелоипеда, имѣющаго ребрами:

1) длины, равныя единицѣ и параллельныя мгновенной оси угловой варьяціи, 2) длины, равныя и параллельныя радіусу вектору, проведенному изъ точки $Ю$ въ точку m_i и 3) длины, изображающія величину и направленіе *потерянной силы* точки m_i .

Величина этого объема можетъ быть выражена другимъ опредѣлителемъ, составленнымъ изъ проэкцій реберъ на взаимно перпендикулярныя оси $ЮЕ$, $ЮГ$, $ЮZ$, неизмѣнно связанныя съ системою; этотъ опредѣлитель можетъ быть представленъ такъ:

$$\begin{vmatrix} \cos(\theta, E), & \cos(\theta, \Gamma), & \cos(\theta, Z) \\ \xi_i, & \eta_i, & \zeta_i \\ P_i \cos(P_i E), & P_i \cos(P_i \Gamma), & P_i \cos(P_i Z) \end{vmatrix},$$

$$P_i \cos(P_i E) = E_i - m_i \dot{w}_i \cos(\dot{w}_i, E),$$

$$P_i \cos(P_i \Gamma) = \Gamma_i - m_i \dot{w}_i \cos(\dot{w}_i, \Gamma),$$

$$P_i \cos(P_i Z) = Z_i - m_i \dot{w}_i \cos(\dot{w}_i, Z),$$

гдѣ E_i , Γ_i , Z_i означаютъ величины проэкцій задаваемой силы F_i , приложенной въ точкѣ m_i , на оси $E^{овъ}$, $\Gamma^{овъ}$, $Z^{овъ}$.

Вслѣдствіе такой замѣны одного опредѣлителя другимъ, вторая сумма равенства (752) обратится въ линейную функцію величинъ: $\theta_\xi = \theta \cos(\theta, E)$, $\theta_\eta = \theta \cos(\theta, \Gamma)$, $\theta_\zeta = \theta \cos(\theta, Z) \dots (753)$ которыя, подобно величинамъ (749), суть независимыя варьяціи, если только система свободна, а потому преобразованное равенство (752) распадается на шесть дифференціальныхъ уравненій: три уравненія (616, А) и три слѣдующія:

$$\left. \begin{aligned} \sum_{i=1}^{i=n} m_i \dot{w}_i (\eta_i \cos(\dot{w}_i Z) - \zeta_i \cos(\dot{w}_i \Gamma)) &= (L_{ю})_\xi \\ \sum_{i=1}^{i=n} m_i \dot{w}_i (\zeta_i \cos(\dot{w}_i E) - \xi_i \cos(\dot{w}_i Z)) &= (L_{ю})_\eta \\ \sum_{i=1}^{i=n} m_i \dot{w}_i (\xi_i \cos(\dot{w}_i \Gamma) - \eta_i \cos(\dot{w}_i E)) &= (L_{ю})_\zeta \end{aligned} \right\} \dots (754)$$

гдѣ во вторыхъ частяхъ находятся выраженія проекиій на оси Ξ , Υ , Z главнаго момента задаваемыхъ силъ вокругъ точки $Ю$:

$$(M_{ю})_{\Xi} = \sum_{i=1}^{n-1} (\eta_i Z_i - \zeta_i \Upsilon_i) \dots \dots \dots (755, a)$$

$$(M_{ю})_{\Upsilon} = \sum_{i=1}^{n-1} (\zeta_i \Xi_i - \xi_i Z_i) \dots \dots \dots (755, b)$$

$$(M_{ю})_{\zeta} = \sum_{i=1}^{n-1} (\xi_i \Upsilon_i - \eta_i \Xi_i) \dots \dots \dots (755, c)$$

Первыя части уравненій (754) могутъ быть представлены въ другомъ видѣ; произведемъ преобразование надъ первую частью перваго изъ этихъ уравненій.

Выразимъ проекиіи ускоренія \ddot{w} на подвижныя оси Z и Υ по формулѣ (293) кинематической части (стр. 251); составляя эти выраженія, намъ придется представить себѣ, что черезъ неподвижную точку (напримѣръ, черезъ начало координатъ) проведены направленія, параллельныя осямъ Z и Υ , и по нимъ, отъ O отложены длины, равныя единицѣ; скорости точекъ, находящихся на концѣ этихъ длинъ, войдутъ въ составляемыя нами выраженія. Проекиіи на оси Ξ , Υ , Z скорости той точки, которая находится на концѣ длины, параллельной оси Z , будутъ: $q, -p, 0$; а проекиіи на тѣ же оси скорости той точки, которая находится на концѣ длины, параллельной оси Υ , будутъ: $-r, 0, p$.

Мы получимъ слѣдующія равенства:

$$\dot{w}_i \cos(\dot{w}_i, Z) = \frac{d(w_i \cos(w_i, Z))}{dt} - q w_i \cos(w_i, \Xi) + p w_i \cos(w_i, \Upsilon)$$

$$\dot{w}_i \cos(\dot{w}_i, \Upsilon) = \frac{d(w_i \cos(w_i, \Upsilon))}{dt} + r w_i \cos(w_i, \Xi) - p w_i \cos(w_i, Z);$$

эти выраженія подставимъ въ первую часть перваго изъ уравненій (754).

Такъ какъ система—неизмѣняемая, то ξ , η , ζ , постоянны и могутъ быть введены подъ знаки производныхъ по времени; кромѣ того, припомнимъ составленныя на страницѣ 473-й выраженія (660) величинъ $(\lambda_{ю})_{\xi}$, $(\lambda_{ю})_{\eta}$, $(\lambda_{ю})_{\zeta}$; то окажется, что первая часть сказаннаго уравненія можетъ быть выражена такъ:

$$\frac{d(\lambda_{ю})_{\xi}}{dt} + q(\lambda_{ю})_{\zeta} - r(\lambda_{ю})_{\eta} + \\ + \sum_{i=1}^{i=n} m_i \left[(p\eta_i - q\xi_i)w_i \cos(w_i Y) - (r\xi_i - p\zeta_i)w_i \cos(w_i Z) \right];$$

последняя же сумма, если проеціи w_i на оси Y и Z будутъ замѣнены выраженіями (143) стр. 125 кинематической части, получить такой видъ:

$$M[(p\eta_c - q\xi_c)w_{ю} \cos(w_{ю} Y) - (r\xi_c - p\zeta_c)w_{ю} \cos(w_{ю} Z)]. \quad (756)$$

Чтобы придать полученному выраженію болѣе сжатый видъ, введемъ слѣдующія обозначенія:

$$w_{ю} \cos(w_{ю} X) = \alpha, \quad w_{ю} \cos(w_{ю} Y) = \beta, \quad w_{ю} \cos(w_{ю} Z) = \gamma, \quad (757)$$

тогда выраженіе (733) живой силы неизмѣняемой системы, приведенное на страницѣ (512), представится въ такомъ видѣ:

$$T = M \left[\frac{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}{2} + \alpha(q\zeta_c - r\eta_c) + \beta(r\xi_c - p\zeta_c) + \gamma(p\eta_c - q\xi_c) \right] + \\ + \frac{1}{2} (A_{ю}p^2 + B_{ю}q^2 + C_{ю}r^2 - 2D_{ю}qr - 2E_{ю}rp - 2F_{ю}pq), \quad (733 \text{ bis})$$

выраженіе же (756) можетъ быть представлено подъ видомъ слѣдующей разности:

$$\frac{\partial T}{\partial \gamma} \beta - \frac{\partial T}{\partial \beta} \gamma;$$

кромѣ того, если припомнить выраженія (661), приведенныя на страницахъ 473—474, и сравнить ихъ съ выраженіемъ (733, bis) живой силы, то будетъ видно, что:

$$(\lambda_{ю})_{\xi} = \frac{\partial T}{\partial p}, \quad (\lambda_{ю})_{\eta} = \frac{\partial T}{\partial q}, \quad (\lambda_{ю})_{\zeta} = \frac{\partial T}{\partial r}. \quad \dots \quad (757)$$

По этимъ причинамъ, дифференціальныя уравненія (754) могутъ быть представлены подъ слѣдующимъ видомъ:

$$\frac{d\left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)}{dt} = r \frac{\partial T}{\partial q} - q \frac{\partial T}{\partial r} + \gamma \frac{\partial T}{\partial \beta} - \beta \frac{\partial T}{\partial \gamma} + (L_{\eta})_{\xi}. \quad (758, a)$$

$$\frac{d\left(\frac{\partial T}{\partial q}\right)}{dt} = p \frac{\partial T}{\partial r} - r \frac{\partial T}{\partial p} + \alpha \frac{\partial T}{\partial \gamma} - \gamma \frac{\partial T}{\partial \alpha} + (L_{\eta})_{\eta}. \quad (758, b)$$

$$\frac{d\left(\frac{\partial T}{\partial r}\right)}{dt} = q \frac{\partial T}{\partial p} - p \frac{\partial T}{\partial q} + \beta \frac{\partial T}{\partial \alpha} - \alpha \frac{\partial T}{\partial \beta} + (L_{\eta})_{\zeta}. \quad (758, c)$$

Величины (753) могутъ быть названы проеціями угловой варьяціи на оси E , Υ , Z ; онѣ могутъ быть выражены слѣдующими линейными функціями отъ $\delta\phi$, $\delta\chi$ и $\delta\vartheta$:

$$\left. \begin{aligned} \theta_{\xi} &= -\delta\chi \sin \phi \cos \vartheta + \delta\phi \sin \vartheta, \\ \theta_{\eta} &= \delta\chi \sin \phi \sin \vartheta + \delta\phi \cos \vartheta, \\ \theta_{\zeta} &= \delta\chi \cos \phi + \delta\vartheta. \end{aligned} \right\} \dots \dots (759)$$

Если за точку $Ю$ взять центръ инерціи неизмѣняемой системы, то ξ_c , η_c , ζ_c будутъ равны нулю; тогда въ дифференціальныхъ уравненіяхъ (758) сократятся члены, заключающіе частныя производныя отъ T по α , β и γ .

Если твердое тѣло (или неизмѣняемая система) не свободно, но имѣетъ одну неподвижную точку, которую примемъ за точку $Ю$, то α , β и γ будутъ равны нулю, а потому тогда во вторыхъ частяхъ уравненій (758) тоже не будетъ членовъ, заключающихъ производныя отъ T по α , β и γ .

Если твердое тѣло свободно и за точку $Ю$ взять центръ инерціи C , а за оси E , Υ , Z —главныя центральныя оси инерціи тѣла, то

живая сила тѣла и проеції на оси Ξ , Υ , Z главного момента количества движенія вокругъ центра инерціи выразятся такъ:

$$T = \frac{1}{2} M v_c^2 + \frac{1}{2} (\mathcal{A}_c p^2 + \mathcal{B}_c q^2 + \mathcal{C}_c r^2) (760)$$

$$(\mathcal{L}_c)_\xi = \frac{\partial T}{\partial p} = \mathcal{A}_c p, \quad (\mathcal{L}_c)_\eta = \frac{\partial T}{\partial q} = \mathcal{B}_c q, \quad (\mathcal{L}_c)_\zeta = \frac{\partial T}{\partial r} = \mathcal{C}_c r. \quad (761)$$

Тогда дифференціальныя уравненія (758) получаютъ слѣдующій видъ:

$$\mathcal{A}_c \frac{dp}{dt} = qr(\mathcal{B}_c - \mathcal{C}_c) + (\mathcal{L}_c)_\xi (762, a)$$

$$\mathcal{B}_c \frac{dq}{dt} = rp(\mathcal{C}_c - \mathcal{A}_c) + (\mathcal{L}_c)_\eta (762, b)$$

$$\mathcal{C}_c \frac{dr}{dt} = pq(\mathcal{A}_c - \mathcal{B}_c) + (\mathcal{L}_c)_\zeta (762, c)$$

см. геометрическую интерпретацию Резальс.

Эти дифференціальныя уравненія называются Эйлеровыми дифференціальными уравненіями вращательнаго движенія свободнаго тѣла вокругъ центра инерціи.

Дифференціальныя уравненія (616, A) и (758) могутъ быть выведены еще слѣдующимъ образомъ.

Примѣнивъ къ свободному твердому тѣлу равенство (567, A), приведенное въ § 78-мъ на стр. 396, замѣнимъ варьяціи δx_i , δy_i , δz_i выраженіями (750), тогда R и первая сумма этого равенства выразятся такъ:

$$\begin{aligned} R = & M(x_c' \delta x_{i0} + y_c' \delta y_{i0} + z_c' \delta z_{i0}) + \\ & + (\mathcal{L}_{i0})_x \theta_x + (\mathcal{L}_{i0})_y \theta_y + (\mathcal{L}_{i0})_z \theta_z = M w_{c\epsilon_{i0}} \cos(w_{c\epsilon_{i0}}) + \mathcal{L}_{i0} \theta \cos(\mathcal{L}_{i0}, \theta) \\ & \sum_{i=1}^{i=n} F_{i\epsilon_i} \cos(F_{i\epsilon_i}) = B_{\epsilon_{i0}} \cos(B_{\epsilon_{i0}}) + \mathcal{L}_{i0} \theta \cos(\mathcal{L}_{i0}, \theta); . . (763) \end{aligned}$$

поэтому сумму R можно представить еще такъ:

$$\begin{aligned} R = & M(\alpha_{c\epsilon_{i0}} \cos(\epsilon_{i0}\Xi) + \beta_{c\epsilon_{i0}} \cos(\epsilon_{i0}\Upsilon) + \gamma_{c\epsilon_{i0}} \cos(\epsilon_{i0}Z)) + \\ & + (\mathcal{L}_{i0})_\xi \theta_\xi + (\mathcal{L}_{i0})_\eta \theta_\eta + (\mathcal{L}_{i0})_\zeta \theta_\zeta, \end{aligned}$$

гдѣ $\alpha_c, \beta_c, \gamma_c$ суть проэкціи скорости центра инерціи системы на оси E, Y, Z ; эти величины могутъ быть выражены такъ:

$$\left. \begin{aligned} \alpha_c &= \alpha + q\zeta_c - r\eta_c = \frac{\partial T}{\partial \alpha} \frac{1}{M} \\ \beta_c &= \beta + r\xi_c - p\zeta_c = \frac{\partial T}{\partial \beta} \frac{1}{M} \\ \gamma_c &= \gamma + p\eta_c - q\xi_c = \frac{\partial T}{\partial \gamma} \frac{1}{M} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (764)$$

Въ равенствѣ (567, А) заключается варьяція: δT . Такъ какъ T есть функція (733, bis) отъ $\alpha, \beta, \gamma, p, q, r$ и притомъ только отъ этихъ величинъ, то поэтому:

$$\delta T = \frac{\partial T}{\partial \alpha} \delta \alpha + \frac{\partial T}{\partial \beta} \delta \beta + \frac{\partial T}{\partial \gamma} \delta \gamma + \frac{\partial T}{\partial p} \delta p + \frac{\partial T}{\partial q} \delta q + \frac{\partial T}{\partial r} \delta r,$$

или, на основаніи равенствъ (757) и (764):

$$\delta T = M(\alpha_c \delta \alpha + \beta_c \delta \beta + \gamma_c \delta \gamma) + (\lambda_{ю})_{\xi} \delta p + (\lambda_{ю})_{\eta} \delta q + (\lambda_{ю})_{\zeta} \delta r.$$

Поэтому разность между варьяціею δT и полною производною отъ R по T выразится такъ:

$$\begin{aligned} \delta T - \frac{dR}{dt} &= M \left[\alpha_c \left(\delta \alpha - \frac{dx_1}{dt} \right) + \beta_c \left(\delta \beta - \frac{dx_2}{dt} \right) + \gamma_c \left(\delta \gamma - \frac{dx_3}{dt} \right) \right] + \\ &+ (\lambda_{ю})_{\xi} \left(\delta p - \frac{d\theta_{\xi}}{dt} \right) + (\lambda_{ю})_{\eta} \left(\delta q - \frac{d\theta_{\eta}}{dt} \right) + (\lambda_{ю})_{\zeta} \left(\delta r - \frac{d\theta_{\zeta}}{dt} \right) - \\ &- M \frac{d\alpha_c}{dt} x_1 - M \frac{d\beta_c}{dt} x_2 - M \frac{d\gamma_c}{dt} x_3 - \\ &- \frac{d(\lambda_{ю})_{\xi}}{dt} \theta_{\xi} - \frac{d(\lambda_{ю})_{\eta}}{dt} \theta_{\eta} - \frac{d(\lambda_{ю})_{\zeta}}{dt} \theta_{\zeta}, \dots \dots \dots (765) \end{aligned}$$

здѣсь x_1, x_2, x_3 означаютъ проэкціи $\epsilon_{ю}$ на оси E, Y, Z .

Заключающіяся здѣсь разности между варьяціями $\delta \alpha, \dots, \delta p, \dots$ и производными по времени отъ $x_1, \dots, \theta_{\xi}, \dots$ могутъ быть выражены по формулѣ (582) стр. 395-й § 77-го; составимъ выраженія этихъ разностей.

Предварительно представимъ себѣ три взаимно-перпендикулярныя

направленія, выходящія изъ начала координатъ и параллельныя осямъ E, Y, Z , неизмѣнно связаннымъ съ движущимся твердымъ тѣломъ; на этихъ подвижныхъ направленіяхъ представимъ себѣ три точки $M(E), M(Y), M(Z)$, по одной на каждомъ, отстоящія отъ O на постоянномъ разстояніи, равномъ единицѣ. Одновременно съ дѣйствительнымъ движеніемъ тѣла и эти точки совершаютъ движеніе и проэкціи скоростей ихъ на оси E, Y, Z выражаются слѣдующими величинами:

Проекціи скоростей точекъ			
	$M(E)$	$M(Y)$	$M(Z)$
на ось E	0	$-r$	q
на ось Y	r	0	$-p$
на ось Z	$-q$	p	0.

Кромѣ того, одновременно съ варьяціею движенія тѣла, положенія этихъ точекъ получаютъ варьяціи, проэкціи которыхъ на тѣ же оси выражаются слѣдующими величинами:

Проекціи варьяцій положеній точекъ			
	$M(E)$	$M(Y)$	$M(Z)$
на ось E	0	$-\theta_z$	θ_y
на ось Y	θ_z	0	$-\theta_x$
на ось Z	$-\theta_y$	θ_x	0.

Примѣнимъ теперь формулу (582) къ точкѣ $Ю$ и къ направленію оси E , то-есть въ формулу эту подставимъ: $w_{ю}, \epsilon_{ю}$ и E вмѣсто v, ϵ и U ; тогда точкою $M(U)$ (стр. 394) должна будетъ служить точка $M(E)$ и формула (582) приметъ слѣдующій видъ:

$$\delta(w_{ю} \cos(w_{ю}E)) = \frac{d(\epsilon_{ю} \cos(\epsilon_{ю}E))}{dt} - r\epsilon_{ю} \cos(\epsilon_{ю}Y) + q\epsilon_{ю} \cos(\epsilon_{ю}Z) + \\ + \theta_z w_{ю} \cos(w_{ю}Y) - \theta_y w_{ю} \cos(w_{ю}Z),$$

или, при сокращенномъ обозначеніи:

$$\delta\alpha - \frac{dx_1}{dt} = qx_3 - rx_2 - \theta_y\gamma + \theta_z\beta; \dots (766, a)$$

подобнымъ же образомъ составимъ еще двѣ слѣдующія формулы:

$$\delta\beta - \frac{dx_2}{dt} = rx_1 - px_3 - \theta_\zeta\alpha + \theta_\xi\gamma, \dots (766, b)$$

$$\delta\gamma - \frac{dx_3}{dt} = px_2 - qx_1 - \theta_\xi\beta + \theta_\eta\alpha. \dots (766, c)$$

Примѣнимъ формулу (582) къ точкѣ $M(\Upsilon)$ и къ направленію Z , то-
есть, въ формулу эту подставимъ: p , θ_ξ и Z вмѣсто $v \cos(vU)$, $\epsilon \cos(\epsilon U)$
и U ; въ этомъ случаѣ точку $M(Z)$ должно взять въ качествѣ точки $M(U)$;
получимъ:

$$\delta p = \frac{d\theta_\xi}{dt} + q\theta_\zeta - r\theta_\eta; \dots (767, a)$$

подобнымъ же образомъ получимъ:

$$\delta q = \frac{d\theta_\eta}{dt} + r\theta_\xi - p\theta_\zeta, \dots (767, b)$$

$$\delta r = \frac{d\theta_\zeta}{dt} + p\theta_\eta - q\theta_\xi. \dots (767, c)$$

Подставивъ найденныя теперь выраженія разностей въ выраженіе
(765) и отобравъ въ немъ члены, заключающіе x_1 , x_2 , x_3 , найдемъ, что эти
члены суть:

$$- M \left[\left(\frac{d\alpha_c}{dt} - r\beta_c + q\gamma_c \right) x_1 + \left(\frac{d\beta_c}{dt} - p\gamma_c + r\alpha_c \right) x_2 + \right. \\ \left. + \left(\frac{d\gamma_c}{dt} - q\alpha_c + p\beta_c \right) x_3 \right],$$

но если примѣнить формулу (293) кинематической части (стр. 251) къ
центру инерціи C и къ направленіямъ осей E , Υ , Z , то окажется, что
тричлены, помноженные въ послѣднемъ выраженіи на x_1 , x_2 , x_3 , равняются
проекціямъ ускоренія центра инерціи C на оси E , Υ , Z , слѣдовательно,
послѣднее выраженіе равняется:

$$- M \dot{\omega}_{c\epsilon_{\epsilon_0}} \cos(\dot{\omega}_c, \epsilon_{\epsilon_0}).$$

Присоединивъ къ преобразованному такимъ образомъ выраженію

(765) сумму (763), найдемъ, что равенство (567, А) получить слѣдующій видъ:

$$\begin{aligned} & (B_x - Mx_c'')\delta x_{ю} + (B_y - My_c'')\delta y_{ю} + (B_c - Mz_c'')\delta z_{ю} + \\ & ((L_{ю})_{\xi} - (L_{ю})'_{\xi} + r(L_{ю})_{\eta} - q(L_{ю})_{\zeta} + M\gamma\beta_c - M\beta\gamma_c)\theta_{\xi} + \\ & ((L_{ю})_{\eta} - (L_{ю})'_{\eta} + p(L_{ю})_{\zeta} - r(L_{ю})_{\xi} + M\alpha\gamma_c - M\gamma\alpha_c)\theta_{\eta} + \\ & ((L_{ю})_{\zeta} - (L_{ю})'_{\zeta} + q(L_{ю})_{\xi} - p(L_{ю})_{\eta} + M\beta\alpha_c - M\alpha\beta_c)\theta_{\zeta} = 0, \quad (765, E) \end{aligned}$$

а отсюда, на основаніи леммы § 76-го (стр. 386), выведемъ дифференціальныя уравненія (616, А) (стр. 537) и (758) (стр. 543).

Полученныя дифференціальныя уравненія (758) суть дифференціальныя уравненія перваго порядка относительно величинъ p , q и r ; къ нимъ слѣдуетъ еще присоединить уравненія (119) стран. 105 кинематической части:

$$p = -\frac{d\kappa}{dt} \sin \phi \cos \vartheta + \frac{d\phi}{dt} \sin \vartheta. \quad (768, a)$$

$$q = \frac{d\kappa}{dt} \sin \phi \sin \vartheta + \frac{d\phi}{dt} \cos \vartheta. \quad (768, b)$$

$$r = \frac{d\kappa}{dt} \cos \phi + \frac{d\vartheta}{dt}. \quad (768, c)$$

Можно, кромѣ того, прямо составить Лагранжевы дифференціальныя уравненія втораго порядка относительно координатныхъ параметровъ ϕ , κ , ϑ , замѣняющія шесть дифференціальныхъ уравненій перваго порядка: (758) и (768); эти уравненія будутъ слѣдующія:

$$\frac{d\left(\frac{\partial T}{\partial \phi'}\right)}{dt} = \frac{\partial T}{\partial \phi} + (L_{ю})_y \cos \kappa - (L_{ю})_x \sin \kappa. \quad (769, a)$$

$$\frac{d\left(\frac{\partial T}{\partial \kappa'}\right)}{dt} = \frac{\partial T}{\partial \kappa} + (L_{ю})_z. \quad (769, b)$$

$$\begin{aligned} & \frac{d\left(\frac{\partial T}{\partial \vartheta'}\right)}{dt} = \frac{\partial T}{\partial \vartheta} + \\ & + ((L_{ю})_x \cos \kappa + (L_{ю})_y \sin \kappa) \sin \phi + (L_{ю})_z \cos \phi; \quad (769, c) \end{aligned}$$

при составленіи этихъ уравненій предполагается, что p, q, r , заключающіяся въ выраженіи (733, bis) живой силы T , замѣнены вторыми частями равенствъ (768, a, b, c).

§ 120. Такъ называемое вращеніе твердаго тѣла по инерціи.

Прежде всего остановимся на тѣхъ случаяхъ, въ которыхъ главный моментъ задаваемыхъ силъ вокругъ центра инерціи свободного твердаго тѣла равенъ нулю.

Вращательное движеніе, совершаемое въ этихъ случаяхъ твердымъ тѣломъ вокругъ его центра инерціи C , называется *вращеніемъ по инерціи*; въ настоящемъ параграфѣ займемся изученіемъ законовъ этого вращенія.

Прежде всего слѣдуетъ получить интегралы дифференціальныхъ уравненій; число искоемыхъ интеграловъ равно 12-ти, такъ какъ число независимыхъ координатныхъ параметровъ, опредѣляющихъ положеніе свободного твердаго тѣла въ пространствѣ, равно шести.

Шесть изъ числа всѣхъ интеграловъ суть интегралы дифференціальныхъ уравненій (616, A) движенія центра инерціи тѣла, остальные шесть суть интегралы дифференціальныхъ уравненій вращательнаго движенія.

Въ разсматриваемыхъ нами здѣсь случаяхъ дифференціальныя уравненія вращенія тѣла вокругъ центра инерціи могутъ быть представлены, или въ видѣ уравненій:

$$\frac{d(\lambda_c)_x}{dt} = 0, \quad \frac{d(\lambda_c)_y}{dt} = 0, \quad \frac{d(\lambda_c)_z}{dt} = 0, \quad . . . \quad (770)$$

или въ видѣ Эйлеровыхъ уравненій:

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{A}_c \frac{dp}{dt} &= (\mathfrak{B}_c - \mathfrak{C}_c)qr \\ \mathfrak{B}_c \frac{dq}{dt} &= (\mathfrak{C}_c - \mathfrak{A}_c)rp \\ \mathfrak{C}_c \frac{dr}{dt} &= (\mathfrak{A}_c - \mathfrak{B}_c)pq \end{aligned} \right\} (762, \text{bis})$$

и уравненій (768).

Интегрируя дифференціальныя уравненія (770), получаемъ три интеграла:

$$(\mathcal{L}_c)_x = C_1, (\mathcal{L}_c)_y = C_2, (\mathcal{L}_c)_z = C_3, \dots \dots \dots (653)$$

выражающіе, что законъ площадей имѣетъ мѣсто во всякой плоскости, проходящей черезъ центръ инерціи.

На основаніи формулъ (659) стр. 472, эти интегралы могутъ быть представлены такъ:

$$(\mathcal{L}_c)_\xi \lambda_x + (\mathcal{L}_c)_\eta \mu_x + (\mathcal{L}_c)_\zeta \nu_x = C_1, \dots \dots$$

или, на основаніи выраженій (761) стр. 544, такъ:

$$\mathcal{U}_c p \lambda_x + \mathcal{B}_c q \mu_x + \mathcal{C}_c r \nu_x = C_1, \dots \dots \dots (771, a)$$

$$\mathcal{U}_c p \lambda_y + \mathcal{B}_c q \mu_y + \mathcal{C}_c r \nu_y = C_2, \dots \dots \dots (771, b)$$

$$\mathcal{U}_c p \lambda_z + \mathcal{B}_c q \mu_z + \mathcal{C}_c r \nu_z = C_3 \dots \dots \dots (771, c)$$

Слѣдовательно, при вращеніи твердаго тѣла по инерціи, главный моментъ количества движенія вокругъ центра инерціи сохраняетъ постоянную величину и постоянное направленіе въ пространствѣ.

Равенство:

$$\mathcal{U}_c^2 p^2 + \mathcal{B}_c^2 q^2 + \mathcal{C}_c^2 r^2 = G^2, \dots \dots \dots (772)$$

(гдѣ $G^2 = C_1^2 + C_2^2 + C_3^2$) выражающее, что главный моментъ $(\mathcal{L})_c$ сохраняетъ постоянную величину, есть одинъ изъ интеграловъ Эйлєровыхъ уравненій (762, bis); въ самомъ дѣлѣ, помноживъ первое изъ нихъ на $2\mathcal{U}_c p$, второе — на $2\mathcal{B}_c q$, третье — на $2\mathcal{C}_c r$ и сложивъ эти уравненія, получимъ: во второй части—нуль, а въ первой—производную по t отъ первой части интеграла (772).

Такъ какъ элементарная работа всѣхъ задаваемыхъ силъ въ настоящемъ случаѣ выразится тричленомъ:

$$B_x dx_c + B_y dy_c + B_z dz_c,$$

и такъ какъ изъ дифференціальныхъ уравненій (616, A), выражающихъ законъ движенія центра инерціи, слѣдуетъ, что этотъ

тричленъ равняется дифференціалу живой силы центра инерціи $\left(\frac{M}{2} v_c^2\right)$, то осталъная часть живой силы, а именно живая сила вращательнаго движенія, должна сохранятьъ постоянную величину:

$$\frac{1}{2}(\mathfrak{A}_c p^2 + \mathfrak{B}_c q^2 + \mathfrak{C}_c r^2) = h; \quad (773)$$

это равенство, представляющее четвертый интегралъ дифференціальныхъ уравненій вращательнаго движенія тѣла, можетъ быть получено еще слѣдующимъ образомъ: помноживъ уравненія (762, bis) на p, q, r и сложивъ, получимъ во второй части нуль, а въ первой—производную по t отъ первой части равенства (773).

Имѣя эти четыре интеграла, можно уже составить себѣ нѣкоторое понятіе о вращеніи тѣла по инерціи, какъ показали Поансо (Poinsot) и Макъ-Куллахъ (Mac Cullagh).

Поансо замѣтилъ, что при вращеніи тѣла по инерціи центральный эллипсоидъ катится безъ скольженія по двумъ плоскостямъ, параллельнымъ неизмѣняемой плоскости; это можетъ быть доказано слѣдующимъ образомъ.

Проведемъ черезъ центръ инерціи тѣла мгновенную ось и найдемъ точку пересѣченія ея съ поверхностью центральнаго эллипсоида инерціи:

$$\mathfrak{A}_c \xi^2 + \mathfrak{B}_c \eta^2 + \mathfrak{C}_c \zeta^2 = m \cdot \rho^4 \quad (774)$$

Координаты и радіусъ векторъ ρ этой точки должны удовлетворять уравненію (774) и равенствамъ:

$$\frac{\xi_0}{\rho_0} = \frac{p}{\Omega}, \quad \frac{\eta_0}{\rho_0} = \frac{q}{\Omega}, \quad \frac{\zeta_0}{\rho_0} = \frac{r}{\Omega}; \quad (775)$$

подставивъ выраженія для ξ, η, ζ , получаемыя изъ (775), въ уравненіе (774), получимъ:

$$\rho_0^2 = m \rho^4 \cdot \frac{\Omega^2}{\mathfrak{A}_c p^2 + \mathfrak{B}_c q^2 + \mathfrak{C}_c r^2} = m \rho^4 \frac{\Omega^2}{2h} \quad (776)$$

Проведемъ черезъ эту точку (ξ_0, η_0, ζ_0) касательную плоскость

къ эллипсоиду инерціи; разстояніе этой плоскости отъ центра инерціи C будетъ равно:

$$D = \frac{m\delta^4}{\sqrt{\mathfrak{A}_c^2\xi_0^2 + \mathfrak{B}_c^2\eta_0^2 + \mathfrak{C}_c^2\zeta_0^2}},$$

$$D = \frac{m\delta^4 \cdot \Omega}{\rho_0 \sqrt{\mathfrak{A}_c^2 p^2 + \mathfrak{B}_c^2 q^2 + \mathfrak{C}_c^2 r^2}} = \sqrt{m\delta^4} \frac{\sqrt{2h}}{G} *) . . (777)$$

т. е., плоскость, касательная къ центральному эллипсоиду инерціи въ точкѣ пересѣченія его мгновенною осью, находится въ постоянномъ разстояніи отъ центра инерціи.

Косинусы угловъ, составляемыхъ съ осями Ξ, Υ, Z нормалью N къ эллипсоиду инерціи въ точкѣ (ξ_0, η_0, ζ_0) , выразятся такъ:

$$\cos(N, \Xi) = \frac{\mathfrak{A}_c \xi_0}{\sqrt{\mathfrak{A}_c^2 \xi_0^2 + \mathfrak{B}_c^2 \eta_0^2 + \mathfrak{C}_c^2 \zeta_0^2}} = \frac{\mathfrak{A}_c p}{G} = \cos(\lambda_c, \Xi)$$

$$\cos(N, \Upsilon) = \frac{\mathfrak{B}_c q}{G} = \cos(\lambda_c, \Upsilon), \quad \cos(N, Z) = \frac{\mathfrak{C}_c r}{G} = \cos(\lambda_c, Z)$$

т. е., вышесказанная касательная плоскость перпендикулярна къ направленію главнаго момента количества движенія тѣла вокругъ центра инерціи, а слѣдовательно она параллельна неизмѣняемой плоскости.

Итакъ, при вращеніи тѣла по инерціи, центральный эллипсоидъ

*) Можно показать, что D не можетъ быть болѣе длиннѣйшей главной оси эллипсоида инерціи и не можетъ быть менѣе кратчайшей его оси; для того составимъ изъ равенствъ (772) и (773) два слѣдующія:

$$(\mathfrak{B} - \mathfrak{A})\mathfrak{B}q^2 + (\mathfrak{C} - \mathfrak{A})\mathfrak{C}r^2 = G^2 - 2h\mathfrak{A}$$

$$(\mathfrak{C} - \mathfrak{A})\mathfrak{A}p^2 + (\mathfrak{C} - \mathfrak{B})\mathfrak{B}q^2 = 2h\mathfrak{C} - G^2;$$

если \mathfrak{A} есть наименьшій, а \mathfrak{C} — наибольшій главный моментъ инерціи, то первыя части этихъ двухъ равенствъ не могутъ быть менѣе нуля, а потому

$$\frac{2h}{G^2} \text{ не болѣе } \frac{1}{\mathfrak{A}} \text{ и не менѣе } \frac{1}{\mathfrak{C}}.$$

его постоянно прикасается къ двумъ плоскостямъ, параллельнымъ неизмѣняемой плоскости и отстоящимъ отъ нея на разстояніяхъ равныхъ D (777).

Движеніе тѣла и эллипсоида совершается притомъ такъ, что линія, проходящая черезъ центръ и черезъ обѣ точки прикосновенія, есть мгновенная ось вращенія; слѣдовательно, эллипсоидъ инерціи катится безъ скольженія по двумъ вышесказаннымъ плоскостямъ.

Точки прикосновенія непрерывно измѣняютъ свои мѣста и на эллипсоидѣ и на плоскостяхъ; та линія, которую точка прикосновенія чертитъ на эллипсоидѣ, называется *поллодією*, а та, которую она чертитъ на плоскости, — *эролодією*.

Угловая скорость Ω не остается постоянною, но проэкція ея на направленіе главнаго момента (λ_c) сохраняетъ постоянную величину; въ самомъ дѣлѣ, интеграль (773) можетъ быть представлень такъ:

$$\mathfrak{A}_c p \cdot p + \mathfrak{B}_c q \cdot q + \mathfrak{C}_c r \cdot r = 2h,$$

$$\lambda_c \Omega \cos(\lambda_c, \Omega) = 2h,$$

откуда слѣдуетъ:

$$\Omega \cos(\lambda_c, \Omega) = \frac{2h}{G} \dots \dots \dots (778)$$

Макъ-Куллахъ замѣтилъ, что гираціонный эллипсоидъ (см. стр. 491) при вращеніи тѣла по инерціи движется такъ, что поверхность его проходитъ черезъ двѣ точки, находящіяся на направленіи главнаго момента количества движенія тѣла въ постоянныхъ разстояніяхъ отъ центра инерціи.

Чтобы показать это, опредѣлимъ точки пересѣченія поверхности гираціоннаго эллипсоида

$$\xi_c^2 + \eta_c^2 + \zeta_c^2 = \frac{1}{M} \dots \dots \dots (699, \text{bis})$$

направленіемъ главнаго момента λ_c ; координаты ξ_1, η_1, ζ_1 и радиусъ векторъ каждой такой точки должны удовлетворять равенствамъ:

$$\xi_1 = \frac{\mathfrak{A}_c p}{G}, \quad \eta_1 = \frac{\mathfrak{B}_c q}{G}, \quad \zeta_1 = \frac{\mathfrak{C}_c r}{G}.$$

и уравненію (699, bis). Изъ этихъ равенствъ и изъ равенства (773) слѣдуетъ:

$$\rho_1 = \frac{G}{\sqrt{2hM}}, \dots \dots \dots (779)$$

т.-е., ρ_1 есть величина постоянная.

Черезъ эту точку проведемъ касательную плоскость къ эллипсоиду; разстояніе ея отъ центра C окажется равнымъ:

$$E = \frac{1}{\Omega} \sqrt{\frac{2h}{M}}, \dots \dots \dots (780)$$

а направленіе ея—перпендикулярнымъ къ мгновенной оси. Слѣдовательно, величина угловой скорости обратно-пропорціональна длинѣ перпендикуляра, опущеннаго изъ центра C на касательную плоскость, проведенную къ гираціонному эллипсоиду въ точкѣ (ξ_1, η_1, ζ_1) .

Для полнаго рѣшенія вопроса остается произвести еще два интегрированія.

Помноживъ первое изъ Эйлеровыхъ уравненій (762, bis) на $(p : \mathfrak{A}_c)$, второе—на $(q : \mathfrak{B}_c)$, третье—на $(r : \mathfrak{C}_c)$ и сложивъ, получимъ:

$$\frac{1}{2} \frac{d\Omega^2}{dt} = - \frac{(\mathfrak{C}_c - \mathfrak{B}_c)(\mathfrak{B}_c - \mathfrak{A}_c)(\mathfrak{C}_c - \mathfrak{A}_c)}{\mathfrak{A}_c \mathfrak{B}_c \mathfrak{C}_c} pqr.$$

Рѣшивъ равенства (772), (773) и

$$p^2 + q^2 + r^2 = \Omega^2$$

относительно p^2 , q^2 , r^2 , найдемъ *):

$$p^2 = -a(\omega_1^2 - \Omega^2), \quad q^2 = b(\omega_2^2 - \Omega^2), \quad r^2 = -c(\omega_3^2 - \Omega^2), \quad (781)$$

гдѣ:

$$\begin{aligned} \omega_1^2 &= \frac{2h(\mathfrak{C} + \mathfrak{B}) - G^2}{\mathfrak{C}\mathfrak{B}}, & a &= \frac{\mathfrak{B}\mathfrak{C}}{(\mathfrak{B} - \mathfrak{A})(\mathfrak{C} - \mathfrak{A})}, \\ \omega_2^2 &= \frac{2h(\mathfrak{C} + \mathfrak{A}) - G^2}{\mathfrak{A}\mathfrak{C}}, & b &= \frac{\mathfrak{C}\mathfrak{A}}{(\mathfrak{C} - \mathfrak{B})(\mathfrak{B} - \mathfrak{A})}, \\ \omega_3^2 &= \frac{2h(\mathfrak{A} + \mathfrak{B}) - G^2}{\mathfrak{A}\mathfrak{B}}, & c &= \frac{\mathfrak{A}\mathfrak{B}}{(\mathfrak{C} - \mathfrak{B})(\mathfrak{C} - \mathfrak{A})}. \end{aligned}$$

*) Для краткости, не будемъ ставить значковъ с внизу буквъ \mathfrak{A} , \mathfrak{B} , \mathfrak{C} .

На основаніи неравенствъ:

$$2h\mathfrak{C} - G^2 > 0, \quad G^2 - 2h\mathfrak{A} > 0 \quad . \quad . \quad . \quad (782)$$

окажется, что ω_1^2 и ω_2^2 болѣе нуля и что ω_2^2 болѣе ω_1^2 и ω_3^2 ; если, кромѣ того, принять въ расчетъ, что $\mathfrak{A} + \mathfrak{B} > \mathfrak{C}$, то окажется, что и ω_3^2 болѣе нуля.

Разность между ω_1^2 и ω_3^2 выразится такъ:

$$(\omega_1^2 - \omega_3^2) \mathfrak{A} \mathfrak{B} \mathfrak{C} = (\mathfrak{C} - \mathfrak{A}) (G^2 - 2h\mathfrak{B});$$

отсюда видно, что

$$\omega_1^2 > \omega_3^2, \quad \text{если } G^2 - 2h\mathfrak{B} > 0, \quad \text{т.-е., если } D < \sqrt{\frac{m\sigma^4}{\mathfrak{B}}},$$

$$\omega_1^2 < \omega_3^2, \quad \text{если } G^2 - 2h\mathfrak{B} < 0, \quad \text{т.-е., если } D > \sqrt{\frac{m\sigma^4}{\mathfrak{B}}},$$

Послѣднее дифференціальное уравненіе, по подстановленіи въ него выраженій (781), приметъ слѣдующій видъ:

$$\frac{1}{2} \frac{d\Omega^2}{dt} = - \sqrt{(\omega_2^2 - \Omega^2)(\Omega^2 - \omega_1^2)(\Omega^2 - \omega_3^2)} \quad . \quad . \quad (783)$$

Такъ какъ производная отъ Ω^2 не можетъ имѣть мнимыхъ значеній, то Ω_2 не можетъ выходить изъ предѣловъ:

$$\omega_2^2 \text{ и } \omega_1^2, \quad \text{если } G^2 - 2h\mathfrak{B} > 0$$

$$\omega_2^2 \text{ и } \omega_3^2, \quad \text{если } G^2 - 2h\mathfrak{B} < 0.$$

Для интегрированія дифференціального уравненія (783) можно поступить такъ:

1) Если D менѣе длины средней главной полуоси эллипсоида инерціи ($G^2 > 2h\mathfrak{B}$), положимъ:

$$\Omega^2 = \omega_2^2 - (\omega_2^2 - \omega_1^2) \sin^2 \varphi;$$

дифференціальное уравненіе (783) получить слѣдующій видъ:

$$\frac{d\varphi}{dt} = \kappa \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi} \dots \dots \dots (784)$$

$$\kappa = \sqrt{\omega_2^2 - \omega_3^2} = \sqrt{\frac{(\mathfrak{E} - \mathfrak{B})(G^2 - 2h\mathfrak{A})}{\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}}} \dots \dots \dots (785)$$

$$k^2 = \frac{\omega_2^2 - \omega_1^2}{\omega_2^2 - \omega_3^2} = \frac{\mathfrak{B} - \mathfrak{A}}{\mathfrak{E} - \mathfrak{B}} \cdot \frac{2h\mathfrak{E} - G^2}{G^2 - 2h\mathfrak{A}} \dots \dots \dots (786)$$

Подобно тому, какъ было показано на стр. 209, условимся брать за начальное значеніе φ_0 уголъ, заключающійся въ предѣлахъ:

$$0 > \varphi_0 > -\frac{\pi}{2}, \text{ если } \left(\frac{d\Omega^2}{dt}\right)_0 > 0,$$

и

$$0 < \varphi_0 < \frac{\pi}{2}, \text{ если } \left(\frac{d\Omega^2}{dt}\right)_0 < 0,$$

причемъ квадратъ синуса φ_0 и начальное значеніе φ'_0 опредѣлятся изъ равенствъ:

$$\sin^2 \varphi_0 = \frac{\omega_2^2 - \Omega_0^2}{\omega_2^2 - \omega_1^2}, \quad \varphi'_0 = \frac{-\left(\frac{d\Omega^2}{dt}\right)_0}{2(\omega_2^2 - \omega_1^2) \sin \varphi_0 \cos \varphi_0};$$

въ такомъ случаѣ φ будетъ непрерывно возрастать во все время движенія.

Если означить черезъ u интеграль:

$$u = \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}}, \dots \dots \dots (787)$$

который на стр. 210 обозначенъ черезъ $F(\varphi, k)$, то законъ возрастанія u выразится такъ: $u = u_0 + \kappa t$, гдѣ $u_0 = F(\varphi_0, k)$.

Величина u (787) есть функція отъ φ и k ; обратно, φ есть функція отъ u и k , называемая *амплитудою* отъ u по модулю k ; ее обозначаютъ слѣдующимъ знакомъ: $\varphi = \text{am}(u, k)$ или проще: $\text{am} u$.

Слѣдовательно:

$$\varphi = \text{am}(\kappa t + u_0), \quad \Omega^2 = \omega_2^2 - (\omega_2^2 - \omega_1^2) \sin^2 \text{am}(\kappa t + u_0).$$

Функції:

$$\sin \varphi, \cos \varphi, \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}$$

називаються *синусом амплитуди* (u), *косинусом амплитуди* (u) и *дельтою амплитуди* (u); послѣдняя обозначается такъ: $\Delta \text{am} u$.

Изъ выраженій (781) слѣдуетъ:

$$\left. \begin{aligned} p &= kx \sqrt{a} \cos \text{am}(xt + u_0) \\ q &= kx \sqrt{b} \sin \text{am}(xt + u_0) \\ r &= x \sqrt{c} \Delta \text{am}(xt + u_0) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (788)$$

2) Если D болѣе длины средней главной полуоси центрального эллипсоида инерціи ($G^2 > 2h\mathfrak{B}$), положимъ:

$$\Omega^2 = \omega_2^2 - (\omega_2^2 - \omega_3^2) \sin^2 \varphi$$

$$x_1 = \sqrt{\omega_2^2 - \omega_1^2} = \sqrt{\frac{(\mathfrak{B} - \mathfrak{A})(2h\mathfrak{C} - G^2)}{\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}}}$$

$$k_1^2 = \frac{\omega_2^2 - \omega_3^2}{\omega_2^2 - \omega_1^2} = \frac{\mathfrak{C} - \mathfrak{B}}{\mathfrak{B} - \mathfrak{A}} \cdot \frac{G^2 - 2h\mathfrak{A}}{2h\mathfrak{C} - G^2},$$

получимъ тогда:

$$\left. \begin{aligned} p &= x_1 \sqrt{a} \Delta \text{am}(x_1 t + u_0) \\ q &= x_1 k_1 \sqrt{b} \sin \text{am}(x_1 t + u_0) \\ r &= x_1 k_1 \sqrt{c} \cos \text{am}(x_1 t + u_0) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (789)$$

3) Если D равно длинѣ средней главной полуоси центрального эллипсоида инерціи ($G^2 = 2h\mathfrak{B}$), то тогда $\omega_1^2 = \omega_3^2 = \frac{2h}{\mathfrak{B}}$, а дифференціальное уравненіе (783) приметъ такой видъ:

$$\frac{1}{2} \frac{d\Omega^2}{dt} = -(\Omega^2 - \omega_1^2) \sqrt{\omega_2^2 - \Omega^2};$$

замѣнивъ $(\omega_2^2 - \Omega^2)$ черезъ $(q^2 : b)$ и интегрируя, получимъ:

$$\left. \begin{aligned} q &= n\sqrt{b} \frac{e^{2(nt+\varepsilon)} - 1}{e^{2(nt+\varepsilon)} + 1} \\ \frac{p}{\sqrt{a}} &= \frac{r}{\sqrt{c}} = \frac{2ne^{nt+\varepsilon}}{e^{2(nt+\varepsilon)} + 1} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (790)$$

$$n = \sqrt{\omega_2^2 - \omega_1^2} = \sqrt{\frac{2h(\mathfrak{C} - \mathfrak{B})(\mathfrak{B} - \mathfrak{A})}{\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}}}; \quad n\sqrt{b} = \sqrt{\frac{2h}{\mathfrak{B}}}.$$

Примемъ направленіе главнаго момента количествъ движенія за ось $Z^{\text{овъ}}$.

Углы ϕ и ε опредѣлятся безъ интегрированія изъ слѣдующихъ равенствъ:

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{A}p &= G \cos(Z, \mathfrak{E}) = -G \sin \phi \cos \varepsilon, \\ \mathfrak{B}q &= G \cos(Z, \Upsilon) = G \sin \phi \sin \varepsilon, \\ \mathfrak{C}r &= G \cos(Z, \mathbf{Z}) = G \cos \phi \end{aligned} \right\} \dots \dots (791)$$

откуда:

$$\cos \phi = \frac{\mathfrak{C}r}{G} \dots \dots \dots (792)$$

$$\operatorname{tg} \varepsilon = -\frac{\mathfrak{B}q}{\mathfrak{A}p} \dots \dots \dots (793)$$

Для опредѣленія \mathfrak{K} придется произвести шестое и послѣднее интегрированіе.

Исключимъ ϕ' изъ равенствъ:

$$p = -\mathfrak{K}' \sin \phi \cos \varepsilon + \phi' \sin \varepsilon, \quad q = \mathfrak{K}' \sin \phi \sin \varepsilon + \phi' \cos \varepsilon,$$

получимъ:

$$\mathfrak{K}' \sin \phi = q \sin \varepsilon - p \cos \varepsilon = \frac{q \sin \varepsilon \sin \phi - p \cos \varepsilon \sin \phi}{\sin \phi},$$

или, на основаніи равенствъ (791):

$$\mathfrak{K}' = \frac{\mathfrak{B}q^2 + \mathfrak{A}p^2}{G^2 - \mathfrak{C}^2 r^2} G = \frac{2h - \mathfrak{C}r^2}{G^2 - \mathfrak{C}^2 r^2} G.$$

Отсюда:

$$\mathcal{M} = \Gamma + \frac{G}{\mathfrak{E}} t + (2h\mathfrak{E} - G^2) \frac{G}{\mathfrak{E}} \int \frac{dt}{G^2 - \mathfrak{E}^2 r^2}, \dots (794)$$

гдѣ r^2 должно быть замѣнено полученною выше функціею отъ t .

При $G^2 > 2h\mathfrak{B}$ уголъ \mathcal{M} выразится такъ:

$$\mathcal{M} = \Gamma + \frac{G}{\mathfrak{E}} t + G \frac{(\mathfrak{E} - \mathfrak{A})}{\mathfrak{E}\mathfrak{A}} \int \frac{dt}{1 + \mu^2 k^2 \sin^2 \text{am}(\pi t + u_0)},$$

$$\mathcal{M} = \mathcal{M}_0 + \frac{G}{\mathfrak{E}} t + \frac{G}{\pi} \frac{(\mathfrak{E} - \mathfrak{A})}{\mathfrak{E}\mathfrak{A}} \int_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{d\varphi}{(1 + \mu^2 k^2 \sin^2 \varphi) \Delta \varphi}, \dots (794, 1)$$

$$\mu^2 = \frac{\mathfrak{E}(G^2 - 2h\mathfrak{A})}{\mathfrak{A}(2h\mathfrak{E} - G^2)}; \quad \Delta \varphi = \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}.$$

При $G^2 < 2h\mathfrak{B}$ уголъ \mathcal{M} выразится такъ:

$$\mathcal{M} = \mathcal{M}_0 + \frac{G}{\mathfrak{E}} t + \frac{G}{\pi_1} \frac{(\mathfrak{E} - \mathfrak{A})}{\mathfrak{E}\mathfrak{A}} \int_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{d\varphi}{(1 + \mu_1^2 k_1^2 \sin^2 \varphi) \Delta \varphi}, \dots (794, 2)$$

$$\mu_1^2 = \frac{\mathfrak{E}(\mathfrak{B} - \mathfrak{A})}{\mathfrak{A}(\mathfrak{E} - \mathfrak{B})}; \quad \Delta \varphi = \sqrt{1 - k_1^2 \sin^2 \varphi}.$$

Слѣдовательно, въ тѣхъ и другихъ случаяхъ:

$$\mathcal{M} = \mathcal{M}_0 + \frac{G}{\mathfrak{E}} t + \psi,$$

гдѣ ψ выражается эллиптическимъ интеграломъ третьяго рода отъ φ , взятымъ въ предѣлахъ отъ φ_0 до φ .

При $G^2 = 2h\mathfrak{B}$ представимъ \mathcal{M}' такъ:

$$\mathcal{M}' = \frac{G}{\mathfrak{B}} + \frac{G}{\mathfrak{B}} \frac{\mathfrak{E}(\mathfrak{E} - \mathfrak{B})r^2}{2h\mathfrak{B} - \mathfrak{E}^2 r^2};$$

затѣмъ воспользуемся слѣдующими равенствами, которыя можно вывести изъ формулъ (790):

$$r^2 = c \left(n^2 - \frac{q^2}{b} \right), \quad \left(n^2 - \frac{q^2}{b} \right) dt = \frac{dq}{\sqrt{b}},$$

тогда получимъ:

$$d\kappa = \frac{G}{\mathfrak{B}} dt + \frac{\lambda dq}{1 + \lambda^2 q^2}; \quad \lambda^2 = \frac{\mathfrak{B} \mathfrak{C}(\mathfrak{B} - \mathfrak{A})}{2h \mathfrak{A}(\mathfrak{C} - \mathfrak{B})};$$

отсюда:

$$\kappa = \kappa_0 + t \sqrt{\frac{2h}{\mathfrak{B}}} + \operatorname{arctg} \left[\sqrt{\frac{\mathfrak{C}(\mathfrak{B} - \mathfrak{A})}{\mathfrak{A}(\mathfrak{C} - \mathfrak{B})}} \frac{e^{2(nt + \varepsilon)} - 1}{e^{2(nt + \varepsilon)} + 1} \right]. \quad (794, 3)$$

Для того, чтобы составить себѣ представленіе о различныхъ видахъ вращенія тѣла по инерціи, слѣдуетъ ближе ознакомиться съ видомъ полодій и эрполодій, соотвѣтствующихъ различнымъ разстояніямъ D .

Такъ какъ каждая полодія находится на поверхности центральнаго эллипсоида и касательныя къ нему плоскости, проведенныя черезъ точки ея, отстоятъ отъ центра эллипсоида на одномъ и томъ же разстояніи D , то уравненія ея суть:

$$\mathfrak{A}\xi^2 + \mathfrak{B}\eta^2 + \mathfrak{C}\zeta^2 = m\delta^4$$

$$\mathfrak{A}^2\xi^2 + \mathfrak{B}^2\eta^2 + \mathfrak{C}^2\zeta^2 = \frac{m^2\delta^8}{D^2}.$$

Эту же кривую можно разсматривать, какъ линію пересѣченія эллипсоида инерціи съ конической поверхностью, выражаемое слѣдующимъ уравненіемъ:

$$\mathfrak{A} \left(\mathfrak{A} - \frac{m\delta^4}{D^2} \right) \xi^2 + \mathfrak{B} \left(\mathfrak{B} - \frac{m\delta^4}{D^2} \right) \eta^2 + \mathfrak{C} \left(\mathfrak{C} - \frac{m\delta^4}{D^2} \right) \zeta^2 = 0. \quad (795)$$

Если центръ инерціи неподвиженъ, то эта коническая поверхность представляетъ собою подвижный аксоидъ мгновенныхъ осей (см. стр. 107) кинематической части.

Изъ грехъ коэффициентовъ этой конической поверхности второго порядка послѣдній — всегда положительный, а первый — всегда отрицательный, потому что:

$$\frac{m\delta^2}{\alpha} \geq D^2 \geq \frac{m\delta^2}{\beta},$$

коэффициентъ же у η^2 имѣетъ положительную величину тогда, когда D болѣе длины средней полуоси эллипсоида инерціи и онъ имѣетъ величину отрицательную тогда, когда D менѣе этой полуоси.

Слѣдовательно, если $G^2 < 2h\mathfrak{B}$, т.-е., D длиннѣе средней полуоси, то коническая поверхность (795) обхватываетъ ось Ξ , а потому пологія есть замкнутая кривая, окружающая собою нѣкоторую такую часть поверхности эллипсоида, которая заключаетъ въ себѣ конецъ его большой полуоси; такова, напримѣръ, пологія $e_1e_2e_3$ на чертежѣ 77-мъ.

Если $G^2 > 2h\mathfrak{B}$, т.-е. D короче средней полуоси, то коническая поверхность (795) обхватываетъ ось \mathbf{Z} , а пологія есть замкнутая кривая, окружающая собою конецъ малой полуоси на поверхности эллипсоида; такова, напримѣръ, пологія $i_1i_2i_3$.

Каждой пологіи, находящейся на одной половинѣ эллипсоида, соответствуетъ совершенно такая же другая кривая на другой половинѣ его; обѣ кривыя суть линіи пересѣченія поверхности эллипсоида одною и тою же коническою поверхностью.

При D , равномъ длинѣ средней полуоси, т.-е., при $G^2 = 2h\mathfrak{B}$, пологіями служатъ два эллипса $\beta h\beta' h'$ и $\beta, h\beta', h'$ (черт. 77), образуемые пересѣченіемъ поверхности эллипсоида плоскостями:

$$\xi = \pm \zeta \sqrt{\frac{\mathfrak{C}(\mathfrak{C} - \mathfrak{B})}{\mathfrak{A}(\mathfrak{B} - \mathfrak{A})}}.$$

При G^2 , равномъ $2h\mathfrak{A}$, пологіями служатъ концы большихъ главныхъ полуосей, а при G^2 , равномъ $2h\mathfrak{C}$, — концы малыхъ полуосей эллипсоида инерціи.

Эрполодіи суть плоскія кривыя, образуемыя пересѣченіемъ той плоскости, по которой эллипсоидъ катается, съ нѣкоторою коническою поверхностью.

Эта коническая поверхность образуется положеніями мгновенной оси въ пространствѣ, когда центръ инерціи вращающагося тѣла неподвиженъ.

Направленіе мгновенной оси въ пространствѣ можетъ быть выражено величинами угловъ ϑ и ψ , подразумѣвая подъ ϑ уголъ, составляемый направлениемъ угловой скорости Ω съ направлениемъ главнаго момента количества движенія тѣла (который предполагается параллельнымъ оси $Z^{\text{овъ}}$), а подъ ψ — уголъ, составляемый плоскостью, проведенною черезъ направление мгновенной оси $C\Omega$ и черезъ главный моментъ CZ' , съ плоскостью ZOX . Эти углы выражаются слѣдующимъ образомъ въ проэкціяхъ угловой скорости на неподвижныя оси координатъ:

$$\cotg \vartheta = \frac{R}{\sqrt{P^2 + Q^2}}, \quad \tg \psi = \frac{Q}{P}, \quad \dots \quad (796)$$

гдѣ

$$R = \frac{2h}{G} \quad (\text{см. (778)}) \quad \text{и} \quad P^2 + Q^2 = \Omega^2 - R^2.$$

Для того, чтобы составить уравненіе вышесказанной конической поверхности, слѣдуетъ выразить P и Q функціями времени t и затѣмъ исключить t изъ равенствъ (796).

Вмѣсто этого можно составить дифференціальное уравненіе конической поверхности или даже прямо дифференціальное уравненіе эрполодіи; проинтегрировавъ составленное уравненіе, должны будемъ получить уравненіе эрполодіи въ конечномъ видѣ.

Теперь будетъ выведено дифференціальное уравненіе эрполодіи, но оно будетъ здѣсь проинтегрировано только для случая $G^2 = 2h\mathfrak{B}$.

Прежде всего составимъ выраженіе для производной отъ ψ по t :

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{PQ' - QP'}{P^2 + Q^2} \dots \dots \dots (797)$$

Поансо нашелъ, что эта производная выражается простою функціею отъ $\cotg \vartheta$; для полученія этого выраженія, подвергнемъ вторую часть равенства (797) слѣдующимъ преобразованіямъ.

Выразивъ P и Q по формуламъ (118), а P' и Q' по формуламъ (132) кинематической части, и совершивъ надлежащія преобразованія, найдемъ:

$$PQ' - QP' = (qr' - rq')\lambda_s + (rp' - pr')\mu_s + (pq' - qp')\nu_s,$$

а если замѣнимъ производныя p' , q' , r' выраженіями ихъ въ p , q , r , получаемыми изъ дифференціальныхъ уравненій (762, bis), то найдемъ:

$$PQ' - QP' = G \frac{\mathfrak{C}^2 \gamma r \nu_s + \mathfrak{B}^2 \beta q \mu_s - \mathfrak{A}^2 \alpha p \lambda_s}{\mathfrak{A} \mathfrak{B} \mathfrak{C}}, \dots (797, \text{bis})$$

подразумѣвая подъ α , β и γ слѣдующія выраженія:

$$\alpha = \frac{G}{\mathfrak{A}} - \frac{2h}{G}, \quad \beta = \frac{2h}{G} - \frac{G}{\mathfrak{B}}, \quad \gamma = \frac{2h}{G} - \frac{G}{\mathfrak{C}} \dots (798)$$

Помощью этихъ величинъ α , β и γ могутъ быть выражены величины ω_1^2 , ω_2^2 , ω_3^2 , именно:

$$\omega_1^2 - R^2 = \frac{2h(\mathfrak{B} + \mathfrak{C}) - G^2}{\mathfrak{B} \mathfrak{C}} - \frac{4h^2}{G^2} = -\beta\gamma,$$

$$\omega_1^2 = R^2 - \beta\gamma, \quad \omega_2^2 = R^2 + \alpha\gamma, \quad \omega_3^2 = R^2 + \alpha\beta \dots (799)$$

Выразивъ, въ (797, bis), косинусы λ_s , μ_s , ν_s въ p , q , r по формуламъ (791), замѣнивъ p^2 , q^2 , r^2 выраженіями (781), а ω_1^2 , ω_2^2 , ω_3^2 — выраженіями (799), и принявъ во вниманіе слѣдующія тождества:

$$\mathfrak{A}(\mathfrak{C} - \mathfrak{B}) - \mathfrak{B}(\mathfrak{C} - \mathfrak{A}) + \mathfrak{C}(\mathfrak{B} - \mathfrak{A}) = 0,$$

$$\frac{\mathfrak{A}^2(\mathfrak{C} - \mathfrak{B}) - \mathfrak{B}^2(\mathfrak{C} - \mathfrak{A}) + \mathfrak{C}^2(\mathfrak{B} - \mathfrak{A})}{(\mathfrak{C} - \mathfrak{B})(\mathfrak{C} - \mathfrak{A})(\mathfrak{B} - \mathfrak{A})} = 1,$$

получимъ:

$$PQ' - QP' = R(\Omega^2 - R^2) - \alpha\beta\gamma,$$

а потому:

$$\frac{d\psi}{dt} = R - \frac{\alpha\beta\gamma}{R^2} \cotg^2 \vartheta \dots (800)$$

Такова формула, найденная Поансо.

Вмѣсто $\cotg \vartheta$ можно ввести въ эту формулу величину радіуса вектора r эрполодіи, проведеннаго изъ точки пересѣченія плоскости кривой направленіемъ главнаго момента количествъ движенія. Такъ какъ радіусъ векторъ r и разстояніе D суть катеты прямоугольнаго треугольника, имѣющаго гипотенузою радіусъ векторъ эллипсоида инерціи, направленный вдоль по мгновенной оси, то:

$$r = D \tg \vartheta = \varepsilon R \tg \vartheta = \varepsilon \sqrt{\Omega^2 - R^2}; \quad \varepsilon^2 = \frac{m d^2}{2h}$$

а потому формула (800) получить слѣдующій видъ:

$$\frac{d\psi}{dt} = R - \frac{\alpha\beta\gamma}{r^2} \varepsilon^2 \dots \dots \dots (800, A)$$

Производную отъ r по t можемъ выразить слѣдующимъ образомъ:

$$\frac{dr}{dt} = \frac{\varepsilon^2}{r} \frac{1}{2} \frac{d\Omega^2}{dt} = - \frac{\varepsilon^2}{r} \sqrt{(\omega_2^2 - \Omega^2)(\Omega^2 - \omega_1^2)(\Omega^2 - \omega_3^2)},$$

$$\frac{dr}{dt} = - \frac{1}{\varepsilon r} \sqrt{(\varepsilon^2 \alpha \gamma - r^2)(r^2 + \varepsilon^2 \beta \gamma)(r^2 - \varepsilon^2 \alpha \beta)} \dots \dots (801, A)$$

Изъ уравненій (800, A) и (801, A) получимъ слѣдующее дифференціальное уравненіе эрполодій:

$$\frac{dr}{d\psi} = - \frac{r \sqrt{(\varepsilon^2 \alpha \gamma - r^2)(r^2 + \varepsilon^2 \beta \gamma)(r^2 - \varepsilon^2 \alpha \beta)}}{\varepsilon(Rr^2 - \varepsilon^2 \alpha \beta \gamma)} \dots \dots (802, A)$$

Въ томъ случаѣ, когда $G^2 = 2h\mathfrak{B}$, т.-е. $\beta = 0$, это уравненіе получить слѣдующій видъ:

$$- \frac{dr}{r \sqrt{\varepsilon^2 \alpha \gamma - r^2}} = \frac{d\psi}{\varepsilon R};$$

интегрируя, получимъ уравненіе кривой линіи:

$$\frac{\varepsilon \kappa R}{r} = \frac{e^{\kappa(\psi+c)} + e^{-\kappa(\psi+c)}}{2} \dots \dots \dots (803)$$

$$\kappa = \frac{n}{R} = \frac{\sqrt{\alpha \gamma}}{R} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{2h(\mathfrak{B}-\mathfrak{A})(\mathfrak{C}-\mathfrak{B})}{\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}}},$$

гдѣ c есть произвольная постоянная.

Кривая, выражаемая уравненіемъ (803), изображена на черт. 78-мъ. Она имѣетъ видъ двойной спирали, обѣ половины которой асимптотически завиваются вокругъ точки K (r приближается къ нулю при приближеніи ψ къ $+\infty$ и къ $-\infty$); при $\psi = -c$ радіусъ векторъ кривой имѣетъ наибольшую величину. Линія MKN , на которой находятся точки пересѣченія обѣихъ половинъ кривой, есть ось симметріи ея.

При помощи полученныхъ выше дифференціальныхъ уравненій можно составить себѣ понятіе о нѣкоторыхъ свойствахъ прочихъ эрполодій; начнемъ съ кривыхъ, соотвѣтствующихъ разстояніямъ D , меньшимъ длины средней полуоси эллипсоида инерціи.

Въ этихъ случаяхъ $2h\mathfrak{B} < G^2$, то есть $\beta < 0$; означимъ положительную величину $(-\beta)$ черезъ β_1 :

$$\beta_1 = -\beta = \frac{G}{\mathfrak{B}} - \frac{2h}{G} = \frac{G}{\mathfrak{B}} - R;$$

тогда дифференціальныя уравненія (800, А) и (801, А) получаютъ слѣдующій видъ:

$$\frac{d\psi}{dt} = R + \frac{\alpha\beta_1\gamma}{r^2} \varepsilon^2 \dots \dots \dots (800, В)$$

$$\frac{dr}{dt} = -\frac{1}{\varepsilon r} \sqrt{(\varepsilon^2\alpha\gamma - r^2)(r^2 - \varepsilon^2\beta_1\gamma)(r^2 + \varepsilon^2\alpha\beta_1)} \dots \dots (801, В)$$

Изъ послѣдняго уравненія видно, что вся кривая заключается между двумя концентрическими окружностями, имѣющими слѣдующіе радіусы:

$$r_1 = \varepsilon\sqrt{\alpha\gamma}, \quad r_2 = \varepsilon\sqrt{\beta_1\gamma}$$

и что она прикасается, поочередно, то къ наружной окружности радіуса r_1 , то ко внутренней—радіуса r_2 . Изъ дифференціального уравненія (800, В) видно, что при $r = r_1$ угловая скорость радіуса вектора r имѣетъ наименьшую величину $(R + \beta_1)$, т.-е. $(G : \mathfrak{B})$, а при $r = r_2$ — наибольшую величину $(R = \alpha)$, т.-е. $(G : \mathfrak{A})$. На чертежахъ 79-мъ, 80-мъ и 81-мъ изображены нѣкоторыя изъ замкнутыхъ эрполодій этого вида.

Въ тѣхъ случаяхъ, когда разстояніе D болѣе средней полуоси эллипсоида инерціи, величина β болѣе нуля, такъ какъ $2h\mathfrak{B} > G^2$.

Изъ дифференціального уравненія (801, А) видно, что при положительномъ β эрполодія заключается между двумя концентрическими окружностями, имѣющими слѣдующіе радіусы:

$$r_1 = \varepsilon\sqrt{\alpha\gamma}, \quad r_2 = \varepsilon\sqrt{\alpha\beta}$$

и что она прикасается къ нимъ поочередно. Изъ дифференціального уравненія (800, А) видно, что угловая скорость радіуса вектора r имѣетъ наибольшую величину $(R - \beta) = (G : \mathfrak{B})$ при наибольшей величинѣ ($r = r_1$) и наименьшую величину $(R - \gamma) = (G : \mathfrak{C})$ при наименьшей величинѣ ($r = r_2$) радіуса вектора. Примѣры эрполодій этого рода см. на чертежахъ: 86, 87, 88 и 89.

При $G^2 = 2h\mathfrak{A}$ эрполодіею служитъ точка K , въ которой плоскость прикасается къ концу большой полуоси эллипсоида; при

$G^2 = 2hC$ эрполодією служить точка прикосновенія плоскости въ концу малой полуоси эллипсоида.

§ 121. Различіе между главными осями инерціи по отношенію къ устойчивости вращенія.

Вращеніе твердаго тѣла по инерціи можетъ совершаться съ постоянною угловою скоростью только вокругъ одной изъ главныхъ осей инерціи; въ самомъ дѣлѣ, изъ дифференціального уравненія (783) видно, что Ω^2 можетъ быть равно постоянной величинѣ только при условіи, чтобы оно равнялось одной изъ трехъ величинъ: ω_1^2 , ω_2^2 , ω_3^2 ; а изъ выраженій (781) слѣдуетъ, что тогда равна нулю одна изъ величинъ p , q или r . Положимъ, что $\Omega^2 = \omega_1^2$, такъ что $p = 0$; если взглянемъ на первое изъ дифференціальныхъ уравненій (762, bis), то увидимъ, что p не можетъ быть постоянно равнымъ нулю безъ того, чтобы не была равною нулю одна изъ двухъ другихъ проэкцій угловой скорости: q или r .

Подобнымъ образомъ убѣдимся, что Ω можетъ быть постоянною величиною только въ слѣдующихъ трехъ случаяхъ:

- 1) если постоянно $p = 0$ и $q = 0$,
- 2) если постоянно $r = 0$ и $p = 0$,
- 3) если постоянно $q = 0$ и $r = 0$;

въ первомъ случаѣ тѣло вращается вокругъ малой оси эллипсоида инерціи, во второмъ — вокругъ средней, въ третьемъ — вокругъ большей.

Въ этихъ случаяхъ ось вращенія сохраняетъ не только неизмѣнное положеніе въ твердомъ тѣлѣ, но и кромѣ того постоянное направленіе въ пространствѣ, въ чемъ нетрудно убѣдиться при помощи имѣющихся формулъ.

Напримѣръ, если $p = 0$ и $r = 0$, то изъ формулъ (791) видно, что $\phi = \frac{\pi}{2}$ и $\varepsilon = \frac{\pi}{2}$ или $-\frac{3\pi}{2}$, а тогда изъ формулъ (107) и (108) кинематической части (стр. 94—95) заключимъ, что:

$$P = 0, \quad Q = 0,$$

слѣдовательно, угловая скорость постоянно совпадаетъ съ осью Z^{021} .

Изъ этого слѣдуетъ, что свободное твердое тѣло можетъ вращаться по инерціи равномерно только вокругъ своихъ главныхъ осей инерціи; при такомъ вращеніи та ось, вокругъ которой вращеніе происходитъ, сохраняетъ постоянное направление въ пространство.

Для того, чтобы тѣло вращалось вокругъ которой-либо изъ главныхъ осей инерціи, необходимо, чтобы начальная угловая скорость была направлена по этой оси.

Совпадаетъ ли начальная угловая скорость съ одною изъ главныхъ осей инерціи, или нѣтъ, во всякомъ случаѣ, для полного опредѣленія вращательнаго движенія твердаго тѣла необходимо знать начальные положенія главныхъ осей инерціи въ пространствѣ, начальное направленіе угловой скорости и начальную величину ея, т.-е., начальные значенія угловъ ϕ , ψ , θ и проэкцій P , Q , R угловой скорости на направленія неподвижныхъ осей координатъ. По этимъ начальнымъ даннымъ и по формуламъ (47) — (54) кинематической части опредѣлимъ начальные значенія косинусовъ λ_x , λ_y , λ_z , μ_x , μ_y , μ_z , ν_x , ν_y , ν_z , а затѣмъ, по формуламъ (116) кинематической части, — начальные значенія p_0 , q_0 , r_0 проэкцій угловой скорости на направленія осей E , Y , Z ; далѣе, по формуламъ (772) (стр. 550) и (761) (стр. 544), опредѣлимъ величину G главного момента количества движенія тѣла (вокругъ центра инерціи) и начальное направленіе его относительно осей E , Y , Z , а по формуламъ (659) стр. (472) опредѣлимъ направленіе его въ пространствѣ. Это направленіе возьмемъ за ось $Z^{овъ}$, а два другія направленія, перпендикулярныя къ нему и между собою — за оси $X^{овъ}$ и $Y^{овъ}$. Величину живой силы вращательнаго движенія тѣла вокругъ центра инерціи опредѣлимъ по формулѣ (773).

Имѣя численные значенія величинъ G и $2h$, опредѣлимъ величину отношенія ($G^2 : 2h$); сравнивъ ее съ величинами главныхъ центральныхъ моментовъ инерціи даннаго твердаго тѣла, встрѣтимся съ однимъ изъ слѣдующихъ случаевъ:

$$1) \frac{2h}{G^2} = \mathfrak{C}_c, \quad 2) \mathfrak{C}_c > \frac{G^2}{2h} > \mathfrak{B}_c, \quad 3) \frac{G^2}{2h} = \mathfrak{B}_c,$$

$$4) \mathfrak{B}_c > \frac{G^2}{2h} > \mathfrak{A}_c, \quad 5) \frac{G^2}{2h} = \mathfrak{A}_c.$$

1) Если $G^2 = 2h\mathfrak{C}_c$, то формула (786) (стр. 556) дастъ $k = 0$, а

потому формулы (787), (788), (792) дадутъ $\varphi = u = xt$, $p = 0$, $q = 0$, $r = x\sqrt{c}$, $\phi = 0$; очевидно, это есть случай вращенія тѣла вокругъ малой оси центрального эллипсоида.

2) Если G^2 не равно $2h\mathfrak{C}_c$, но болѣе $2h\mathfrak{B}_c$, то законъ вращенія выражается формулами (784) — (788), (792), (793) и (794, 1); постоянная u_0 и знаки корней \sqrt{a} , \sqrt{b} , \sqrt{c} должны быть опредѣлены по величинамъ и знакамъ начальныхъ: p_0 , q_0 , r_0 .

3) Если $G^2 = 2h\mathfrak{B}_c$, то законъ вращенія выражается формулами (790), (792), (793) и (794, 3); изъ формулъ (790) видно, что при возрастаніи t до безконечности величины p и r приближаются къ нулю, а q — къ $\pm n\sqrt{b}$, то-есть, къ

$$\pm \sqrt{\frac{2h}{\mathfrak{B}_c}},$$

поэтому мгновенная ось асимптотически приближается къ совпаденію съ положительною или съ отрицательною осью Υ .

Мы будемъ подразумѣвать подъ n положительно взятую величину корня:

$$n = + \sqrt{\frac{2h (\mathfrak{C}_c - \mathfrak{B}_c)(\mathfrak{B}_c - \mathfrak{A}_c)}{\mathfrak{B}_c \mathfrak{A}_c \mathfrak{C}_c}};$$

тогда знаки корней \sqrt{a} и \sqrt{c} опредѣлятся по знакамъ начальныхъ величинъ p_0 и r_0 , какъ это видно изъ равенствъ:

$$\frac{p_0}{\sqrt{a}} = \frac{r_0}{\sqrt{c}} = \frac{2n}{e^\varepsilon + e^{-\varepsilon}} \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot (804)$$

(Эти равенства, а также и слѣдующее:

$$q_0 = n\sqrt{b} \frac{e^{2\varepsilon} - 1}{e^{2\varepsilon} + 1} \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot (805)$$

получаются изъ формулъ (790) при ($t = 0$)).

Изъ равенствъ (804) слѣдуетъ, что знакъ корня \sqrt{a} долженъ быть одинаковъ со знакомъ величины p_0 и знакъ корня \sqrt{c} — одинаковъ со знакомъ величинъ r_0 ; знаки величинъ p и r остаются неизмѣнными во все время движенія.

Мы условились считать n положительнымъ; въ силу этого условія изъ выраженія для q ((790), стр. 558) слѣдуетъ, что при возрастаніи t

до бесконечности q приближается к $n\sqrt{b}$; с другой стороны из дифференциального уравнения:

$$\frac{dq}{dt} = \frac{\mathfrak{G}_e - u_e}{\mathfrak{B}_e} r p$$

и из того обстоятельства, что знаки величин r, p не могут измениться при движении, слѣдуетъ, что q либо непрерывно возрастаетъ, либо убываетъ во все время движени; а именно, q непрерывно возрастаетъ, если начальныя значенія p_0 и r_0 оба положительны или оба отрицательны; если же одно изъ нихъ положительное, а другое отрицательное, то q непрерывно убываетъ. Отсюда мы должны заключить, что корень \sqrt{b} долженъ быть взятъ съ плюсомъ, если $p_0 > 0$ и $r_0 > 0$ или если $p_0 < 0$ и $r_0 < 0$ и, обратно, корень \sqrt{b} долженъ быть взятъ съ минусомъ, если $p_0 > 0$ и $r_0 < 0$ или если $p_0 < 0$ и $r_0 > 0$; въ первыхъ случаяхъ угловая скорость непрерывно приближается къ совпадению съ положительною осью Y , во вторыхъ — къ совпадению съ отрицательною осью Y .

Придавъ корню \sqrt{b} подлежащій знакъ, опредѣлимъ e^e изъ равенства (805).

Изъ сказаннаго слѣдуетъ, что, при рассматриваемыхъ нами здѣсь случаяхъ вращенія гѣла, точка пересѣченія мгновенной оси съ поверхностью эллипсоида перемѣщается по направлению (см. чертежъ 82-й) стрѣлки s_1 , если начальное положеніе ея было на полуэллипсѣ b, b , стрѣлки s_1, h_1, h_2 указываютъ направленія перемѣщеній ея въ тѣхъ случаяхъ, когда начальныя положенія ея находятся на прочихъ полуэллипсахъ. Во всякомъ случаѣ эта точка на эллипсоидѣ приближается асимптотически къ точкѣ b или b' , а на эриплоидѣ она движется по спирали (черт. 78) къ одной сторонѣ, не измѣняя направленія движенія по кривой, приближаясь асимптотически къ точкѣ K .

Если въ начальный моментъ $p_0 = 0$ и $r_0 = 0$, то изъ равенствъ (814) слѣдуетъ, что тогда e^e равно ∞ , а потому тогда $q = n\sqrt{b} = q_0$; это — случай вращенія гѣла вокругъ средней оси эллипсоида инерціи.

4) Если G^2 меньше $2h\mathfrak{B}_e$, то вращеніе гѣла выражается формулами (789), (792), (793), (794, 2). Знаки корней $\sqrt{a}, \sqrt{b}, \sqrt{c}$ и величина постоянной u_0 должны быть опредѣлены по начальнымъ: p_0, q_0, r_0 .

5) Если $G^2 = 2h\mathfrak{B}_e$, то $k_1 = 0$, а потому формулы (789) дадутъ $p = \pm\sqrt{a}, q = 0, r = 0$; это случай вращенія гвердаго гѣла вокругъ болѣе тонкой оси эллипсоида инерціи.

Главные оси наибольшего и наименьшего момента инерціи называются *осями устойчиваго вращенія*, а главная ось среднего момента инерціи называется *осью неустойчиваго вращенія*; сей-часъ будетъ объяснено, почему онѣ могутъ быть такъ названы.

Если тѣло вращается вокругъ меньшей оси Cc (черт. 82) эллипсоида инерціи и какая-либо причина отклонить угловую скорость отъ этого направленія на весьма малый уголъ, а затѣмъ тѣлу будетъ снова предоставлено вращаться по инерціи, то отклоненіе угловой скорости отъ оси Cc и при дальнѣйшемъ движеніи не превыситъ нѣкотораго весьма малаго предѣла, такъ какъ пологія, описываемая точкою пересѣченія мгновенной оси съ поверхностью эллипсоида, будетъ замкнутая кривая fff , окружающая точку c весьма тѣсно со всѣхъ сторонъ.

То же самое можно сказать и относительно вращенія вокругъ большей оси Ca эллипсоида инерціи; если какая либо причина отклонить точку пересѣченія эллипсоида мгновенною осью изъ a въ g_1 , то при дальнѣйшемъ движеніи эта точка будетъ описывать пологію g_1gg_2 ; если уголъ aCg_1 весьма малъ, то отклоненіе угловой скорости отъ оси Ca будетъ весьма малымъ и во всякій моментъ движенія, потому что всѣ точки пологіи g_1gg_2 почти столь же близки къ точкѣ a , какъ и точка g_1 .

Слѣдовательно, если тѣло вращается вокругъ большей или меньшей оси эллипсоида инерціи, и если ему будетъ сообщенъ слабый толчекъ, вслѣдствіе котораго угловая скорость отклонится отъ оси на весьма малый уголъ, то угловая скорость не будетъ совпадать съ осью и потомъ, но будетъ описывать около нея нѣкоторую коническую поверхность съ весьма острымъ угломъ при вершинѣ. Если толчекъ очень слабъ, то отклоненія угловой скорости отъ оси инерціи столь ничтожны, что вращеніе тѣла почти не отличается отъ вращенія вокругъ оси инерціи.

Поэтому и можно сказать, что вращенія твердаго тѣла вокругъ крайнихъ осей инерціи имѣютъ устойчивый характеръ. Слѣдуетъ при этомъ замѣтить, что такая устойчивость имѣетъ мѣсто, въ какую бы сторону ни было направлено отклоненіе угловой скорости, происходящее вслѣдствіе толчка.

Если вращение происходило вокруг средней оси Cb , то действие весьма малого толчка может повлечь за собою различные измѣненія движенія тѣла, въ зависимости отъ того, по какому направленію будетъ отклоненъ изъ точки b конецъ мгновенной оси. Если толчекъ перенесъ этотъ конецъ изъ b въ s_1 или въ s_2 (см. черт. 82), то при дальнѣйшемъ движеніи конецъ мгновенной оси будетъ приближаться къ точкѣ b ; слѣдовательно, отклоненіе угловой скорости по одному изъ этихъ двухъ направленій влечетъ за собою постепенное, хотя и весьма медленное, возвращеніе ея къ оси Cb . Напротивъ, отклоненіе конца мгновенной оси изъ точки b въ h_1 или h_2 влечетъ за собою дальнѣйшее удаленіе его отъ b ; если же толчекъ отклонилъ конецъ мгновенной оси изъ b въ k_1, k_2, n_1 или въ n_2 , то дальнѣйшее перемѣщеніе этого конца совершается по полдіамъ, изображеннымъ на чертежѣ; при этомъ отклоненіе угловой скорости отъ оси Cb въ концѣ концовъ дѣлается весьма замѣтнымъ и вращеніе тѣла теряетъ всякое сходство съ вращеніемъ вокругъ оси Cb .

Слѣдовательно, вращеніе вокругъ оси Cb имѣетъ устойчивый характеръ только тогда, когда угловая скорость, отклоняясь отъ оси Cb , остается въ плоскости $\beta\beta'$, при отклоненіяхъ же по всякимъ остальнымъ направленіямъ вращеніе оказывается неустойчивымъ; по этой причинѣ средняя ось инерціи и называется осью неустойчиваго вращенія.

§ 122. Вращательное движеніе по инерціи такого твердаго тѣла, центральнѣй эллипсоидъ котораго есть эллипсоидъ вращенія или шаръ.

Если $B_c = A_c$, т.-е., эллипсоидъ инерціи есть эллипсоидъ вращенія, то вращательное движеніе по инерціи получаетъ болѣе простой видъ, потому что какъ полюди, такъ и эриподіи будутъ кругами, слѣдовательно, уголъ ϕ , составляемый осью Z съ направленіемъ главнаго момента количества движенія, будетъ сохранять постоянную величину, а поэтому и проэкція главнаго момента на направленіе Z будетъ постоянна; но такъ какъ:

$$G_z = C \cos \phi,$$

то отсюда слѣдуетъ, что

$$r = \frac{G \cos \phi}{G_c}$$

имѣетъ величину постоянную, слѣдовательно, вращеніе тѣла вокругъ оси **CZ** совершается равномерно, а потому и плоскость **ZCG** (черт. 83 и 84) вращается вокругъ линіи **CG** равномерно.

Но эллипсоидъ инерціи можетъ быть удлинненнымъ или сжатымъ; въ первомъ случаѣ угловая скорость Ω заключается внутри угла **GCZ** (черт. 83), во второмъ—вне (черт. 84); въ первомъ случаѣ подвижный аксоидъ, образуемый положеніями мгновенной оси внутри тѣла, будетъ вне аксоида неподвижнаго, образуемаго положеніями мгновенной оси въ пространствѣ; во второмъ случаѣ подвижный аксоидъ обнимаетъ собою аксоидъ неподвижный, какъ изображено на чертежѣ (84); этотъ наружный конусъ катится безъ скольженія по внутреннему неподвижному конусу.

Если начальная угловая скорость направлена по оси **Z** или по одной изъ экваторіальныхъ осей эллипсоида инерціи, то ось вращенія сохраняетъ неизмѣнное положеніе, какъ въ тѣлѣ, такъ и въ пространствѣ.

Ось **Z** есть устойчивая ось вращенія, а каждая экваторіальная ось—неустойчивая; послѣднее видно изъ слѣдующаго: если осью вращенія служила какая-либо экваторіальная ось **Ca** (черт. 85) и какая-либо причина перенесла конецъ мгновенной оси въ точку α , то при дальнѣйшемъ движеніи этотъ конецъ будетъ перемѣщаться по пологіи $\alpha\alpha_1$, отклоненіе угловой скорости отъ оси **Ca** дѣлается весьма замѣтнымъ и вращеніе тѣла теряетъ всякое сходство съ вращеніемъ вокругъ оси **Ca**.

Если эллипсоидъ инерціи—шаръ, то всякая ось есть ось инерціи; вращеніе такого тѣла по инерціи совершается съ постоянною угловою скоростью вокругъ всякой центральной оси, причемъ эта ось сохраняетъ неизмѣнное положеніе въ тѣлѣ и неизмѣнное направленіе въ пространствѣ.

§ 123. **Примѣры силъ, при дѣйствіи которыхъ свободное твердое тѣло вращается по инерціи вокругъ своего центра инерціи.**

Если къ свободному твердому тѣлу не приложено никакихъ вѣшнихъ силъ, то его центръ инерціи движется прямолинейно и равномерно, а самое тѣло вращается вокругъ своего центра по законамъ, приведеннымъ въ предыдущихъ параграфахъ; полное движеніе, совершаемое при этомъ твердымъ тѣломъ, называется движеніемъ его по инерціи.

Примѣръ 99-й. Свободное твердое тѣло подвержено только силѣ тяжести, такъ что къ каждому элементу объема тѣла приложена сила, направленная по оси Y^{oxy} , и равная $gdx dy dz$, гдѣ ρ есть плотность вещества тѣла въ этомъ элементѣ.

Въ этомъ случаѣ проекціи на оси координатъ главнаго вектора силъ, приложенныхъ къ тѣлу, будутъ:

$$B_z = 0, \quad B_y = g \int \int \int \rho dx dy dz = gM, \quad B_x = 0,$$

гдѣ интегрированіе распространено на весь объемъ твердаго тѣла, а M означаетъ массу тѣла.

Проекціи на оси координатъ главнаго момента этихъ силъ вокругъ центра инерціи будутъ равны нулю; въ самомъ дѣлѣ, такъ какъ здѣсь $X_i = 0$, $Y_i = g \int \int \int \rho x dx dy dz$, $Z_i = 0$, то:

$$(L_i)_x = -g \int \int \int \rho (z - z_i) dO = -g \int \int \int \rho z dO + g z_i M = 0$$

$$(L_i)_y = 0, \quad (L_i)_z = g \int \int \int \rho x dO - g x_i M = 0.$$

Поэтому центръ инерціи твердаго тѣла будетъ двигаться какъ глжсая материальная точка массы M (см. стр. 81):

$$x_c = \alpha t, \quad y_c = \frac{gt^2}{2} + \beta t, \quad z_c = 0,$$

а тѣло будетъ вращаться вокругъ своего центра по инерціи.

Примѣръ 100-й. Всѣ элементы свободнаго твердаго тѣла притягиваются къ началу координатъ; силы притяженія пропорціональны массамъ элементовъ и ихъ разстоянїямъ отъ начала координатъ.

Въ этомъ случаѣ проэкція на оси координатъ силы, приложенной къ элементу тѣла, суть:

$$X_i = -\mu x_i dO, \quad Y_i = -\mu y_i dO, \quad Z_i = -\mu z_i dO,$$

слѣдовательно, проэкція главнаго вектора равны:

$$B_x = -\mu \int \int \int x dO = -\mu M x_c,$$

$$B_y = -\mu M y_c, \quad B_z = -\mu M z_c,$$

а проэкція главнаго момента силъ вокругъ центра инерціи равны нулю; напримѣръ:

$$\begin{aligned} (L_c)_x &= -\mu \int \int \int ((y - y_c)z - (z - z_c)y) dO = \\ &= \mu (y_c \int \int \int z dO - z_c \int \int \int y dO) = 0. \end{aligned}$$

Поэтому, при дѣйствіи этихъ силъ, центръ инерціи тѣла будетъ двигаться какъ свободная матерьяльная точка массы M , притягиваемая къ началу координатъ силою: $\mu M r$, а самое тѣло вращается вокругъ этого центра по инерціи.

§ 124. Главный векторъ и главный моментъ силъ, приложенныхъ къ твердому тѣлу и имѣющихъ потенціалъ.

Положимъ, что къ матерьяльнымъ точкамъ m_1, m_2, \dots, m_n , образующимъ одну неизмѣняемую систему, приложены внѣшнія силы, имѣющія потенціалы, такъ, что къ точкѣ m_1 приложена сила, имѣющая потенціалъ $V_1(x_1, y_1, z_1)$, къ точкѣ m_2 — сила, имѣющая потенціалъ $V_2(x_2, y_2, z_2)$, и т. д.; V_1 есть какая-либо функція отъ абсолютныхъ координатъ точки m_1 , V_2 — какая-либо функція отъ координатъ точки m_2 , и т. д.

тсе, какъ

мы по фор-
ратится въ
ф, ж, э,
равствѣ.

и получить
иныхъ силъ
да оси $X^{\text{пол}}$
часъ дока-
величины
оси $X^{\text{пол}}$,
выражаютъ.
(см. стр.

мало, что

(806)

в.

Дифференциальное уравнение вращения

$$M: J \frac{d\omega}{dt}$$

применено подало при $T: \cos \theta$, или подало $T \cos \theta$ при $\theta = 0$.
Въ $\theta = 0$ имеем $\cos \theta = 1$ и $\sin \theta = 0$.
Въ $\theta = 90^\circ$ имеем $\cos \theta = 0$ и $\sin \theta = 1$.

$$M: J \frac{d\omega}{dt} + \frac{1}{2} \frac{dT}{dt} \cdot \omega^2$$

Примѣръ 100-й. Всѣ элементы свободнаго твердаго тѣла притягиваются къ началу координатъ; силы притяженія пропорціональны массамъ элементовъ и ихъ разстоянїямъ отъ начала координатъ.

Въ этомъ случаѣ проэкціи на оси координатъ силы, приложенной къ элементу тѣла, суть:

$$X_i = -\mu x_i dO, \quad Y_i = -\mu y_i dO, \quad Z_i = -\mu z_i dO,$$

слѣдовательно, проэкціи главнаго вектора равны:

$$B_x = -\mu \int \int \int x dO = -\mu M x_c,$$

$$B_y = -\mu M y_c, \quad B_z = -\mu M z_c,$$

а проэкціи главнаго момента силъ вокругъ центра инерціи равны нулю; напримѣръ:

$$\begin{aligned} (M_c)_x &= -\mu \int \int \int x((y - y_c)z - (z - z_c)y) dO = \\ &= \mu(y_c \int \int \int z dO - z_c \int \int \int y dO) = 0. \end{aligned}$$

Поэтому, при дѣйствіи этихъ силъ, центръ инерціи тѣла будетъ двигаться какъ свободная матерьяльная точка массы M , притягиваемая къ началу координатъ силою: $\mu M r$, а самое тѣло вращается вокругъ этого центра по инерціи.

§ 124. Главный векторъ и главный моментъ силъ, приложенныхъ къ твердому тѣлу и имѣющихъ потенціалъ.

Положимъ, что къ матерьяльнымъ точкамъ m_1, m_2, \dots, m_n , образующимъ одну неизмѣняемую систему, приложены внѣшнія силы, имѣющія потенціалы, такъ, что къ точкѣ m_1 приложена сила, имѣющая потенціалъ $V_1(x_1, y_1, z_1)$, къ точкѣ m_2 — сила, имѣющая потенціалъ $V_2(x_2, y_2, z_2)$, и т. д.; V_1 есть какая-либо функція отъ абсолютныхъ координатъ точки m_1 , V_2 — какая-либо функція отъ координатъ точки m_2 , и т. д.

Потенціалъ всей совокупности этихъ силъ выразится, какъ намъ уже извѣстно (стр. 506 (727)), суммою:

$$U = \sum_{i=1}^{i=n} V_i.$$

Если выразить абсолютныя координаты точекъ системы по формуламъ (45) кинематической части (стр. 56), то U обратится въ функцію отъ шести координатныхъ параметровъ $x_{ю}, y_{ю}, z_{ю}, \phi, \theta, \psi$, выражающихъ положеніе неизмѣняемой среды въ пространствѣ.

Зная выраженіе функціи U , мы будемъ въ состояніи получить изъ него выраженія проэкцій главнаго вектора приложенныхъ силъ на оси $X^{овъ}, Y^{овъ}, Z^{овъ}$ и проэкціи главнаго момента ихъ на оси $X^{овъ}, Y^{овъ}$ и $Z^{овъ}$ и на оси E, Y, Z , потому что, какъ сейчасъ докажемъ, производныя отъ U по $x_{ю}, y_{ю}, z_{ю}$ выражаютъ величины проэкцій главнаго вектора всей совокупности силъ на оси $X^{овъ}, Y^{овъ}$ и $Z^{овъ}$, а производныя отъ U по ϕ, θ и ψ выражаютъ величины проэкцій главнаго момента на направленія N (см. стр. 96 кинематической части), Z и Z .

Взявъ производную отъ U по $x_{ю}$ и принявъ во вниманіе, что $\frac{\partial x_i}{\partial x_{ю}} = 1$, мы легко найдемъ, что:

$$\frac{\partial U}{\partial x_{ю}} = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{\partial V_i}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial x_{ю}} = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{\partial V_i}{\partial x_i} = B_x;$$

такимъ образомъ окажется:

$$B_x = \frac{\partial U}{\partial x_{ю}}, \quad B_y = \frac{\partial U}{\partial y_{ю}}, \quad B_z = \frac{\partial U}{\partial z_{ю}} \quad \dots \quad (806)$$

Составимъ выраженіе производной отъ U по ϕ :

$$\frac{\partial U}{\partial \phi} = \sum_{i=1}^{i=n} \left(\frac{\partial V_i}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial \phi} + \frac{\partial V_i}{\partial y_i} \frac{\partial y_i}{\partial \phi} + \frac{\partial V_i}{\partial z_i} \frac{\partial z_i}{\partial \phi} \right),$$

гдѣ:

$$\frac{\partial x_i}{\partial \phi} = \xi_i \frac{\partial \lambda_x}{\partial \phi} + \eta_i \frac{\partial \mu_x}{\partial \phi} + \zeta_i \frac{\partial \nu_x}{\partial \phi};$$

замѣнивъ здѣсь ξ_i, η_i, ζ_i ихъ выраженіями въ разностяхъ $(x_i - x_0), (y_i - y_0), (z_i - z_0)$, т.-е. сдѣлавъ то же самое, что было дѣлаемо при преобразованіи выраженій (93) кинематической части въ выраженія (96), получимъ:

$$\frac{\partial x_i}{\partial \phi} = (z_i - z_0)Q(\phi) - (y_i - y_0)R(\phi),$$

гдѣ $P(\phi), Q(\phi), R(\phi)$ отличаются отъ выраженій ((95) кинематической части, стр. 84) для P, Q, R тѣмъ, что въ нихъ, вмѣсто производныхъ отъ $\lambda_x, \lambda_y, \dots, \lambda_z$ по t , входятъ производныя отъ тѣхъ же косинусовъ по ϕ ; т.-е., если въ выраженіяхъ (95) кинематической части замѣнимъ dt черезъ $d\phi$, то получимъ выраженія для $P(\phi), Q(\phi), R(\phi)$.

Другія выраженія для $P(\phi), Q(\phi)$ и $R(\phi)$ получимъ изъ выраженій (107), (108) и (109) кинематической части, если замѣнимъ въ нихъ производную ϕ' — единицею, а производныя \mathcal{M}' и \mathcal{E}' — нулями; тогда получимъ:

$$P(\phi) = -\sin \mathcal{M}, \quad Q(\phi) = \cos \mathcal{M}, \quad R(\phi) = 0.$$

Поэтому выраженіе для производной отъ U по ϕ преобразуется въ слѣдующій видъ:

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial \phi} &= -\sin \mathcal{M} \sum_{i=1}^{i=n} \left((y_i - y_0) \frac{\partial V_i}{\partial z_i} - (z_i - z_0) \frac{\partial V_i}{\partial y_i} \right) + \\ &+ \cos \mathcal{M} \sum_{i=1}^{i=n} \left((z_i - z_0) \frac{\partial V_i}{\partial x_i} - (x_i - x_0) \frac{\partial V_i}{\partial z_i} \right) \\ \frac{\partial U}{\partial \phi} &= (\mathcal{L}_0)_y \cos \mathcal{M} - (\mathcal{L}_0)_x \sin \mathcal{M} \dots \dots (807) \\ \frac{\partial U}{\partial \phi} &= (\mathcal{L}_0)_x \cos (N, X) + (\mathcal{L}_0)_y \cos (N, Y), \end{aligned}$$

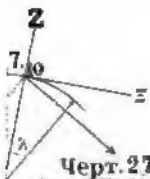
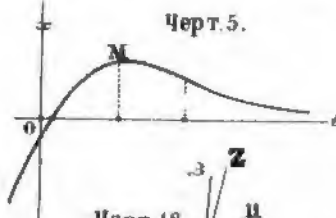
т.-е., эта производная выражаетъ величину проэкціи на направленіе N главнаго момента силъ вокругъ точки ($Ю$):

$$\frac{\partial U}{\partial \phi} = \mathcal{L}_0 \cos (\mathcal{L}_0, N). \dots \dots (807, \text{bis})$$

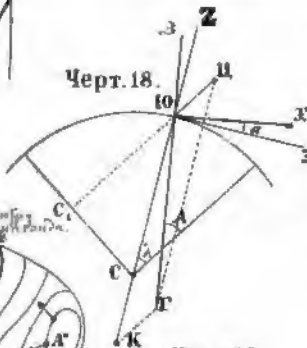
Черт. 4.



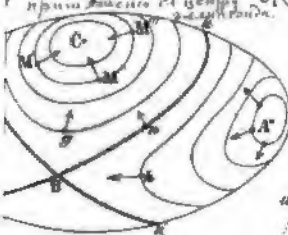
Черт. 5.



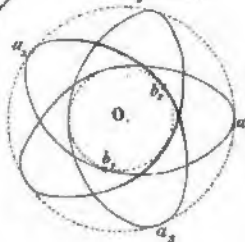
Черт. 18.



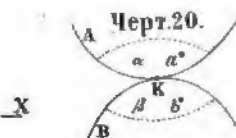
Черт. 27.



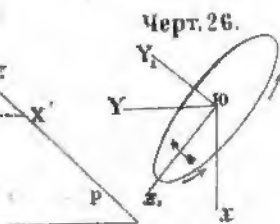
Черт. 19.



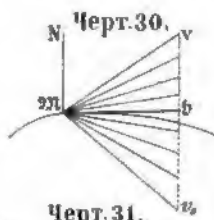
Черт. 20.



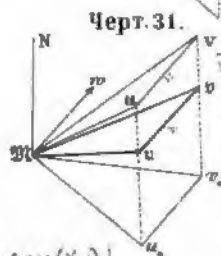
Черт. 26.



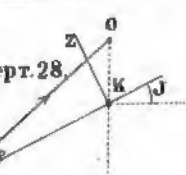
Черт. 30.



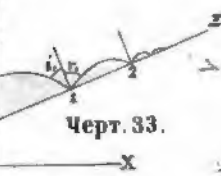
Черт. 31.



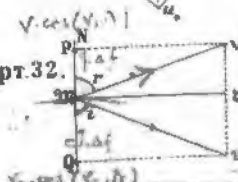
Черт. 28.



Черт. 33.



Черт. 32.



$$u = k\theta + 2\pi n\lambda$$

српски 9
стр. 399



Ms. A. 9. 2. 185

стр. 162 см. 70. 185 х 80

ACP3583

QA 805

365

1885

V. 2

Oct. 1

[illegible]

STANFORD UNIVERSITY LIBRARIES
STANFORD, CALIFORNIA 94305-6004

